

Ministerul Educației și Cercetării

Maria-Daniela Stoica
Titi Hanghiuc
Veronica Luminița Rotaru
Felicia Ioana Săndulescu

MATEMATICĂ

Trunchi comun și curriculum
de specialitate (TC+CS), filiera
teoretică, profilul real, specializarea
matematică-informatică – clasa a IX-a

Acest manual este proprietatea Ministerului Educației și Cercetării.

Acest proiect de manual școlar este realizat în conformitate cu Programa școlară aprobată prin Ordinul ministrului educației și cercetării nr. 6930/19.12.2025.

Numărul de telefon 119 – număr unic de telefon la nivel național pentru cazurile de abuz împotriva copiilor

Numărul de telefon 116.111 – număr de asistență pentru copii, în conformitate cu Legea nr. 272/2004 privind protecția și promovarea drepturilor copilului, republicată, cu modificările și completările ulterioare.

Ministerul Educației și Cercetării

Maria-Daniela Stoica
Titi Hanghiuc
Veronica Luminița Rotaru
Felicia Ioana Săndulescu

MATEMATICĂ

Trunchi comun și curriculum
de specialitate (TC+CS), filiera
teoretică, profilul real, specializarea
matematică-informatică – clasa a IX-a

Manualul școlar a fost aprobat de Ministerul Educației și Cercetării prin Ordinul de ministru nr. _____.

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital, și este transmisibil timp de opt ani școlari, începând din anul școlar 2026 – 2027.

Inspectoratul Școlar _____

Școala/Colegiul/Liceul _____

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*	
				la primire	la predare
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					
6.					
7.					
8.					

* Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: *nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat*.

- Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

STOICA, MARIA-DANIELA

Matematică : trunchi comun și curriculum de specialitate (TC+CS), filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică: clasa a IX-a / Maria-Daniela Stoica, Titi Hanghiuc, Veronica Luminița Rotaru, Felicia Ioana Săndulescu. - București : Booklet, 2026
ISBN 978-630-347-295-9

I. Hanghiuc, Titi

II. Rotaru, Veronica Luminița

III. Săndulescu, Felicia Ioana

Referenți științifici:	conf. univ. dr. habil. Georgia Irina Oros, Universitatea din Oradea prof. gr. I Valerian Vlăduț, Liceul Teoretic „Dimitrie Bolintineanu”, București
Redactor-șef:	Bogdan Nicolai
Redactor:	Ana Bratu
Corector rezolvator:	Daniela Ciofu
Design copertă:	Silvia Olteanu
Tehnoredactare:	Carmen Dumitrescu
Grafică și DTP:	Mihaela Cojoc
Video:	Quartz Film Studio
Voce:	Ramona Hilohe
Digital:	MyKoolio
Credite foto:	Adobe Stock



Pentru comenzi:
tel.: 021.430.30.95/021.440.10.02
e-mail: comenzi@booklet.ro
site: www.booklet.ro

© Editura Booklet

Toate drepturile asupra lucrării aparțin editurii.

Competențe generale și specifice	5	1.3. Progresii geometrice: determinarea termenului general al unei progresii; suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice, caracterizarea unei progresii geometrice prin relația dintre orice trei termeni consecutivi, condiția ca n numere reale să fie în progresie geometrică, pentru $n \geq 3$	51
Ghid de utilizare a manualului digital	6	Portofoliu	60
Recapitulare inițială	7	Studiu de caz	61
Evaluare inițială	8	Recapitulare	62
		Evaluare	64
UNITATEA 1		UNITATEA 3	
Elemente de logică matematică	9	Funcții	65
1. Propoziții, predicate; operații cu propoziții și predicate: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența; cuantificatorul existențial și cuantificatorul universal; reguli de negare, reducere la absurd		1. Proprietăți generale ale funcțiilor	
1.1. Propoziții, predicate	10	1.1. Funcții: definiție, exemple, modalități de a descrie o funcție, funcții egale, restricții ale unei funcții, imaginea unei funcții	66
1.2. Operații cu propoziții și predicate: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența	14	1.2. Reprezentarea grafică a unei funcții definite pe submulțimi ale lui $\mathbb{R}$, intersecția graficului cu axele de coordonate, drepte în plan de forma $x = m$ sau de forma $y = m$, $m \in \mathbb{R}$; semnul unei funcții numerice, interpretarea geometrică a soluțiilor ecuațiilor de forma $f(x) = m$ și $f(x) = g(x)$	76
1.3. Cuantificatorul existențial și cuantificatorul universal	21	1.3. Proprietăți ale funcțiilor numerice: monotonie, mărginire, paritate/imparitate, convexitate/concavitate; lecturi grafice	89
1.4. Reguli de negare	24	1.4. Funcții obținute prin operații algebrice elementare (sumă, diferență, produs, raport); compunerea funcțiilor	103
1.5. Reducere la absurd	26	1.5. Funcții injective, surjective, bijective, inversabile: definiție, interpretare geometrică pentru funcții numerice, condiția necesară și suficientă ca o funcție să fie inversabilă; lecturi grafice	113
2. Metoda inducției matematice	28	Recapitulare intermediară	124
Recapitulare	32	Îmi încerc puterile	127
Portofoliu	33	2. Funcția de gradul al doilea	
Evaluare	34	2.1. Definiție, reprezentare grafică, intersecțiile reprezentării grafice cu axele de coordonate, axa de simetrie	128
UNITATEA 2		2.2. Monotonia funcției de gradul al doilea; punctul de extrem	139
Șiruri și progresii	35		
1. Șiruri; moduri de definire a unui șir. Progresii aritmetice și progresii geometrice: determinarea termenului general al unei progresii; suma primilor n termeni ai unei progresii, caracterizarea unei progresii prin relația dintre orice trei termeni consecutivi, condiția ca n numere reale să fie în progresie aritmetică sau geometrică, pentru $n \geq 3$			
1.1. Șiruri; moduri de definire a unui șir	36		
1.2. Progresii aritmetice: determinarea termenului general al unei progresii; suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice, caracterizarea unei progresii aritmetice prin relația dintre orice trei termeni consecutivi, condiția ca n numere reale să fie în progresie aritmetică, pentru $n \geq 3$	41		

2.3. Semnul funcției de gradul al doilea; interpretare geometrică (poziția unei parabole în raport cu axa Ox), inecuații de gradul al doilea studiate pe mulțimea $\mathbb{R}$ sau pe intervale de numere reale; interpretare geometrică (proiecții ale unor porțiuni de parabolă pe axe)	145	2.2. Funcțiile tangentă și cotangentă	219
2.4. Relațiile lui Viète	153	2.3. Relații între funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă, cotangentă	223
2.5. Sisteme care conțin ecuații de gradul al doilea; interpretare geometrică	157	3. Formule trigonometrice pentru suma/diferența a două numere reale	227
Investigație	163	4. Transformarea sumelor în produse și a produselor în sume	233
Recapitulare intermediară	164	5. Funcții trigonometrice inverse	237
Îmi încerc puterile	166	6. Ecuații trigonometrice	245
3. Funcția putere cu exponent întreg. Funcția radical		Investigație	255
3.1. Funcția putere cu exponent întreg	167	Recapitulare	256
3.2. Radicali, operații cu radicali, proprietățile radicalilor; expresii conjugate	178	Evaluare	258
3.3. Funcția radical	186		
3.4. Ecuații și inecuații cu radical	193	UNITATEA 5	
Recapitulare	197	Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Relații metrice	259
Evaluare	198	1. Teorema cosinusului, teorema sinusurilor, rezolvarea triunghiurilor	260
		Proiect	269
UNITATEA 4		2. Raza cercului înscris și raza cercului circumscris unui triunghi. Aria unui triunghi	270
Funcții trigonometrice. Ecuații trigonometrice	199	3. Teorema bisectoarei; relația lui Stewart; lungimile unor segmente importante din triunghi	275
1. Cercul trigonometric; funcțiile sinus și cosinus definite pe intervalul $[0, 2\pi]$; reducerea la primul cadran		Portofoliu	279
1.1. Cercul trigonometric; funcțiile sinus și cosinus definite pe intervalul $[0, 2\pi]$	200	4. Concurență și coliniaritate în geometria plană: teorema lui Menelaus, teorema lui Ceva	280
1.2. Reducerea la primul cadran	208	Recapitulare	286
2. Funcțiile sinus, cosinus, tangentă și cotangentă; relații între funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă, cotangentă		Evaluare	288
2.1. Funcțiile sinus și cosinus	213	Recapitulare finală	289
		Evaluare finală	292
		Indicații și răspunsuri	293
		Anexă	296

Ce vei învăța anul acesta la matematică?

CG.1 - Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

- IX.CS.1.1.** Identificarea propozițiilor elementare din care este alcătuit un enunț matematic
- IX.CS.1.2.** Identificarea elementelor specifice șirurilor/ progresiilor în contexte variate
- IX.CS.1.3.** Identificarea unor relații de tip dependență funcțională între variabile sau entități, pentru a evidenția elemente ale funcțiilor
- IX.CS.1.4.** Identificarea pe cercul trigonometric a punctelor asociate unor numere reale
- IX.CS.1.5.** Identificarea elementelor necesare pentru calcularea unor măsuri (lungimi de segmente, unghiuri, arii)

CG.2 - Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

- IX.CS.2.1.** Identificarea operațiilor cu propoziții elementare din cadrul unui enunț matematic
- IX.CS.2.2.** Efectuarea de calcule pentru determinarea elementelor șirurilor, progresiilor aritmetice și geometrice, utilizând formule specifice
- IX.CS.2.3.** Extragerea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ și structural, din reprezentări grafice pentru a descrie proprietățile unei funcții (monotonie, convexitate, puncte de extrem etc.) într-o situație practică dată
- IX.CS.2.4.** Stabilirea unor caracteristici calitative/cantitative folosind funcții trigonometrice, inclusiv folosind instrumente digitale
- IX.CS.2.5.** Aplicarea unor metode adecvate pentru determinarea unor distanțe, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii

CG.3 - Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

- IX.CS.3.1.** Determinarea valorii de adevăr a unui enunț matematic format din propoziții legate prin operatori logici
- IX.CS.3.2.** Aplicarea algoritmilor de calcul pentru determinarea unor termeni și a sumelor unor termeni consecutivi ai progresiilor aritmetice și geometrice, în diferite contexte
- IX.CS.3.3.** Aplicarea unor concepte și algoritmi matematici (funcții, rate de variație etc.), pentru a interpreta reprezentări grafice în scopul extragerii de informații relevante pentru rezolvarea, în contexte matematice, a unor probleme practice
- IX.CS.3.4.** Calcularea valorii unei funcții trigonometrice când se cunosc informații despre valorile unei alte funcții trigonometrice
- IX.CS.3.5.** Determinarea măsurilor unor unghiuri și a lungimilor unor segmente utilizând relații metrice

CG.4 - Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

- IX.CS.4.1.** Precizarea structurii logice a unui enunț
- IX.CS.4.2.** Transpunerea în limbaj specific matematic a unor situații din viața cotidiană referitoare la șiruri sau progresii în scopul analizării comportamentului acestora
- IX.CS.4.3.** Exprimarea unor concluzii și justificări matematice, utilizând limbajul specific funcțiilor (simboluri, formule, expresii, reprezentări), pentru a comunica informații extrase din reprezentări grafice, în contexte matematice practice
- IX.CS.4.4.** Stabilirea unor relații matematice utilizând calculul trigonometric
- IX.CS.4.5.** Caracterizarea în limbaj matematic a unei configurații geometrice folosind elemente de trigonometrie sau relații metrice

CG.5 - Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

- IX.CS.5.1.** Formularea unui enunț matematic (axiomă, definiție, relație/proprietate/teoremă) asociat unei situații date
- IX.CS.5.2.** Analizarea unor situații date în contexte intra și interdisciplinare, selectând modelul de progresie adecvat și metoda de rezolvare eficientă în funcție de datele disponibile
- IX.CS.5.3.** Analizarea unor situații date prin interpretarea reprezentărilor grafice și evidențierea soluțiilor posibile pentru a interpreta situații reale și a formula concluzii argumentate în contexte intra și interdisciplinare
- IX.CS.5.4.** Analizarea proprietăților funcțiilor trigonometrice folosind reprezentarea grafică sau cercul trigonometric
- IX.CS.5.5.** Aplicarea unor metode variate pentru optimizarea calculelor de distanțe, de măsuri de unghiuri și de arii

CG.6 - Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

- IX.CS.6.1.** Validarea unui enunț matematic asociat unei situații date
- IX.CS.6.2.** Modelarea matematică, folosind șirurile sau progresiile, a unor situații reale pentru interpretarea implicațiilor în contexte interdisciplinare și pentru luarea unor decizii fundamentate pe datele obținute
- IX.CS.6.3.** Modelarea unei situații reale, utilizând un model matematic (funcții, relații) construit pe baza datelor extrase din reprezentări grafice, pentru a explica, a anticipa sau a optimiza rezultate în contexte precum economie, biologie sau fizică
- IX.CS.6.4.** Descrierea unor relații între mărimi din diferite domenii, cu ajutorul funcțiilor trigonometrice
- IX.CS.6.5.** Modelarea unor configurații geometrice utilizând metode metrice, trigonometrice, sintetice

GHID DE UTILIZARE A MANUALULUI DIGITAL

Manualul digital reproduce integral versiunea tipărită, oferindu-le elevilor posibilitatea de a interacționa cu diverse elemente de conținut. Astfel, aceștia vor putea să vizioneze animații sau filme, să rezolve exerciții interactive și să navigheze prin manual.

Simboluri:



1. Elemente grafice (AMII statice):

imagini, informații și activități suplimentare.



2. Elemente video (AMII animate):

videoclipuri cu informații și activități suplimentare, curiozități.



3. Exerciții interactive (AMII interactive):

exerciții de alegere multiplă, de tip adevărat sau fals, de asociere, de completare etc.

Cum se folosește manualul digital?

1. Meniul superior



Mărire/micșorare – se mărește sau se micșorează fereastra.



Pagina următoare – se accesează pagina următoare paginii curente.



Căutare – pot fi efectuate căutări în manualul digital după cuvinte-cheie.



Salt la ultima pagină – se accesează ultima pagină a manualului digital.



Cuprins – deschide cuprinsul manualului digital.



Adnotări – deschide o galerie de instrumente, cu funcții diferite, ce permit operații în timp real: sublinieri, adnotări, încercuiri, demarcări, mascări, evidențieri etc.



Înapoi la prima pagină – se revine la prima pagină a manualului digital.



Tipărește pagini din manualul digital.



Pagina anterioară – se accesează pagina anterioară paginii curente.



Indicații – se accesează ecranul cu indicații.

2. Ajutor în utilizarea exercițiilor interactive (AMII interactive):

Deschide exercițiul interactiv dând click pe . Citește cerința, apoi utilizează mouse-ul și/sau tastatura pentru a rezolva exercițiile conform instrucțiunilor. Apasă butonul **Verifică** pentru a vedea dacă ai ales corect. Pentru toate tipurile de exerciții apare  în cazul răspunsului corect și  în cazul răspunsului greșit. Pentru a relua rezolvarea exercițiului, apasă butonul **Mai încercă** sau reîncarcă pagina.

3. Ajutor în utilizarea elementelor video (AMII animate):

Apasă butonul  pentru a deschide videoclipul. Butonul **Play (Vizualizare)** este localizat pe bara de jos a ferestrei, alături de **Volum** și de opțiunea **Afișare completă** pe ecran. Pentru a opri temporar videoclipul, apasă butonul **Pauză**, de pe bara de jos a ferestrei. Pentru a închide videoclipul, apasă butonul  din colțul din dreapta sus al ferestrei.

4. Ajutor în utilizarea elementelor grafice (AMII statice):

Apasă butonul . Imaginea se va deschide într-o fereastră nouă. Apasă butonul  din colțul din dreapta sus, pentru a închide imaginea.

1. Compară numerele reale a și b .
 - a) $a = 2\sqrt{50} - 3\sqrt{18} + \sqrt{98} - 3\sqrt{8}$, $b = \frac{11}{\sqrt{12}} - \frac{7}{5\sqrt{3}} + \frac{9}{\sqrt{300}}$;
 - b) $a = \left(-\frac{15}{49} : \frac{10}{21} + \frac{5}{21}\right) \cdot \frac{18}{17} : \left(-\frac{2}{7}\right)$, $b = \left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{5} + \frac{7}{15}\right] : 3\right\}^{-1} \cdot \frac{1}{2}$;
 - c) $a = 2^{15} : 8^3 \cdot 16^2 \cdot 4^{-5}$, $b = 9^5 : 27^2$.
2. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:
 - a) $-4 + 2x = 0$; c) $3 - 2(1 - 3x) = 3(1 + 2x) + 1$; e) $x^2 = 36$;
 - b) $1 - 4x = 6x - 7$; d) $\frac{3 + 4x}{2} - \frac{3x - 5}{12} = \frac{1 - 2x}{4} + 3$; f) $x^2 - x = 6$.
3. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } |2x + 1| \leq 5\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } x - 2(x + 1) < -3\}$.
 - a) Scrie mulțimile A și B sub formă de interval.
 - b) Determină suma numerelor întregi din mulțimea A .
 - c) Determină $A \cup B$ și $A \cap B$.
4. Pentru 4 caiete tip dictando și 5 caiete cu foaie velină, Ana a plătit la casă 174 de lei, iar pentru 3 caiete tip dictando și 2 caiete cu foaie velină, de același tip cu cele cumpărate de Ana, Maria a plătit 99 de lei. Determină prețul unui caiet tip dictando și prețul unui caiet cu foaie velină.
5. Se consideră expresia $E(x) = (x + 1)^2 + 3(x - 2)(x + 2) - 4(x + 1)(x + 2)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - a) Arată că $E(1)$ este un număr întreg mai mic decât -20 .
 - b) Determină mulțimea numerelor reale x pentru care $E(x) \geq 1$.
6. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{3x - 6}{x^2 - 4x + 4} - \frac{2x - 1}{x^2 - 4} + \frac{x + 3}{x + 2}\right) : \frac{x + 1}{x - 2}$, unde x este număr real, $x \neq -2$, $x \neq -1$ și $x \neq 2$. Arată că $E(x) = 1 - \frac{1}{x + 2}$, pentru orice număr real x , unde $x \neq -2$, $x \neq -1$ și $x \neq 2$.
7. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 4$.
 - a) Arată că $f\left(\frac{2}{3}\right) - g\left(-\frac{1}{3}\right) = 3$.
 - b) Reprezintă grafic funcția f în sistemul de axe ortogonale xOy .
 - c) Verifică dacă punctul $A(-1, -7)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy .
 - d) Determină numărul real m pentru care punctul $M(m, -8)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy .
 - e) Determină coordonatele punctului N de pe reprezentarea geometrică a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy , știind că acesta are coordonatele egale.
 - f) Determină distanța de la originea sistemului de axe ortogonale xOy la reprezentarea geometrică a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy .
 - g) Determină coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentările geometrice ale graficelor funcțiilor f și g , unde $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -2x + 5$.
 - h) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) \leq 9$.
8. Fie MNP un triunghi dreptunghic $\sphericalangle N = 90^\circ$ cu $MN = 12$ cm și $NP = 9$ cm. Punctul Q este proiecția ortogonală a punctului N pe dreapta MP .
 - a) Calculează aria triunghiului MNP .
 - b) Calculează lungimea segmentului NQ .
 - c) Calculează $\sin(\sphericalangle PNQ)$.
9. Fie ABC un triunghi dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90^\circ$) cu $BC = 16$ cm și $\sphericalangle B = 30^\circ$. Punctul M este mijlocul segmentului BC . Arată că perimetrul triunghiului AMB este mai mic decât 32 cm.
10. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu $AB = 6$ cm și $VA = 5$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului VA și $AC \cap BD = \{O\}$.
 - a) Determină aria totală și volumul piramidei $VABCD$.
 - b) Demonstrează că dreapta OM este paralelă cu planul (VCD) .

Timp de lucru: 45 de minute

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I

30 de puncte

30 de puncte	1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.
(10 p.)	A. Se consideră intervalele de numere reale $I = (-\infty, 3)$ și $J = [-2, +\infty)$. Intersecția intervalelor I și J este intervalul: a) $(-\infty, 3)$; b) $[-2, 3)$; c) $(-2, 3]$; d) $(3, +\infty)$.
(10 p.)	B. Dacă $a = \sqrt{3} + 1$ și $b = \sqrt{12}$, atunci $a^2 - b$ este egal cu: a) $\sqrt{12}$; b) $4 - \sqrt{12}$; c) 4; d) -1.
(10 p.)	C. Dacă ABC este un triunghi cu $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm și $BC = 5$ cm, atunci aria triunghiului ABC este egală cu: a) 6 cm ² ; b) 12 cm ² ; c) 15 cm ² ; d) 17 cm ² .

Subiectul al II-lea

60 de puncte

Scrie rezolvările complete.

45 de puncte	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 8$.
(10 p.)	a) Calculează $f\left(\frac{5}{2}\right) - 2f\left(-\frac{1}{4}\right)$.
(5 p.)	b) Verifică dacă punctul $A(-1, 4)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy .
(10 p.)	c) Determină distanța de la originea sistemului de axe ortogonale xOy la reprezentarea geometrică a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy .
(10 p.)	d) Determină coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentările geometrice ale graficelor funcțiilor f și g , unde $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 10$.
(10 p.)	e) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) > 4$.
15 puncte	2. Se consideră tetraedrul regulat ABCD cu $AB = 12$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor CD, respectiv AD.
(5 p.)	a) Determină volumul tetraedrului ABCD.
(10 p.)	b) Determină lungimea segmentului MN.

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua cunoștințele dobândite în anul școlar precedent.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	5 foarte bine	4 bine	3 mediu	2 slab	1 foarte slab
Mi-a fost ușor să rezolv exercițiile.					
Am înțeles criteriile de rezolvare.					
Mi-am amintit conținuturile învățate.					

1

Elemente de logică matematică

- ▶ 1. Propoziții, predicate; operații cu propoziții și predicate: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența; cuantificatorul existențial și cuantificatorul universal; reguli de negare, reducere la absurd
- ▶ 1.1. Propoziții, predicate
- ▶ 1.2. Operații cu propoziții și predicate: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența
- ▶ 1.3. Cuantificatorul existențial și cuantificatorul universal
- ▶ 1.4. Reguli de negare
- ▶ 1.5. Reducere la absurd
- ▶ 2. Metoda inducției matematice





1.1. Propoziții, predicate

Descopăr

Precizează dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false.

1. Balena este un pește.
2. O oră are 3 600 de secunde.
3. Soluția ecuației $x + 2 = 3$, $x \in \mathbb{R}$, este $x = 1$.
4. Hai acasă!
5. $x + y + z = 2$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.
6. Unde mergem?
7. π este număr irațional.
8. $x = y$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Învăț



Logica matematică studiază regulile de bază, după care se pot combina afirmațiile pentru a construi raționamente valabile. În matematică, enunțurile pot fi adevărate sau false. Putem spune că logica matematică este „gramatica gândirii corecte”.

Definiția 1. Un enunț este un ansamblu de simboluri cărora li s-a dat un anumit sens.

EXEMPLE:

1. „Numărul 2 este impar.”
2. „ $3 \in \mathbb{Z}$ ”
3. „ $x + 5 \leq 3$, $x \in \mathbb{R}$ ”
4. „Cât este ceasul?”

Rezolvând exercițiul propus la secțiunea **Descopăr**, observăm că:

- despre unele enunțuri putem spune cu certitudine că sunt adevărate sau false;
- unor enunțuri nu li se poate atribui una dintre valorile „adevărat” sau „fals”;
- unele enunțuri devin adevărate sau false în funcție de valorile pe care le primesc necunoscutele de care depind.

Definiția 2. Se numește propoziție, în sensul logicii matematice, un enunț care este adevărat sau fals (dar nu ambele simultan).

Propozițiile se notează cu litere mici, de obicei p, q, r, s , sau cu litere mici cu indici, de exemplu p_1, q_2, r_3 .

EXEMPLE:

1. p : „ $5 - 2 = 2$ ”
2. q_2 : „ $9 : 3$ ”
3. r_3 : „ $3 \leq 6$ ”
4. q : „Craiova este reședința județului Dolj.”

Definiția 3. Proprietatea unei propoziții p de a fi adevărată sau falsă se numește valoarea de adevăr a propoziției p .

Valoarea de adevăr a unei propoziții este „adevărul” (notat A sau 1), dacă propoziția este adevărată, sau „falsul” (notat F sau 0), dacă propoziția este falsă.

OBSERVAȚIE.

Logica matematică se mai numește și **logică bivalentă**, deoarece singurele valori de adevăr care pot fi atribuite unei propoziții sunt „adevărul” și „falsul”.

EXEMPLE:

1. Propoziția p : „ $7 + 3 = 21$ ” este falsă, deci valoarea sa de adevăr este F (sau 0).
2. Propoziția q : „Laturile pătratului sunt congruente.” este adevărată, deci valoarea sa de adevăr este A (sau 1).

OBSERVAȚII.

1. O teoremă din matematică este o propoziție adevărată.
2. Enunțurilor de tipul „Hai acasă!” sau „Unde ai fost?” nu li se poate atribui o valoare de adevăr. Acestea nu sunt propoziții în sensul logicii matematice.

Definiția 4. Se numește **predicat** un enunț care depinde de una sau mai multe variabile și care devine propoziție adevărată sau propoziție falsă în funcție de valorile pe care le atribuim variabilei/variabilelor.

OBSERVAȚIE.

La definirea unui predicat se indică mulțimea/mulțimile în care variabila/variabilele ia/iau valori.

Definiția 5. Mulțimea de adevăr a unui predicat este mulțimea tuturor valorilor variabilei/variabilelor pentru care predicaatul devine o propoziție adevărată.

OBSERVAȚII.

1. Predicatele se notează tot cu litere mici, urmate de paranteze rotunde între care se pun variabilele, de exemplu, $p(x)$, $q(x, y)$, $p_1(x, y, z)$, $q_2(x_1, x_2, x_3)$.
2. În funcție de numărul de variabile de care depinde, un predicat poate fi: **unar** – notat, de exemplu, $p(x)$; **binar** – notat, de exemplu, $p(x, y)$; **ternar** – notat, de exemplu, $p(x, y, z)$ etc.

EXEMPLE:

1. Enunțul $p(x)$: „ $x^2 - 2x - 3 = 0$ ”, unde $x \in \mathbb{R}$, este un predicat unar.

Pentru $x = 1$, obținem propoziția $p(1)$: „ $1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 0$ ”, care este falsă.

Pentru $x = 3$, obținem propoziția $p(3)$: „ $3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 0$ ”, care este adevărată.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $\{-1, 3\}$, adică mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Enunțul $p(x, y)$: „ $x^2 + y^2 = 5$ ”, unde $x \in \mathbb{Z}$ și $y \in \mathbb{Z}$, este un predicat binar.

Pentru $x = 1$, $y = 0$, obținem propoziția $p(1, 0)$: „ $1^2 + 0^2 = 5$ ”, care este falsă.

Pentru $x = -2$, $y = 1$, obținem propoziția $p(-2, 1)$: „ $(-2)^2 + 1^2 = 5$ ”, care este adevărată.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x, y)$ este $\{(-2, -1), (-2, 1), (-1, -2), (-1, 2), (1, -2), (1, 2), (2, -1), (2, 1)\}$.

3. Enunțul $p(x, y, z)$: „ $x^2 + y^2 = z^2$ ”, unde $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, este un predicat ternar.

Pentru $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, obținem propoziția $p(1, 2, 3)$: „ $1^2 + 2^2 = 3^2$ ”, care este falsă.

Pentru $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, obținem propoziția $p(3, 4, 5)$: „ $3^2 + 4^2 = 5^2$ ”, care este adevărată.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x, y, z)$ este formată din toate **tripletele pitagoreice**: $\{(3, 4, 5), (5, 12, 13), (6, 8, 10) \text{ etc.}\}$.



Gottlob Frege
(1848-1925)

ȘTIAI CĂ...?

• Denumirile anterioare ale logicii matematice au fost *logică simbolică* (opusă logicii filosofice) și *metamatematică*. Primul termen încă este folosit, dar al doilea termen este utilizat în prezent pentru a desemna anumite aspecte ale teoriei demonstrației.

• **Gottlob Frege**, matematician, filosof și logician german, este considerat fondatorul logicii moderne datorită volumului *Notăția conceptelor: limbajul formal al gândirii pure, elaborat după modelul aritmeticii* (nu a fost tradus în limba română).

Exerciții rezolvate

1. Precizează care dintre enunțurile următoare este sau nu propoziție. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor identificate.

- a) „Închide ușa!” c) „1 este număr prim.” e) „ $x^2 + 1 = 10$ ”, $x \in \mathbb{Z}$
b) „Ce faci?” d) „ $2 + 2 = 4$ ” f) „Cartea este un aliment.”

Rezolvare:

- a) Enunțul nu este o propoziție, deoarece nu îi putem atribui una dintre valorile „adevărat” sau „fals”.
b) Enunțul nu este o propoziție, deoarece nu îi putem atribui una dintre valorile „adevărat” sau „fals”.
c) Enunțul este o propoziție falsă.
d) Enunțul este o propoziție adevărată.
e) Enunțul nu este o propoziție, deoarece pentru anumite valori ale variabilei este adevărat, iar pentru altele este fals (enunțul este predicat unar).
f) Enunțul este o propoziție falsă.

2. Stabilește mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$.

- a) $p(x)$: „ $2(x - 1) + 3 = x$ ”, $x \in \mathbb{R}$; b) $p(x)$: „ $3x - 9 < 4x + 2$ ”, $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

a) Rezolvăm ecuația $2(x - 1) + 3 = x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$2(x - 1) + 3 = x \Leftrightarrow 2x - 2 + 3 = x \Leftrightarrow 2x - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $\{-1\}$.

b) Rezolvăm inecuația $3x - 9 < 4x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

$$3x - 9 < 4x + 2 \Leftrightarrow 3x - 4x < 2 + 9 \Leftrightarrow -x < 11 \Leftrightarrow x > -11 \Leftrightarrow x \in (-11, +\infty)$$

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $(-11, +\infty)$.

3. Determină mulțimea de adevăr a predicatului $p(x, y)$: „ $|3x - 4| + |-2y - 5| = 0$ ”, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} |3x - 4| \geq 0, \text{ pentru orice număr real } x \\ |-2y - 5| \geq 0, \text{ pentru orice număr real } y \\ |3x - 4| + |-2y - 5| = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow |3x - 4| = 0 \text{ și } |-2y - 5| = 0$$

$$|3x - 4| = 0 \Leftrightarrow 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$|-2y - 5| = 0 \Leftrightarrow -2y - 5 = 0 \Leftrightarrow -2y = 5 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}$$

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x, y)$ este $\left\{\left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{2}\right)\right\}$.

Aplic

- Identifică propozițiile și predicatele dintre enunțurile următoare. Pentru fiecare dintre propozițiile identificate, precizează valoarea de adevăr, iar pentru fiecare dintre predicatele identificate, precizează mulțimea de adevăr.
 - „10 este număr prim.”
 - „Cum este vremea?”
 - „ $72 : 8 = 7$ ”
 - „Triunghiul isoscel are două laturi congruente.”
 - „ $72 : x = 12$ ”, $x \in \mathbb{Z}^*$
 - „ $x + \sqrt{y} = 1$ ”, $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}$
 - „ $x + 2 = 3$ ”, $x \in \mathbb{Z}$
 - „ $x^2 - 4x + 4 = 0$ ”, $x \in \mathbb{Z}$
 - „Aria unui triunghi este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi și lungimea înălțimii corespunzătoare acesteia.”
 - „Șterge praful!”
 - „ $2 : 8 = 0,4$ ”
 - „ $x - 3 \leq 5$ ”, $x \in \mathbb{R}$
 - „ $4x^2 - 4x + 1 = 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$
 - „În intervalul de numere reale $(-3, 2]$ sunt 5 numere întregi.”
 - „ $\sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{25}$ ”
 - „ $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$ ”
 - „Calculează $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$!”
- Fie predicatul $p(x)$: „ $x^2 \geq x$ ”, unde $x \in \mathbb{R}$. Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor:
 - $p(0)$;
 - $p(-1)$;
 - $p(\frac{2}{3})$;
 - $p(\sqrt{2})$;
 - $p(\frac{1}{2})$.
- Fie predicatul $p(x, y)$: „ x divide y ”, unde $x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}$. Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor:
 - $p(2, 1)$;
 - $p(3, 9)$;
 - $p(1, 10)$;
 - $p(5, 5)$.
- Fie predicatul $p(x, y)$: „ $x^2 - 2y^2 = 3$ ”, unde $x, y \in \mathbb{R}$. Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor:
 - $p(1, 1)$;
 - $p(0, -2)$;
 - $p(3, -\sqrt{3})$.
- Determină mulțimile de adevăr ale predicatelor următoare:
 - $p(x)$: „ $(x + 2) \cdot 3 - 1 = -2x + 5$ ”, $x \in \mathbb{R}$;
 - $p(x)$: „ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ”, $x \in \mathbb{Z}$;
 - $p(x)$: „ $|x - 2| = 5$ ”, $x \in \mathbb{R}$;
 - $p(x)$: „ $|x + 3| + |x^2 - 9| = 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$;
 - $p(x)$: „ $15 : x$ ”, $x \in \mathbb{N}^*$;
 - $p(x)$: „ $\frac{8}{x+1} \in \mathbb{N}$ ”, $x \in \mathbb{N}$;
 - $p(x)$: „ $(x - 3)^2 - 1 = 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$;
 - $p(x)$: „ $\frac{2x-1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$ ”, $x \in \mathbb{R}$;
 - $p(x)$: „ $|2 - 3x| \leq 4$ ”, $x \in \mathbb{R}$;
 - $p(x)$: „ $2x - 1 - (x + 3) \leq 4 - x$ ”, $x \in \mathbb{R}$;
 - $p(x)$: „ $5(x + 2) - 3(x - 1) > -2$ ”, $x \in \mathbb{R}$;
 - $p(x, y)$: „ $|x - 2| + |y - 1| = 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$.

LUCRAȚI ÎN PERECHI!

**Harta conceptuală:
Propoziții și predicate**

Realizați o hartă conceptuală cu titlul „Propoziții și predicate”.

- Creați o ramură principală pentru **propoziții** și o alta pentru **predicate**. Dați câte trei exemple din fiecare categorie.
- Creați ramuri secundare pentru predicate: unar, binar și ternar. Dați câte un exemplu pentru fiecare caz.

Folosiți culori diferite pentru fiecare secțiune.





1.2. Operații cu propoziții și predicate: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența

Descopăr

Precizează valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

1. p : „2 nu divide 4.”
2. q : „2 divide 4.”
3. r : „2 divide 4 sau 2 este număr prim.”
4. s : „Dacă 2 divide 7, atunci 2 este număr prim.”
5. t : „2 divide 4 și 2 este număr prim.”

Învăț

Utilizând elemente de legătură, care în limbajul curent sunt exprimate prin cuvintele „nu”, „sau”, „și”, „implică”, „echivalent”, din propoziții simple se pot forma propoziții noi.

OBSERVAȚII.

1. În loc de „**implică**” se poate folosi „**dacă ..., atunci**”, iar în loc de „**echivalent**” se poate folosi „**dacă și numai dacă**”.
2. Elementele de legătură „**nu**”, „**sau**”, „**și**”, „**implică**”, „**echivalent**” se numesc **operatori logici** sau **conectori logici**.
3. Propoziția obținută în urma folosirii conectorilor logici se numește **propoziție compusă**.

EXEMPLU:

Se consideră propozițiile p : „ $2 + 3 = 5$ ” și q : „Numărul natural 2 este număr prim.”.

Cu ajutorul operatorilor logici se pot forma propoziții compuse, precum:

- „ $2 + 3 = 5$ și numărul natural 2 este număr prim.”
- „ $2 + 3 = 5$ sau numărul natural 2 este număr prim.”
- „ $2 + 3 = 5$ implică numărul natural 2 este număr prim.” sau „Dacă $2 + 3 = 5$, atunci numărul natural 2 este număr prim.”
- „ $2 + 3 = 5$ echivalent cu numărul natural 2 este număr prim.” sau „ $2 + 3 = 5$ dacă și numai dacă numărul natural 2 este număr prim.”

Valoarea de adevăr a unei propoziții compuse este determinată de valorile de adevăr ale propozițiilor componente.

Operațiile logice elementare cu propoziții sunt negația, disjuncția, conjuncția, implicația și echivalența.

1. Negația

A. Negația propozițiilor

Negația propoziției p este propoziția „**non p** ”, care se notează $\neg p$ sau $\bar{p}$ și care este adevărată când p este falsă și falsă când p este adevărată.

Valoarea de adevăr a propoziției „*non p*” este ilustrată în tabelul de adevăr alăturat:

EXEMPLE:

1. p : „Câinele este un mamifer.” (A)

2. p : „Numărul 7 este par.” (F)

$\neg p$: „Câinele nu este un mamifer.” (F)

$\neg p$: „Numărul 7 nu este par.” (A)

p	$\neg p$
1	0
0	1

B. Negația predicatelor

Se consideră predicatul $p(x)$, unde $x \in E$, $E \neq \emptyset$.

Negația predicatului $p(x)$ se notează $\neg p(x)$ sau $\overline{p(x)}$. Mulțimea de adevăr a predicatului $\neg p(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care predicatul $p(x)$ devine o propoziție falsă.

EXEMPLU:

$p(x)$: „ $x \geq 2$ ”, $x \in \mathbb{R}$, $\neg p(x)$: „ $x < 2$ ”, $x \in \mathbb{R}$

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $[2, +\infty)$, iar mulțimea de adevăr a predicatului $\neg p(x)$ este $(-\infty, 2)$.

2. Conjuncția

A. Conjuncția propozițiilor

Conjuncția propozițiilor p și q este propoziția „ p și q ”, notată $p \wedge q$, care este adevărată când ambele propoziții sunt adevărate și falsă în celelalte cazuri.

Valoarea de adevăr a propoziției „ p și q ” este ilustrată în tabelul de adevăr alăturat:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

EXEMPLE:

1. Fie propozițiile p : „ $15 > 10$ ” și q : „ $8 : 2$ ”. Propoziția $p \wedge q$: „ $15 > 10$ și $8 : 2$ ” este adevărată, deoarece atât p , cât și q sunt propoziții adevărate.

2. Fie propozițiile p : „ $2 + 3 = 6$ ” și q : „Pătratul este un paralelogram”. Propoziția $p \wedge q$: „ $2 + 3 = 6$ și pătratul este un paralelogram” este falsă, deoarece propoziția p este falsă.

OBSERVAȚIE.

Propoziția $p \wedge (\neg p)$, care este întotdeauna falsă, exprimă **principiul contradicției**, potrivit căruia **o propoziție nu poate fi simultan și adevărată, și falsă**.

B. Conjuncția predicatelor

Se consideră predicatele $p(x)$ și $q(x)$, unde $x \in E$ și $E \neq \emptyset$.

Conjuncția predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul „ $p(x)$ și $q(x)$ ”, notat $p(x) \wedge q(x)$.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \wedge q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care ambele predicate $p(x)$ și $q(x)$ devin propoziții adevărate.

EXEMPLU:

Se consideră predicatele $p(x)$: „ x este număr prim”, $x \in \mathbb{N}$, și $q(x)$: „ $x < 17$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Conjuncția predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul $p(x) \wedge q(x)$: „ x este număr prim și $x < 17$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$, iar mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$ este $\{0, 1, 2, 3, \dots, 16\}$.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \wedge q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care ambele predicate ($p(x)$, $q(x)$) devin propoziții adevărate, adică mulțimea $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

Observăm că, dacă notăm cu A mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ și cu B mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$, atunci mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \wedge q(x)$ este $A \cap B$.

Într-adevăr, un element x_0 aparține mulțimii de adevăr a predicatului $p(x) \wedge q(x)$ atunci când propozițiile $p(x_0)$ și $q(x_0)$ sunt simultan adevărate, adică atunci când $x_0 \in A$ și $x_0 \in B$, deci $x_0 \in A \cap B$.

3. Disjuncția

A. Disjuncția propozițiilor

Disjuncția propozițiilor p și q este propoziția „ p sau q ”, notată $p \vee q$, care este adevărată dacă cel puțin una dintre propoziții este adevărată și falsă când ambele propoziții sunt false.

Valoarea de adevăr a propoziției „ p sau q ” este ilustrată în tabelul de adevăr alăturat:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

EXEMPLU:

Se consideră propozițiile p : „3 este număr natural.” și q : „3 este număr par.”. Propoziția $p \vee q$: „3 este număr natural sau este par.” este adevărată, deoarece propoziția p este adevărată.

OBSERVAȚIE.

Propoziția $p \vee (\neg p)$ este adevărată pentru orice propoziție p și exprimă **principiul terțului exclus**, potrivit căruia **o propoziție este sau adevărată, sau falsă**.

B. Disjuncția predicatelor

Se consideră predicatele $p(x)$ și $q(x)$, unde $x \in E$ și $E \neq \emptyset$.

Disjuncția predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul „ $p(x)$ sau $q(x)$ ”, notat $p(x) \vee q(x)$. Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \vee q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care cel puțin unul dintre predicatele $p(x)$ și $q(x)$ devine propoziție adevărată.

EXEMPLU:

Se consideră $p(x)$: „ $x + 3 > 6$ ”, $x \in \mathbb{N}$, și $q(x)$: „ $x < 7$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Disjuncția predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul $p(x) \vee q(x)$: „ $x + 3 > 6$ sau $x < 7$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $\{4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$, iar mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$ este $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \vee q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care cel puțin unul dintre predicatele $p(x)$ și $q(x)$ devine propoziție adevărată, adică mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$, care reprezintă mulțimea numerelor naturale.

Observăm că, dacă notăm cu A mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ și cu B mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$, atunci mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \vee q(x)$ este $A \cup B$.

Într-adevăr, un element x_0 aparține mulțimii de adevăr a predicatului $p(x) \vee q(x)$ atunci când cel puțin una dintre propozițiile $p(x_0)$ și $q(x_0)$ este adevărată, adică atunci când $x_0 \in A$ sau $x_0 \in B$, deci $x_0 \in A \cup B$.

4. Implicația

A. Implicația propozițiilor

Implicația propozițiilor p și q , în această ordine, este propoziția „ p implică q ” sau „dacă p , atunci q ” (notată $p \rightarrow q$), care este falsă dacă p este adevărată și q este falsă și este adevărată în toate celelalte cazuri.

Propoziția p se numește **premisă** sau **ipoteză**, iar propoziția q se numește **concluzie**.

Valoarea de adevăr a propoziției „ p implică q ” este ilustrată în tabelul de adevăr alăturat:

OBSERVAȚIE.

Propoziția „ p implică q ” se poate citi și „dacă p , atunci q ” sau „din p rezultă q ”.

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

EXEMPLE:

- Se consideră propozițiile p : „8 este multiplu al lui 4.” și q : „6 este număr par.”. Propoziția $p \rightarrow q$: „8 este multiplu al lui 4 implică 6 este număr par.” este adevărată, deoarece ambele propoziții p și q sunt adevărate.
- Se consideră propozițiile p : „ $2 + 3 = 5$ ” și q : „ $2^2 + 3^2 = 5^2$ ”. Propoziția $p \rightarrow q$: „ $2 + 3 = 5$ implică $2^2 + 3^2 = 5^2$ ” este falsă, deoarece propoziția p este adevărată și propoziția q este falsă.

B. Implicația predicatelor

Se consideră predicatele $p(x)$ și $q(x)$, unde $x \in E$ și $E \neq \emptyset$.

Implicația predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ (în această ordine) este predicatul „ $p(x)$ implică $q(x)$ ” sau „dacă $p(x)$, atunci $q(x)$ ”, notat $p(x) \rightarrow q(x)$.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \rightarrow q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care predicatul $p(x) \rightarrow q(x)$ devine o propoziție adevărată.

EXEMPLE:

- Fie predicatele $p(x)$: „ $x > 3$ ”, $x \in \mathbb{N}$, și $q(x)$: „ $x > 5$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Implicația predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul $p(x) \rightarrow q(x)$: „ $x > 3$ implică $x > 5$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $\{4, 5, 6, \dots\}$, iar mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$ este $\{6, 7, 8, \dots\}$.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \rightarrow q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care fie predicatul $p(x)$ devine propoziție falsă (mulțimea $\{0, 1, 2, 3\}$), fie ambele predicate $p(x)$ și $q(x)$ devin propoziții adevărate (mulțimea $\{6, 7, 8, \dots\}$, adică $\mathbb{N} \setminus \{4, 5\}$).

- Fie predicatele $p(x)$: „ $x : 6$ ”, $x \in \mathbb{N}$, și $q(x)$: „ $x : 3$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Implicația predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul $p(x) \rightarrow q(x)$: „ $x : 6$ implică $x : 3$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $\{0, 6, 12, 18, \dots\}$, iar mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$ este $\{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\}$.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \rightarrow q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care fie predicatul $p(x)$ devine propoziție falsă (mulțimea $\mathbb{N} \setminus \{0, 6, 12, 18, \dots\}$), fie ambele predicate $p(x)$ și $q(x)$ devin propoziții adevărate (mulțimea $\{0, 6, 12, 18, \dots\}$, adică $\mathbb{N}$).

Dacă notăm cu A mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ și cu B mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$, atunci $A = \{0, 6, 12, 18, \dots\}$ și $B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\}$. Observăm că orice element din mulțimea A aparține și mulțimii B (orice multiplu de 6 este și multiplu de 3), deci $A \subset B$.

5. Echivalența

A. Echivalența propozițiilor

Echivalența propozițiilor p și q este propoziția „ p echivalent cu q ” sau „ p dacă și numai dacă q ” (notată $p \leftrightarrow q$), care este adevărată când ambele propoziții au aceeași valoare de adevăr și este falsă în celelalte cazuri.

Valoarea de adevăr a propoziției „ p echivalent cu q ” este ilustrată în tabelul de adevăr alăturat:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

EXEMPLU:

1. Se consideră propozițiile p : „ $8 : 4 = 2$ ” și q : „ $6 + 3 = 9$ ”.

Propoziția $p \leftrightarrow q$: „ $8 : 4 = 2$ echivalent cu $6 + 3 = 9$ ” este adevărată, deoarece ambele propoziții p și q sunt adevărate.

2. Se consideră propozițiile p : „ $3 + 3 = 9$ ” și q : „ $5 < 6$ ”. Propoziția $p \leftrightarrow q$: „ $3 + 3 = 9$ dacă și numai dacă $5 < 6$ ” este falsă, deoarece propozițiile nu au aceeași valoare de adevăr (propoziția p este falsă și propoziția q este adevărată).

B. Echivalența predicatelor

Se consideră predicatele $p(x)$ și $q(x)$, unde $x \in E$ și $E \neq \emptyset$.

Echivalența predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul „ $p(x)$ este echivalent cu $q(x)$ ” sau „ $p(x)$ dacă și numai dacă $q(x)$ ”, notat $p(x) \leftrightarrow q(x)$.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \leftrightarrow q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care predicatele $p(x)$ și $q(x)$ devin propoziții cu aceeași valoare de adevăr (sunt ambele adevărate sau ambele false).

EXEMPLU:

Se consideră predicatele $p(x)$: „ x este număr par”, $x \in \mathbb{N}$, și $q(x)$: „ $x : 2$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Echivalența predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul $p(x) \leftrightarrow q(x)$: „ x este număr par dacă și numai dacă $x : 2$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$, iar mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$ este $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$.

Dacă notăm cu A mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ și cu B mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$, atunci $A = B$.

În general, două predicate sunt echivalente dacă au aceeași mulțime de adevăr.

În calculul propozițional, cu litere (prin care se notează propoziții) și cu simbolurile operatorilor logici ($\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) se formează expresii numite **formule ale calculului propozițional**.

Două formule ale calculului propozițional α și β se numesc **echivalente** dacă, pentru orice valori de adevăr ale propozițiilor care le compun, au **aceeași valoare de adevăr**. Notăm acest lucru prin $\alpha \equiv \beta$.

EXEMPLU:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

O formulă a calculului propozițional care este adevărată, indiferent de valorile de adevăr ale propozițiilor care o compun, se numește **tautologie**.

EXEMPLU:

$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ este tautologie.

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

O formulă a calculului propozițional care este falsă, indiferent de valorile de adevăr ale propozițiilor care o compun, se numește **contradicție**.

Aplic

1. Scrie negațiile următoarelor propoziții:



- a) „Temperatura aerului este pozitivă.” e) „ $2 + 9 = 10$ ”
 b) „Îmi place matematica.” f) „Trenul are întârziere.”
 c) „ $122 = 144$ ” g) „ $2 < 5$ ”
 d) „ $\pi = 3,14$ ” h) „Un triunghi are 4 vârfuri.”

2. Verifică dacă următoarele propoziții compuse sunt adevărate:

- a) „Numărul natural 10 este par și este mai mare decât 8.”
 b) „ $10 < 11$ sau $10^2 = 20$ ”
 c) „Dacă $5 > 8$, atunci 7 este număr par.”
 d) „Dacă triunghiul are trei laturi, atunci pătratul are cinci vârfuri.”
 e) „ $\sqrt{2} \in \mathbb{N}$ dacă și numai dacă $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$.”
 f) „Numărul 121 este par sau este pătrat perfect.”

3. Se consideră următoarele propoziții: p : „5 este număr prim”, q : „2 este pătratul unui număr natural” și r : „ $2 + 2 = 5$ ”. Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor: $p \vee q$, $p \vee r$, $q \rightarrow p$, $r \leftrightarrow q$, $\neg p$, $p \wedge r$, $r \rightarrow p$, $p \leftrightarrow q$, $\neg q$.

4. Se consideră propozițiile: p_1 : „ $3,2 < 3,15$ ”; p_2 : „ $\sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 3\sqrt{2} + \sqrt{12} = 0$ ”;
 p_3 : „ $(3 - 5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}) \cdot 2 = 5$ ”; p_4 : „ $\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{18} = 6$ ”; p_5 : „ $5,36 + 2,4 = 7,40$ ”.

Stabilește valoarea de adevăr a fiecărei propoziții:

- a) $\neg p_1$; d) $p_1 \rightarrow p_4$; g) $p_4 \leftrightarrow p_1$; j) $p_3 \vee p_5$;
 b) $\neg p_5$; e) $p_2 \rightarrow p_5$; h) $p_2 \wedge p_3$; k) $p_4 \vee p_2$;
 c) $p_1 \vee p_4$; f) $p_3 \leftrightarrow p_2$; i) $p_3 \wedge p_4$; l) $(\neg p_2) \vee (\neg p_3)$.

5. Se consideră predicatele $p(x)$: „ $2x - 6 < 3x + 1$ ”, $x \in \mathbb{R}$, și $q(x)$: „ $|x + 2| \leq 11$ ”, $x \in \mathbb{R}$. Determină mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \wedge q(x)$.

ȘTIAI CĂ...?



- **Tautologia** este o propoziție compusă care este adevărată, pentru orice valori de adevăr ale propozițiilor componente.
- **Contradicția logică** este o propoziție compusă care este falsă, pentru orice valori de adevăr ale propozițiilor componente.

EXERSEAZĂ!

Se dau propozițiile:

p : „Vremea este frumoasă.” și
 q : „Mergem în parc.”

- a) Scrie următoarele propoziții:



$p \wedge q$, $p \rightarrow q$, $(\neg p) \wedge q$,
 $\neg(p \vee q)$, $q \leftrightarrow p$,
 $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$.

- b) Scrie următoarele enunțuri folosind literele p , q și operatorii logici.

• Vremea este frumoasă, dar nu mergem în parc.

• Dacă nu mergem în parc, înseamnă că vremea nu este frumoasă.



• Nu este adevărat că mergem în parc sau că vremea este frumoasă.

• Mergem în parc dacă și numai dacă vremea este frumoasă.

EXERSEAZĂ!

Fie propozițiile:

p : „Andrei învață la matematică.”

q : „Andrei este obosit.”

r : „Andrei primește o notă mare.”

i) Scrie următoarele propoziții:

$$q \rightarrow r;$$

$$p \wedge q;$$

$$\neg p;$$

$$\neg(p \vee q);$$

$$(\neg p) \vee (\neg q);$$

$$(r \wedge q) \rightarrow p;$$

$$(p \wedge q) \vee p.$$

ii) Scrie formulele de calcul propozițional corespunzătoare enunțurilor:

a) Andrei nu învață la matematică, dar primește o notă mare.

b) Dacă Andrei este obosit și nu învață la matematică, atunci nu primește o notă mare.

c) Nu este adevărat că Andrei este obosit sau nu învață la matematică.

d) Dacă Andrei învață la matematică, atunci primește o notă mare.

e) Andrei învață la matematică dacă și numai dacă nu este obosit.

6. Se consideră predicatele $p(x)$: „ $2(x - 3) - 4(x + 1) > -18$ ”, $x \in \mathbb{R}$, și $q(x)$: „ $3x - 9 \geq 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$. Determină mulțimile de adevăr ale predicatelor:

$$a) \neg p(x);$$

$$c) p(x) \wedge q(x);$$

$$e) p(x) \leftrightarrow q(x).$$

$$b) p(x) \vee q(x);$$

$$d) p(x) \rightarrow q(x);$$

7. Se consideră predicatele $p(x, y)$: „ $2x + y = 6$ ”, $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și $q(x, y)$: „ $3x + y = 8$ ”, $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determină mulțimile de adevăr ale predicatelor:

$$a) p(x, y) \vee q(x, y);$$

$$c) q(x, y) \rightarrow p(x, y);$$

$$b) p(x, y) \rightarrow q(x, y);$$

$$d) p(x, y) \leftrightarrow q(x, y).$$

8. Folosind propozițiile p : „12 este număr impar”, q : „ $3 + 4 = 7$ ” și r : „7 divide 12”, scrie în caiet câte două propoziții cu fiecare dintre operatorii logici „nu”, „sau”, „și”, „implică”, „echivalent”. Precizează valorile de adevăr ale acestora.

9. Se consideră predicatele $p(x)$: „ $x - 1 \leq 10$ ”, $x \in \mathbb{R}$, și $q(x)$: „ $2x - 3 > 5$ ”, $x \in \mathbb{R}$. Determină mulțimea de adevăr a fiecărui predicat: $\neg p(x)$, $p(x) \vee q(x)$, $p(x) \wedge q(x)$.

10. Se consideră predicatele $p(x)$: „ $x - 1 = 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$, și $q(x)$: „ $x^2 - 1 = 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$.

a) Determină mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \rightarrow q(x)$.

b) Sunt predicatele $p(x)$ și $q(x)$ echivalente?

11. Identifică predicatele implicate în următoarele enunțuri, apoi scrie enunțurile folosind simboluri logice.

a) „Un număr natural este par dacă și numai dacă este divizibil cu 2.”

b) „Dacă un număr natural este multiplu de 4, atunci este număr par.”

c) „Un număr natural este divizibil cu 3 dacă și numai dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3.”

d) „Dacă un patrulater este romb, atunci laturile lui sunt congruente.”

12. Se consideră propoziția compusă „Dacă în triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 30^\circ$ și $\sphericalangle B = 70^\circ$, atunci $\sphericalangle C = 80^\circ$.”.

a) Identifică propozițiile simple care alcătuiesc propoziția dată și notează-le cu literele p , q și r .

b) Scrie propoziția compusă dată folosind literele p , q , r și operatori logici.

13. Fie p și q două propoziții simple. Realizează tabelul de adevăr pentru fiecare dintre următoarele propoziții compuse:

$$a) (p \vee q) \rightarrow p;$$

$$d) (\neg p \vee q) \rightarrow \neg p;$$

$$g) (p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \vee q);$$

$$b) q \rightarrow (p \wedge q);$$

$$e) \neg q \wedge (p \vee q);$$

$$h) (\neg p \vee q) \rightarrow \neg p.$$

$$c) (p \leftrightarrow q) \rightarrow q;$$

$$f) (p \wedge q) \rightarrow (p \vee q);$$

14. Demonstrează următoarele echivalențe cu ajutorul tabelelor de adevăr:

$$a) p \equiv \neg(\neg p);$$

$$c) p \rightarrow q \equiv (\neg q) \rightarrow (\neg p);$$

$$b) p \rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q;$$

$$d) p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

15. Arată că următoarele formule ale calculului propozițional sunt tautologii:

$$a) p \rightarrow (p \vee q);$$

$$c) (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p);$$

$$e) [(p \vee q) \vee r] \leftrightarrow [p \vee (q \vee r)];$$

$$b) (p \wedge q) \rightarrow p;$$

$$d) (p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p);$$

$$f) [(p \wedge q) \wedge r] \leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)].$$

1.3. Cuantificatorul existențial și cuantificatorul universal

Descopăr



1. Într-o clasă sunt 28 de elevi. Se consideră propozițiile p : „Toți elevii sunt prezenți.” și q : „Există un elev absent.”. Pot fi adevărate simultan cele două propoziții?
2. Care dintre propozițiile p : „Pentru orice număr natural x , $x + 1 > x$.” și q : „Există un număr natural x pentru care $x + 1 = x$.” este adevărată?
3. Care dintre propozițiile p : „Orice număr par este divizibil cu 2.”, q : „Există un număr natural divizibil cu 7.” și r : „Orice număr natural este divizibil cu 7.” sunt adevărate?



Învăț

Cuantificatorul universal

Se consideră $p(x)$ un predicat unar, unde $x \in E$ și $E \neq \emptyset$.

Propoziția „Oricare ar fi $x \in E$ are loc $p(x)$.”, notată $(\forall x) p(x)$, se numește propoziție universală asociată predicatului $p(x)$.

Cuantificatorul „**oricare ar fi**” sau „**pentru oricare**” se numește **cuantificator universal** și se notează cu simbolul „ $\forall$ ”.

Propoziția $(\forall x) p(x)$ este adevărată, dacă pentru orice $x \in E$, propoziția $p(x)$ este adevărată.

Propoziția $(\forall x) p(x)$ este falsă dacă există cel puțin un element $x_0 \in E$ pentru care propoziția $p(x_0)$ este falsă.

EXAMPLE:

1. Fie predicatul $p(x)$: „ $x^2 + 3 > 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$.

Propoziția $(\forall x) p(x)$: „Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 3 > 0$.” este adevărată.

2. Fie predicatul $p(x)$: „ $x^2 - 5 \leq 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$.

Propoziția $(\forall x) p(x)$: „Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 5 \leq 0$.” este falsă, deoarece există $x_0 = 3$ pentru care propoziția $p(3)$: „ $3^2 - 5 \leq 0$ ” este falsă.

Cuantificatorul existențial

Fie $p(x)$ un predicat unar, unde $x \in E$ și $E \neq \emptyset$.

Propoziția „Există cel puțin un x în E astfel încât are loc $p(x)$.”, notată $(\exists x) p(x)$, se numește propoziție existențială asociată predicatului $p(x)$.

Cuantificatorul „**există**” se numește **cuantificator existențial** și se notează cu simbolul „ $\exists$ ”.

Propoziția $(\exists x) p(x)$ este adevărată dacă există cel puțin o valoare $x_0 \in E$ pentru care $p(x_0)$ este propoziție adevărată.

Propoziția $(\exists x) p(x)$ este falsă dacă, pentru orice $x \in E$, propoziția $p(x)$ este falsă.

EXERSEAZĂ!

1. Precizează valoarea de adevăr a fiecărei propoziții:

- a) $(\forall x)(\forall y)(x \cdot y = 0)$,
 $x, y \in \mathbb{R}$;
 b) $(\forall x)(\exists y)(x \cdot y = 0)$,
 $x, y \in \mathbb{R}$;
 c) $(\exists x)(\forall y)(x \cdot y = 0)$,
 $x, y \in \mathbb{R}$;
 d) $(\exists x)(\exists y)(x \cdot y = 0)$,
 $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Fie $E \neq \emptyset$, $F \neq \emptyset$.

Scrie câte o propoziție adevărată și una falsă pentru fiecare structură:

- a) $(\forall x)(\forall y)p(x, y)$,
 $x \in E, y \in F$;
 b) $(\forall x)(\exists y)p(x, y)$,
 $x \in E, y \in F$;
 c) $(\exists x)(\forall y)p(x, y)$,
 $x \in E, y \in F$;
 d) $(\exists x)(\exists y)p(x, y)$,
 $x \in E, y \in F$.

INDICAȚII PENTRU REALIZAREA PORTOFOLIULUI

Pregătește o mapă de dimensiunea A4 în care să adaugi fișele de lucru realizate de tine pe parcursul anului școlar.

Fiecare fișă va avea un titlu adecvat, va fi rezultatul activității și al documentării tale individuale și poate fi prezentată în fața clasei.

EXEMPLE:

1. Fie predicatul $p(x)$: „ $x^2 - 4 < 0$ ”, $x \in \mathbb{Z}$.

Propoziția $(\exists x)p(x)$: „Există $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x^2 - 4 < 0$ ” este adevărată, deoarece există $x_0 = 1$ pentru care propoziția $p(1)$: „ $1^2 - 4 < 0$ ” este adevărată.

2. Fie predicatul $p(x)$: „ $x^2 < 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$.

Propoziția $(\exists x)p(x)$: „Există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2 < 0$ ” este falsă, deoarece nu există niciun număr real x_0 astfel încât $x_0^2 < 0$.

OBSERVAȚIE.

Dacă predicatul are mai multe variabile, atunci se pot forma propoziții utilizând fie numai cuantificatorul universal „ $\forall$ ”, fie numai cuantificatorul existențial „ $\exists$ ”, dar și combinații ale ambilor cuantificatori. De exemplu, pentru **predicatul binar $p(x, y)$** , putem alcătui următoarele propoziții folosind cuantificatorii:

- $(\forall x)(\forall y)p(x, y)$; • $(\forall x)(\exists y)p(x, y)$;
- $(\exists x)(\exists y)p(x, y)$; • $(\exists x)(\forall y)p(x, y)$.

Exercițiu rezolvat

Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor următoare:

- a) $(\forall x)(x + 1 > x)$, unde $x \in \mathbb{N}$; c) $(\forall x)(\exists y)(y = x + 2)$, unde $x, y \in \mathbb{N}$;
 b) $(\exists x)(x - 3 = 0)$, unde $x \in \mathbb{Z}$; d) $(\exists x)(x < 0)$, unde $x \in \mathbb{N}$.

Rezolvare:

a) Rezolvăm în $\mathbb{N}$ inecuația $x + 1 > x$ și obținem $1 > 0$, ceea ce este adevărat. Așadar, $x + 1 > x$ pentru orice număr natural x , de unde rezultă că propoziția este adevărată.

b) Rezolvăm în $\mathbb{Z}$ ecuația $x - 3 = 0$ și obținem $x = 3$. Deci, există $x_0 = 3 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x_0 - 3 = 0$, prin urmare propoziția este adevărată.

c) $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 2 \in \mathbb{N} \Rightarrow (\exists y) \in \mathbb{N}, y = x + 2 \Rightarrow$ Propoziția este adevărată.

d) Cum orice număr natural este mai mare sau egal cu 0, propoziția este falsă.

Portofoliu

Logica în viața cotidiană

Logica este prezentă în viața de zi cu zi, chiar dacă nu ne dăm seama. De fiecare dată când luăm o decizie sau respectăm o regulă, folosim operații logice. De exemplu, când spui „dacă învâț, iau notă bună”, folosești implicația. Astfel, logica ne ajută să gândim corect și să luăm decizii mai bune.

1. Pentru fiecare operație logică, scrie definiția, formularea cu ajutorul simbolurilor și două exemple (unul cu propoziții și unul cu predicate).
2. Descrie o situație reală din viața ta (la școală, în familie, cu prietenii) în care să folosești cel puțin trei operații logice.
3. Creează o bandă desenată (trei-șase cadre) în care să folosești cel puțin trei operații logice.

Aplic

- Stabilește valorile de adevăr ale următoarelor propoziții: 
 - „Există substanțe care nu se dizolvă în apă.”
 - „Toți oamenii au nevoie de apă pentru a trăi.”
 - „Există o persoană care îi cunoaște pe toți oamenii.”
 - „Toți oamenii folosesc internetul.”
 - „Fiecare pacient are un medic.”
- Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor următoare:
 - $(\exists x)(2x - 3 = 7), x \in \mathbb{R};$
 - $(\exists x)(4x + 5 = 3), x \in \mathbb{Z};$
 - $(\forall x)(6 - 2x \neq 2), x \in \mathbb{N};$
 - $(\forall x)(5 - 2x > 2 + x), x \in \mathbb{N};$
 - $(\exists x)(5x + 3 < 2(x + 4)), x \in \mathbb{R};$
 - $(\exists x)(1 - x \geq -2(x - 1)), x \in \mathbb{Z}.$
- Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor următoare:
 - $(\forall x)(\exists y)(y \geq x), x, y \in \mathbb{N};$
 - $(\exists x)(\forall y)(x \geq y), x, y \in \mathbb{R};$
 - $(\forall x)(\exists y)(y = x - 1), x, y \in \mathbb{N};$
 - $(\forall x)(\exists y)(x = 2y \text{ sau } x = 2y + 1), x, y \in \mathbb{N};$
 - $(\exists x)(\forall y)(xy = y), x, y \in \mathbb{Z};$
 - $(\forall x)(\exists y)(xy = y), x, y \in \mathbb{Z}.$
 - $(\exists x)(\forall y)(y = x - 1), x, y \in \mathbb{N};$
- Scrie propozițiile următoare folosind cuantificatori și precizează valorile de adevăr ale acestora:
 - „Pentru orice număr întreg, există un număr întreg mai mare decât el.”
 - „Pentru orice număr real x , există un număr real y astfel încât $x + y = 1$.”
 - „Există un număr natural care este multiplu de 4 și multiplu de 6.”
 - „Pentru orice număr natural, există un număr natural mai mare decât dublul său.”
 - „Pentru orice număr real x , există un număr real y astfel încât $y^2 = x^2$.”
 - „Oricare ar fi numerele reale x și y , $x^2 + 1 + y^2 > 0$.”
 - „Oricare ar fi numărul natural x , există un număr natural y astfel încât $x : y$.”
 - „Există numere naturale x și y astfel încât $x + 2y = 3$ și $2x - 3y = -1$.”
 - „Există un număr real x astfel încât $x \cdot y = 0$, pentru orice număr real y .”
- Stabilește valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
 $(\forall x)(\forall y) p(x, y) \wedge q(x, y), (\exists x)(\exists y) p(x, y) \wedge q(x, y), (\forall x)(\forall y) p(x, y) \vee q(x, y),$
 $(\exists x)(\exists y) p(x, y) \vee q(x, y).$
 - $p(x, y)$: „ $3x - 2y + 5 = 0$ ”, $x, y \in \mathbb{R}$, și $q(x, y)$: „ $x + 4y = 5$ ”, $x, y \in \mathbb{R};$
 - $p(x, y)$: „ $2x - 3y = 8$ ”, $x, y \in \mathbb{R}$, și $q(x, y)$: „ $-6x + 9y - 24 = 0$ ”, $x, y \in \mathbb{R};$
 - $p(x, y)$: „ $3x + y + 5 = 0$ ”, $x, y \in \mathbb{R}$, și $q(x, y)$: „ $6x + 2y = -10$ ”, $x, y \in \mathbb{R}.$
- Precizează valoarea de adevăr a fiecăreia dintre propozițiile următoare:
 - $(\forall x)(\forall y)(x + y = 0), x, y \in \mathbb{R};$
 - $(\exists x)(\forall y)(x + y = 0), x, y \in \mathbb{R};$
 - $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0), x, y \in \mathbb{R};$
 - $(\exists x)(\exists y)(x + y = 0), x, y \in \mathbb{R}.$

ȘTIAI CĂ...?

Notăția actuală pentru cuantificatorii predicatelor se datorează în principal influențelor filosofului și logicianului

Bertrand Russell și a matematicianului **Giuseppe Peano**.

$\forall$ (cuantificatorul universal): un „A” inversat, derivat din cuvântul *All* sau *Alle* (toți/fiecare).

$\exists$ (cuantificatorul existențial): un „E” rotit, derivat din cuvântul *Exists* sau *Existiert* (există).



Bertrand Russell
(1872-1970)



Giuseppe Peano
(1858-1932)



1.4. Reguli de negare

Descopăr

Scrie negația fiecăreia dintre propozițiile următoare:

- | | |
|---|---|
| a) „ $\pi \in \mathbb{Q}$ ” | e) „Dacă plouă, atunci iau umbrela.” |
| b) „ $3 \geq 1$ ” | f) „12 este multiplu de 3, dacă și numai dacă 12 este multiplu de 4.” |
| c) „Astăzi plouă și este frig.” | g) „Toți elevii au rezolvat problema.” |
| d) „Triunghiul ABC este isoscel sau dreptunghic.” | h) „Există un număr natural divizibil cu 7.” |

Învăț

Din rezolvarea subpunctelor de la c) la f) ale exercițiului propus la secțiunea **Descopăr**, observăm că negarea unei propoziții compuse nu înseamnă doar adăugarea cuvântului „nu”, ci presupune modificarea operatorului logic al enunțului.

Regulile de negare ale propozițiilor compuse

Se consideră p și q propoziții simple. Atunci:

- Negația propoziției „ p și q ” ($p \wedge q$) este propoziția „non p sau non q ”, notată $(\neg p) \vee (\neg q)$.
- Negația propoziției „ p sau q ” ($p \vee q$) este propoziția „non p și non q ”, notată $(\neg p) \wedge (\neg q)$.
- Negația propoziției „ p implică q ” ($p \rightarrow q$) este propoziția „ p și non q ”, notată $p \wedge (\neg q)$.
- Negația propoziției „ p echivalent cu q ” ($p \leftrightarrow q$) este propoziția „(p și non q) sau (non p și q)”, notată $[p \wedge (\neg q)] \vee [(\neg p) \wedge q]$.

EXEMPLE:

1. Negația propoziției „Numărul 6 este par și este multiplu de 3.” este propoziția „Numărul 6 nu este par sau nu este multiplu de 3.”
2. Negația propoziției „Numărul 5 este par sau este număr prim.” este propoziția „Numărul 5 nu este par și nu este număr prim.”
3. Negația propoziției „Dacă 12 este multiplu de 4, atunci este număr par.” este propoziția „12 este multiplu de 4 și nu este număr par.”
4. Negația propoziției „ $2^3 = 8$ echivalent cu $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ” este propoziția „($2^3 = 8$ și $2 \cdot 2 \cdot 2 \neq 8$) sau ($2^3 \neq 8$ și $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$).”

OBSERVAȚIE.

Regulile de negare ale conjuncției și disjuncției se numesc **Legile lui De Morgan**, după matematicianul britanic Augustus De Morgan.



Augustus De Morgan (1806-1871)
matematician britanic,
considerat întemeietorul logicii formale

Regulile de negare ale propozițiilor universale și existențiale



Fie $p(x)$, unde $x \in E$, $E \neq \emptyset$, un predicat unar.

- **Negația propoziției „Oricare ar fi x din E are loc $p(x)$.” este propoziția „Există cel puțin un element x în E pentru care nu are loc $p(x)$.”**
- **Negația propoziției „Există cel puțin un x în E astfel încât are loc $p(x)$.” este propoziția „Oricare ar fi x din E , nu are loc $p(x)$.”**

EXEMPLE:

1. Negația propoziției „ $(\forall x) (x^2 \geq 0)$ ”, $x \in \mathbb{R}$, este „ $(\exists x) (x^2 < 0)$ ”, $x \in \mathbb{R}$.
2. Negația propoziției „ $(\exists x) (x^2 = 2)$ ”, $x \in \mathbb{R}$, este „ $(\forall x) (x^2 \neq 2)$ ”, $x \in \mathbb{R}$.

OBSERVAȚIE.

Regulile de negare formulate anterior se adaptează în mod corespunzător și pentru negarea propozițiilor obținute prin cuantificarea predicatelor care au n variabile. De exemplu, negația propoziției $(\forall x) (\exists y) p(x, y)$ poate fi formulată $(\exists x) [\neg((\exists y) p(x, y))]$ sau $(\exists x) (\forall y)(\neg p(x, y))$.

Aplic

1. Pentru fiecare dintre propozițiile compuse de mai jos, scrie propozițiile simple care o alcătuiesc și negația.
 - a) „Elevul a învățat și a rezolvat exercițiile.”
 - b) „12 este număr natural par sau impar.”
 - c) „Dacă un număr natural este divizibil cu 4, atunci este par.”
 - d) „Dacă un număr este multiplu de 6, atunci este multiplu de 2.”
 - e) „Triunghiul ABC este dreptunghic și are un unghi cu măsura egală cu 30° .”
 - f) „Numărul 16 este divizibil cu 2 și numărul 10 este divizibil cu 3.”
 - g) „Un triunghi este echilateral dacă și numai dacă toate unghiurile sale au măsurile egale cu 60° .”
 - h) „Un număr natural este prim dacă și numai dacă are exact doi divizori.”
2. Scrie negația fiecărei propoziții.
 - a) „Orice număr natural este mai mare sau egal cu 0.”
 - b) „Există un număr întreg care este multiplu de 3.”
 - c) „Pentru orice număr real x , dacă $x > 1$, atunci $x^2 > 1$.”
 - d) „Există un număr natural care este divizibil cu 4 și cu 6.”
 - e) „Toate numerele reale pozitive au inversul pozitiv.”
 - f) „Există un număr prim mai mare decât 50.”
 - g) „Pentru orice număr întreg x , dacă x este multiplu de 10, atunci este multiplu de 5.”
 - h) „Nu există un număr real al cărui pătrat să fie negativ.”
 - i) „Pentru orice număr real x și orice număr real y , $x + y \neq 0$.”
 - j) „Pentru orice număr real x , există un număr real y astfel încât $x^2 \cdot y > 0$.”
 - k) „Există un număr real x astfel încât $y > x$, pentru orice număr real y .”
 - l) „Există numerele reale x și y astfel încât $y^3 \leq 3^x$.”
 - m) „Toți elevii din clasă au manualul de matematică.”
 - n) „Toate magazinele sunt deschise duminică.”
 - o) „Există un autobuz care ajunge la timp în fiecare zi.”

JOC ÎN ECHIPE:



„Universalul sub atac”

Elevii se vor împărți în două echipe:

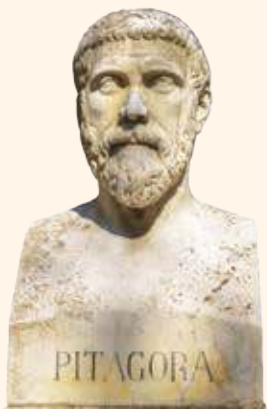
 **Echipa A:**
„Demolatorii” (neagă propozițiile date).

 **Echipa B:**
„Apărătorii” (susțin propozițiile date).

Demolatorii trebuie să găsească UN contraexemplu.

Apărătorii trebuie să arate că NU există excepții.

- a. Toate pătratele au perimetrul mai mare decât 10 cm.
- b. Există 6 luni ale anului care au 31 de zile.
- c. Numărul statelor membre ale Uniunii Europene care au euro ca monedă oficială este mai mic decât 27.
- d. Toate continentele sunt locuite.
- e. Toate echipele de fotbal au 11 jucători pe teren.
- f. Există monumente mai vechi de 3 000 de ani care sunt conservate și în prezent.
- g. Unele animale pot trăi atât în apă, cât și pe uscat.
- h. Toate telefoanele au tastatură fizică.
- i. Există țări care au mai multe capitale oficiale.



Pitagora (c. 570–495 î.H.)
filosof și matematician grec

ȘTIAI CĂ...?

Școala pitagoreică, fondată de **Pitagora** în secolul al VI-lea î.H., susținea că toate mărimile pot fi exprimate prin rapoarte de numere întregi, adică prin numere raționale. În acest context, pitagoreicii au studiat lungimea diagonalei unui pătrat de latură 1 (adică $\sqrt{2}$). Unul dintre discipoli a descoperit faptul că aceasta nu poate fi exprimată ca raport de numere întregi, deci este un număr irațional.

Surse antice îi atribuie această descoperire lui Hippasos din Metaponte, dar nu există dovezi istorice sigure. Se spune că rezultatul a fost ținut secret, deoarece contrazicea convingerile pitagoreice.

1.5. Reducere la absurd

Descopăr



1. Fie a, b și c trei numere reale, astfel încât $a + b + c < 12$. Demonstrează că cel puțin unul dintre numerele a, b sau c este mai mic decât 4.
2. Demonstrează că nu există niciun număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 5.
3. Fie propozițiile p și q . Demonstrează echivalența $p \rightarrow q \equiv (\neg q) \rightarrow (\neg p)$.

Învăț

Se consideră propozițiile p și q și echivalența $p \rightarrow q \equiv (\neg q) \rightarrow (\neg p)$.

Tabelul valorilor de adevăr este:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$(\neg q) \rightarrow (\neg p)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1

Folosind această echivalență, în loc să demonstrăm implicația $p \rightarrow q$, demonstrăm implicația $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$. Această metodă de demonstrație se numește **metoda reducerii la absurd**.

EXEMPLU:

Să demonstrăm că numărul natural 2 nu este pătratul niciunui număr rațional. Presupunem că numărul natural 2 este pătratul numărului rațional pozitiv a (altfel spus, $a^2 = 2$). Putem scrie $a = \frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și $(m, n) = 1$ (m și n sunt prime între ele).

Avem $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, de unde rezultă $\frac{m^2}{n^2} = 2$, deci $m^2 = 2 \cdot n^2$.

Cum $2 \cdot n^2 : 2$, obținem $m^2 : 2$, ceea ce implică $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ (m este număr par).

Înlocuind m cu $2k$ în relația $m^2 = 2 \cdot n^2$, obținem $4 \cdot k^2 = 2 \cdot n^2$, ceea ce implică $n^2 = 2 \cdot k^2$. De aici rezultă că n este un număr par.

Am obținut că m și n sunt numere naturale pare, deci 2 este un divizor comun al lor, ceea ce contrazice $(m, n) = 1$.

Această contradicție ne arată că presupunerea făcută (a număr rațional, $a^2 = 2$) este falsă.

Deci a nu este număr rațional.

Exerciții rezolvate

1. Dacă în n cutii se află m bomboane ($m > n$), atunci există cel puțin o cutie în care se află cel puțin două bomboane (**principiul lui Dirichlet**).

Rezolvare:

Presupunem că nu există nicio cutie în care să se afle cel puțin două bomboane, adică în fiecare cutie există cel mult o bomboană. Astfel, în cele n cutii vom avea cel mult n bomboane. Cum numărul de bomboane este m și $m > n$, am obținut o contradicție. Așadar, există cel puțin o cutie în care sunt cel puțin două bomboane.

2. La o reuniune, fiecare persoană prezintă dă mâna cu exact trei persoane. Arată că numărul participanților la reuniune este par.

Rezolvare:

Fie n numărul persoanelor participante la reuniune.

Presupunem că n este impar. Deoarece vor avea loc $3n$ strângeri de mână, rezultă că $3n$ este impar. Dar fiecare strângere este numărată de două ori, astfel că $3n$ trebuie să fie par, ceea ce este o contradicție. Așadar, presupunerea este falsă, deci la reuniune participă un număr par de persoane.

3. Demonstrează că există o infinitate de numere prime.

Rezolvare:

Presupunem că există un număr finit de numere prime. Fie $p_1, p_2, \dots, p_n$ toate numerele prime existente. Atunci numărul $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ nu este divizibil cu niciunul dintre numerele prime $p_1, p_2, \dots, p_n$. Deci N este număr prim sau este divizibil cu un alt număr prim diferit de $p_1, p_2, \dots, p_n$, ceea ce contrazice presupunerea făcută. Așadar, există o infinitate de numere prime.

Aplic

1. Demonstrează că numărul natural 3 nu este pătratul niciunui număr rațional.
2. Fie n un număr natural. Demonstrează că, dacă n^2 este impar, atunci n este impar.
3. Demonstrează că fracția $\frac{3n+8}{2n+5}$ este ireductibilă, pentru orice număr natural n .
4. Demonstrează că nu există numere naturale x și y astfel încât $x^2 - 2y^2 = 1$ și ambele numere, x și y , să fie pare.
5. Fie a, b, c și d numere reale. Arată că cel mai mic dintre numerele $a - b^2, b - c^2, c - d^2, d - a^2$ nu poate fi mai mare decât $\frac{1}{4}$.
6. Demonstrează că, pentru orice număr natural nenul n , numărul $12n + 1$ nu se poate scrie ca diferență a două numere prime.

Portofoliu

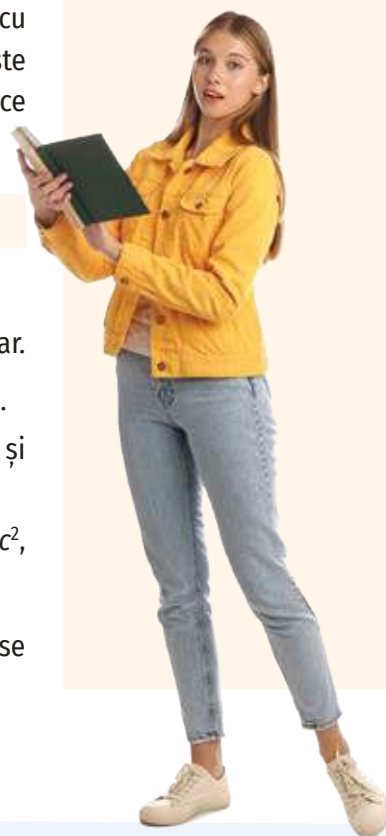
Rezolvă următoarea problemă, aplicând principiul lui Dirichlet.

La un seminar participă treisprezece persoane. Fiecare persoană cunoaște cel mult două limbi străine, iar oricare două persoane pot comunica într-o limbă străină comună. Demonstrează că există cel puțin șapte persoane care cunosc aceeași limbă.

ȘTIAI CĂ...?

Principiul lui Dirichlet
(Principiul cutiilor)

Se consideră k obiecte plasate în n cutii. Dacă $k > n$, adică sunt mai multe obiecte decât cutii, atunci există cel puțin o cutie care conține cel puțin două obiecte.



2. Metoda inducției matematice

Descopăr

1. Se consideră expresia $E(n) = n^2 + n + 17$, unde n este număr natural.
 - a) Arată că $E(0)$, $E(1)$, $E(2)$, $E(3)$ sunt numere prime.
 - b) Sunt $E(10)$ și $E(14)$ numere prime?
 - c) Pe baza observațiilor făcute prin rezolvarea subpunctelor a) și b), putem afirma că $E(n)$ este prim pentru orice număr natural n ?
 - d) Calculează $E(16)$. Ce observi?
2. Se consideră suma $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$, unde n este număr natural nenul.
 - a) Calculează sumele S_1 , S_2 , S_3 și S_4 . Ce observi?
 - b) Propune o formulă generală pentru calculul sumei S_n .
 - c) Cum poți demonstra că această formulă este valabilă și pentru calculul sumei S_{1000} , fără a efectua suma?

Învăț

Principiul inducției matematice

Dacă o propoziție $P(n)$, n fiind un număr natural, este adevărată pentru $n = 0$ și, din faptul că propoziția este adevărată pentru $n = k$ (k fiind un număr natural oarecare), rezultă că aceasta este adevărată și pentru numărul natural $n = k + 1$, atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n .

Din acest principiu derivă metoda de demonstrație numită **metoda inducției matematice**.

Fie $P(n)$ o propoziție care depinde de un număr natural $n \geq m$, m fiind un număr natural fixat.

Demonstrația prin metoda inducției matematice a propoziției $P(n)$ constă în două etape:

1. Se verifică faptul că propoziția $P(m)$ este adevărată.
2. Se presupune că propoziția $P(k)$ este adevărată și se demonstrează că propoziția $P(k + 1)$ este adevărată, k fiind un număr natural mai mare sau egal cu m .

Dacă ambele etape ale demonstrației sunt verificate, atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geq m$.

EXEMPLE:

1. $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$, pentru orice număr natural nenul n .

Fie propoziția $P(n)$: $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$, unde n este număr natural nenul.

– Verificăm faptul că propoziția $P(1)$ este adevărată:

$$P(1): 2 = 1(1 + 1) \Rightarrow P(1) \text{ este adevărată.}$$

– Demonstrăm $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

$P(k)$: $2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k(k+1)$, unde k este număr natural nenul;

$P(k+1)$: $2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k+1) = (k+1)(k+1+1)$, unde k este număr natural nenul;

$P(k+1)$: $2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$, unde k este număr natural nenul.

$$\underbrace{2 + 4 + 6 + \dots + 2k}_{k(k+1)} + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2) \Rightarrow P(k+1) \text{ este adevărată.}$$

Ambele etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sunt verificate, prin urmare propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n .

2. $7^n - 1$ este divizibil cu 6, pentru orice număr natural n .

Fie propoziția $P(n)$: $7^n - 1$ este divizibil cu 6, unde n este număr natural.

– Verificăm faptul că propoziția $P(0)$ este adevărată:

$P(0)$: $7^0 - 1$ este divizibil cu 6 $\Rightarrow P(0)$ este adevărată.

– Demonstrăm $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

$P(k)$: $7^k - 1$ este divizibil cu 6, unde k este număr natural;

$P(k+1)$: $7^{k+1} - 1$ este divizibil cu 6, unde k este număr natural;

$7^{k+1} - 1 = 7 \cdot 7^k - 7 + 6 = 7(7^k - 1) + 6$, unde k este număr natural.

Cum $7^k - 1$ este divizibil cu 6, rezultă că $7(7^k - 1) + 6$ este divizibil cu 6, deci propoziția $P(k+1)$ este adevărată.

Ambele etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sunt verificate, prin urmare propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n .

Exerciții rezolvate

- 1.** Calculează suma $S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, și apoi demonstrează că rezultatul obținut este corect, folosind metoda inducției matematice.

Rezolvare:

Observăm că forma generală a unui termen al sumei S este $\frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)}$, unde k este număr natural nenul.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2k+1) - (2k-1)}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(2k+1)}{(2k-1) \cdot (2k+1)} - \frac{(2k-1)}{(2k-1) \cdot (2k+1)} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right), \text{ pentru orice } \\ &\text{număr natural nenul } k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}, \text{ pentru } \\ &\text{orice număr natural nenul } n. \end{aligned}$$

Fie $P(n)$: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$, unde n este număr natural nenul.



ȘTIAI CĂ...?

• Întregul univers digital se bazează pe logica lui **George Boole**. El a înlocuit cuvintele „adevărat” și „fals” cu cifrele 1 și 0. Fără această simplificare, denumită **algebră booleană**, computerele și telefoanele mobile de astăzi nu ar fi putut exista.

• Matematicianul român **Grigore Moisil** este considerat „părintele informaticii” în România. Acesta a fost printre primii din lume care a folosit logica matematică pentru a explica funcționarea circuitelor electronice, demonstrând că matematica pură poate fi folosită pentru a construi mașini de calcul inteligente. Grigore Moisil este cel care a introdus informatica în școlile și universitățile din România, într-o vreme în care mulți considerau computerele doar niște curiozități ingineresti.

Demonstrăm că $P(n)$, unde n este număr natural nenul, este adevărată prin metoda inducției matematice.

– Verificăm faptul că propoziția $P(1)$ este adevărată:

$$P(1): \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} \Rightarrow P(1) \text{ este adevărată.}$$

– Demonstrăm $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

$$P(k): \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = \frac{k}{2k+1}, \text{ unde } k \text{ este număr natural nenul.}$$

$$P(k+1): \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} + \frac{1}{(2k+1) \cdot (2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}, \text{ unde } k \text{ este număr natural nenul;}$$

$$\underbrace{\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)}}_{\frac{k}{2k+1}} + \frac{1}{(2k+1) \cdot (2k+3)} =$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1) \cdot (2k+3)} = \frac{k(2k+3) + 1}{(2k+1) \cdot (2k+3)} = \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k+1) \cdot (2k+3)} =$$

$$= \frac{(2k+1) \cdot (k+1)}{(2k+1) \cdot (2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} \Rightarrow P(k+1) \text{ este adevărată.}$$

Ambele etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sunt verificate, prin urmare propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n .

2. Arată că $2^n > n^2$, pentru orice număr natural $n \geq 5$.

Rezolvare:

Fie $P(n): 2^n > n^2$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$.

– Verificăm că propoziția $P(5)$ este adevărată:

$$P(5): 2^5 > 5^2 \Rightarrow P(5) \text{ este adevărată.}$$

– Demonstrăm $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

$$P(k): 2^k > k^2, \text{ unde } k \in \mathbb{N}, k \geq 5;$$

$$P(k+1): 2^{k+1} > (k+1)^2, \text{ unde } k \in \mathbb{N}, k \geq 5.$$

Deoarece $2^k > k^2 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2 \Leftrightarrow 2^{k+1} > 2 \cdot k^2$, pentru a demonstra $2^{k+1} > (k+1)^2$ este suficient să demonstrăm că $2 \cdot k^2 > (k+1)^2$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 5$.

$$2 \cdot k^2 > (k+1)^2 \Leftrightarrow 2 \cdot k^2 > k^2 + 2k + 1 \Leftrightarrow k^2 - 2k - 1 > 0 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 > 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k-1)^2 > 2, \text{ adevărat pentru orice } k \in \mathbb{N}, k \geq 5.$$

Așadar, $2^{k+1} > 2 \cdot k^2 > (k+1)^2$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 5$, de unde rezultă că propoziția $P(k+1)$ este adevărată.

Ambele etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sunt verificate, prin urmare propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geq 5$.

Aplic

1. Folosind metoda inducției matematice, demonstrează că:

$$a) 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ pentru orice număr natural nenul } n;$$

$$b) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ pentru orice număr natural nenul } n;$$

$$c) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2, \text{ pentru orice număr natural nenul } n;$$

d) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, pentru orice număr natural nenul n ;

e) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n \cdot (3n+1) = n(n+1)^2$, pentru orice număr natural nenul n ;

f) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n ;

g) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$, pentru orice număr natural nenul n ;

h) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{3}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$, pentru orice număr natural nenul n ;

i) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$, pentru orice număr natural nenul n ;

j) $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$, pentru orice număr natural nenul n ;

k) $3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{33\dots3}_{n \text{ cifre de } 3} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$, pentru orice număr natural nenul n .

2. Demonstrează inegalitățile:

a) $3^n > 2n + 1$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$;

b) $2^n > (n+1)^2$, pentru orice număr natural $n \geq 6$;

c) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, pentru orice număr natural $n \geq 3$;

d) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$, pentru orice număr natural n ;

e) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 1 + \frac{n-1}{n}$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$;

f) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < n$, pentru orice număr natural $n \geq 2$.

3. Demonstrează că, pentru orice număr natural n , avem:

a) $n^3 + 5n : 6$;

d) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} : 17$;

b) $7^{2n} - 4^{2n} : 33$;

e) $2n^3 + 3n^2 + 7n : 6$;

c) $4^n + 15n - 1 : 9$;

f) $9^{n+1} - 8n - 9 : 16$.

4. Pentru n număr natural nenul, calculează și apoi demonstrează prin metoda inducției matematice că rezultatele obținute sunt corecte.

a) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

c) $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

d) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$, $n \in \mathbb{N}^*$;

e) $2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + \dots + (n+1) \cdot (n+4)$, $n \in \mathbb{N}^*$;

f) $1 + 2 \cdot (1+2) + 3 \cdot (1+2+3) + \dots + n \cdot (1+2+\dots+n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

ȘTIAI CĂ...?

- **Matematicianul Bertrand Russell** a descoperit o eroare logică celebră, numită „paradoxul lui Russell”, care a forțat savanții să rescrie bazele matematicii. El a arătat că logica are nevoie de reguli stricte pentru a nu intra în contradicție cu ea însăși.

- **David Hilbert**, unul dintre cei mai mari matematicieni, a crezut că matematica poate fi complet automatizată. Acesta a lansat provocarea ca orice problemă matematică să poată fi rezolvată printr-un set finit de pași logici, deschizând calea către inventarea algoritmilor.

- **Kurt Gödel** a demonstrat, spre uimirea tuturor, că logica are limite. El a dovedit matematic faptul că, în orice sistem complex, există adevăruri care pot fi intuite, dar care nu vor putea fi niciodată demonstrate prin calcul.

Exerciții recapitulative

1. Stabilește valoarea de adevăr a propoziției p .

a) p : „ $\sqrt{2}$ este număr rațional.”; b) p : „ $-1, (13) = -\frac{112}{99}$ ”; c) p : „ $\sqrt{2^2 + 3^2} = 5$ ”; d) p : „ $2^{-1} = -2$ ”.

2. Determină mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$.

a) $p(x)$: „ $|x - 2| + |4 - x^2| = 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$; b) $p(x)$: „ $3x^2 - 14x - 35 = 0$ ”, $x \in \mathbb{Z}$.

3. Fie propozițiile p : „196 este pătrat perfect.” și q : „Un triunghi echilateral cu latura egală cu 10 cm are aria mai mare decât 40 cm².”. Determină valorile de adevăr ale propozițiilor p , $p \vee q$, $p \rightarrow q$.

4. Stabilește corespondența între coloanele A și B, astfel încât fiecărei propoziții compuse din coloana A să-i corespundă notația adecvată din coloana B:

A	B
1. „ $15 > 8$ și $2 + 8 = 10$ ”	a. $p \leftrightarrow q$
2. „Dacă $[2,05] = 2$, atunci $\{2,05\} = 0,05$.”	b. $p \wedge q$
3. „ $\left +\frac{3}{7}\right = \frac{3}{7}$ dacă și numai dacă $\left -\frac{3}{7}\right = \frac{3}{7}$ ”	c. $p \rightarrow q$
4. „ $2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{5} = 10\sqrt{15}$ sau $-2 - 8 = -10$ ”	d. $p \vee q$
	e. $\neg p$

5. Se consideră predicatul $p(x, y)$: „ $x + 2y = 3$ ”, unde $x, y \in \mathbb{Z}$. Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor:

a) $p(1, 1)$; b) $p(1, 0)$; c) $(\exists x) p(x, -1)$; d) $(\forall x) (\exists y) p(x, y)$.

6. Precizează valorile de adevăr ale următoarelor propoziții compuse:

- a) „Dacă un număr este divizibil cu 12, atunci este divizibil cu 4.”
 b) „Dacă $3 + 4 = 10$, atunci Luna este un satelit al Pământului.”
 c) „3 este multiplu de 3 și 2 este multiplu de 4.”

7. Scrie negațiile propozițiilor următoare:

a) $(\forall x) \left(\frac{x}{x+1} \neq 1\right)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; c) $(\exists x) \left(\frac{1}{x} = x\right)$, $x \in \mathbb{R}^*$;
 b) $(\forall x) (x \text{ este par sau } x \text{ este impar})$, $x \in \mathbb{N}$; d) $(\exists x) (x^2 = 2)$, $x \in \mathbb{R}$.

8. Scrie negațiile propozițiilor următoare:

- a) „Printr-un punct exterior unei drepte trece o singură paralelă la acea dreaptă.”
 b) „Toate pătratele sunt dreptunghiuri.”
 c) „Dacă un număr este pătrat perfect, atunci este natural.”
 d) „Numărul 7 este prim și este impar.”
 e) „Cel puțin un număr întreg este negativ.”
 f) „8 este impar sau $4 > 2$.”
 g) „Un număr este multiplu de 6 dacă și numai dacă este multiplu de 3.”
 h) „Toți elevii care participă la olimpiade au medii peste 9.”
 i) „Există în bibliotecă o carte nouă, care nu este împrumutată.”
 j) „Toate produsele perisabile din magazin sunt la reducere.”
 k) „Niciun tren anulat nu sosește la timp.”
 l) „Există un locuitor al orașului care deține mașină, dar nu are permis de conducere.”



9. Se consideră predicatele $p_1(x)$: „ $x + 2 > 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$ și $p_2(x)$: „ $x - 1 \leq 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$. Determină mulțimile de adevăr ale predicatelor:
- a) $p_1(x)$; c) $p_1(x) \vee p_2(x)$; e) $(\neg p_1(x)) \wedge p_2(x)$;
 b) $p_2(x)$; d) $p_1(x) \wedge p_2(x)$; f) $p_1(x) \wedge (\neg p_2(x))$.
10. La ora de matematică, cei 28 de elevi ai unei clase participă la următorul joc: ies la tablă în ordine alfabetică și fiecare dintre ei scrie cu două numere mai mult decât a scris colegul care a ieșit la tablă înaintea lui. Primul elev a scris un număr.
- a) Câte numere a scris cel de-al 28-lea elev?
 b) Câte numere vor fi pe tablă după ce scrie numerele ultimul elev?
 c) Câte numere ar fi pe tablă după ce scrie ultimul elev, dacă în clasă ar fi n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) elevi?
 Demonstrează că rezultatul este corect folosind metoda inducției matematice.
11. Demonstrează că:
- a) $2 + 7 + 14 + \dots + (n^2 + 2n - 1) = \frac{n(2n^2 + 9n + 1)}{6}$, pentru orice număr natural nenul n ;
 b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$, pentru orice număr natural nenul n ;
 c) $1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < \frac{2n-1}{n}$, pentru orice număr natural $n > 3$;
 d) $\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, pentru orice număr natural $n \geq 2$;
 e) $\frac{1}{4n} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, pentru orice număr natural nenul n ;
 f) $(2^{n+1} \cdot 5^n + 7) : 9$, pentru orice număr natural nenul n ;
 g) $(21^{2n+1} - 23^n - 4^n) : 19$, pentru orice număr natural n ;
 h) $3^{2n+3} + 40n - 27 : 64$, pentru orice număr natural nenul n .
12. Fie n un număr natural, $n \geq 3$. Demonstrează că oricare ar fi n puncte în plan, astfel încât oricare 3 puncte să fie necoliniare, se pot construi $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ triunghiuri având vârfurile în aceste puncte.

Portofoliu

Bucula memoriei

Ești în ziua 40 a show-ului *Survival Genesis*. Te afli pe o insulă vulcanică, izolată, din Pacificul de Sud, iar tribul tău „Phoenix” este la limita epuizării. Ca șef de trib, porți pe umeri responsabilitatea întregii echipe: dacă nu ajungeți la punctul de extracție înainte de apus, sunteți eliminați din competiție.

În fața ta, jungla se desparte în două poteci identice. În mijlocul lor stă Păstrătorul Timpului, un localnic care cunoaște insula ca pe propria palmă. Însă producătorii au adăugat o regulă: acest om spune într-o zi adevărul, iar în următoarea zi minte. Nu ai nicio metodă electronică de a verifica în ce zi te afli, iar ceasul tău biometric indică faptul că mai ai doar două minute pentru a decide.

a) Formulează o singură întrebare pe care să i-o adresezi Păstrătorului Timpului, astfel încât, indiferent dacă astăzi el spune adevărul sau minte, să poți deduce cu certitudine, în funcție de răspunsul lui, care este drumul spre salvare.

b) Creează propria versiune a jocului „Bucula memoriei” cu trei personaje: unul care spune adevărul, unul care minte și unul care răspunde la întâmplare. Scrie setul minim de întrebări pe care le folosești pentru a-l identifica pe cel care spune adevărul.

Timp de lucru: 45 de minute

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I

30 de puncte

30 de puncte

1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.

(10 p.) A. Dintre enunțurile următoare, cel care este propoziție în sensul logicii matematice este:

a) „ $x + 5 = 12$ ”, $x \in \mathbb{R}$ c) „Ai făcut tema?”

b) „Închide geamul!” d) „7 este multiplu al lui 3.”

(10 p.) B. Disjuncția propozițiilor simple p și q este propoziția:

a) $p \wedge q$; b) $p \vee q$; c) $p \leftrightarrow q$; d) $p \rightarrow q$.

(10 p.) C. Dintre propozițiile de mai jos, cea adevărată este:

a) „8 este număr impar.” c) „Toate numerele întregi sunt pozitive.”

b) „ $3 > 10$ ” d) „Există un număr natural mai mare decât 9.”

Subiectul al II-lea

60 de puncte

Scrie rezolvările complete.

10 puncte	1. Determină mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$: „ $2(x - 1) + 3x = x - 3(x + 2)$ ”, $x \in \mathbb{R}$.
20 de puncte (10 p.) (10 p.)	2. Scrie negațiile următoarelor propoziții: a) $(\forall x) (x \text{ este par sau } x \text{ este impar}), x \in \mathbb{N}$; b) $(\exists x) (x^2 = -4), x \in \mathbb{Z}$.
10 puncte (4 p.) (6 p.)	3. Se consideră propoziția p : „Un număr este multiplu de 6 dacă și numai dacă este multiplu de 3”. a) Scrie propozițiile simple care compun propoziția p . b) Determină valoarea de adevăr a propoziției p .
10 puncte	4. Stabilește dacă propoziția următoare este adevărată sau falsă: $(\forall x) (\exists y) (x^2 - 4x + 4 > y)$, unde $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}$.
10 puncte	5. Demonstrează că $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$, pentru orice număr natural nenul n .

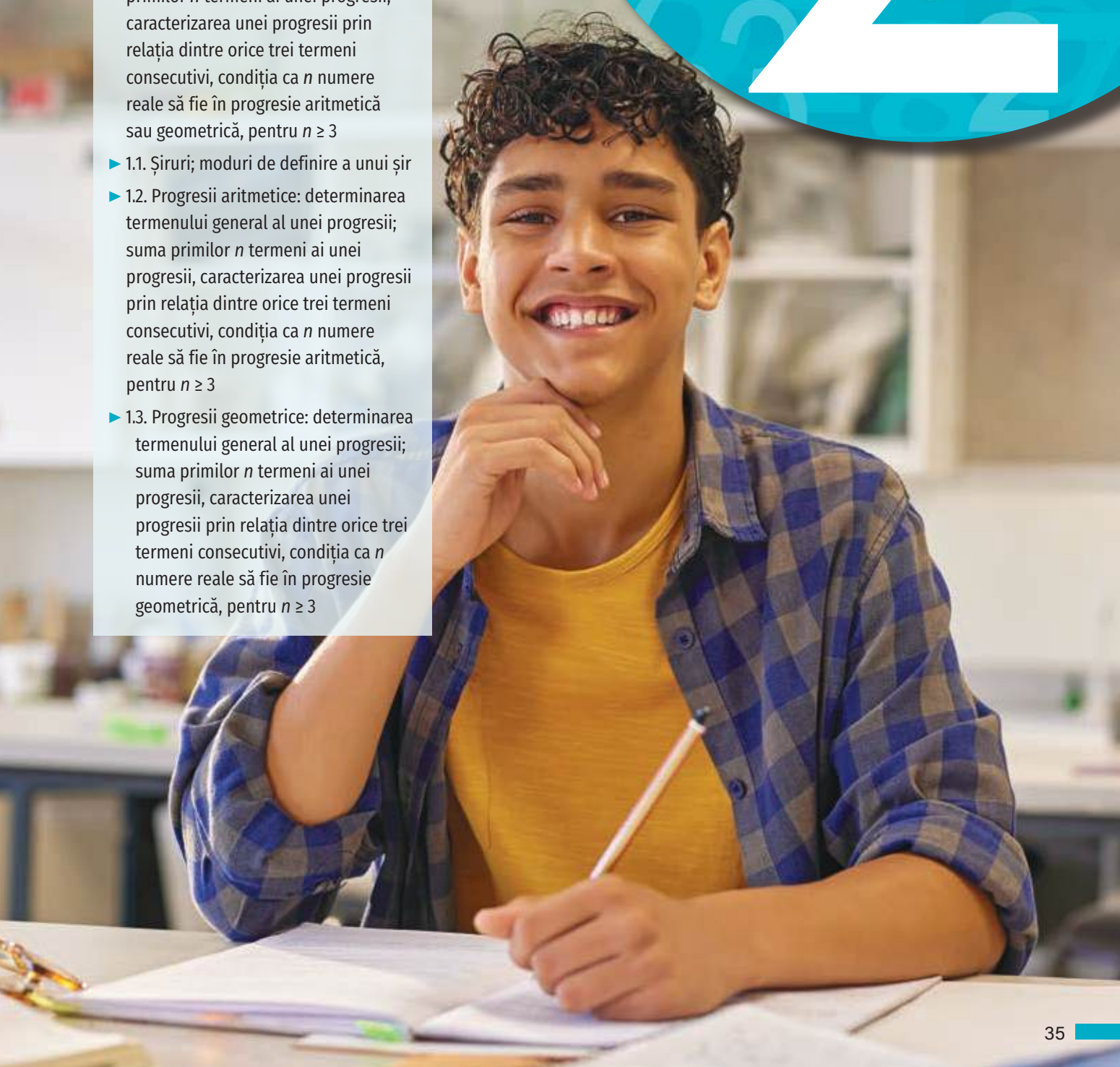
Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din această unitate.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	5 foarte bine	4 bine	3 mediu	2 slab	1 foarte slab
Mi-a fost ușor să rezolv exercițiile.					
Am înțeles criteriile de rezolvare.					
Mi-am amintit conținuturile învățate.					

Șiruri și progresii

- ▶ 1. Șiruri; moduri de definire a unui șir. Progresii aritmetice și progresii geometrice: determinarea termenului general al unei progresii; suma primilor n termeni ai unei progresii, caracterizarea unei progresii prin relația dintre orice trei termeni consecutivi, condiția ca n numere reale să fie în progresie aritmetică sau geometrică, pentru $n \geq 3$
- ▶ 1.1. Șiruri; moduri de definire a unui șir
- ▶ 1.2. Progresii aritmetice: determinarea termenului general al unei progresii; suma primilor n termeni ai unei progresii, caracterizarea unei progresii prin relația dintre orice trei termeni consecutivi, condiția ca n numere reale să fie în progresie aritmetică, pentru $n \geq 3$
- ▶ 1.3. Progresii geometrice: determinarea termenului general al unei progresii; suma primilor n termeni ai unei progresii, caracterizarea unei progresii prin relația dintre orice trei termeni consecutivi, condiția ca n numere reale să fie în progresie geometrică, pentru $n \geq 3$



1.1. Șiruri; moduri de definire a unui șir

Descopăr 

1. Se consideră succesiunea de numere naturale: 1, 8, 27, 64,
 - a) Completează succesiunea cu următorii trei termeni.
 - b) Scrie o formulă care face legătura între locul pe care îl ocupă fiecare termen în succesiune și valoarea lui.
 - c) Ce loc ocupă în succesiune numărul 512?
 - d) Este numărul 1 000 termen al succesiunii?
2. Un antreprenor decide să vândă online tablete grafice destinate designerilor. În prima zi după lansarea site-ului vinde 2 tablete, iar în a doua zi vinde 3 tablete. După ce investește într-o campanie de promovare pe rețelele de socializare și analizează vânzările zilnice, observă un tipar interesant: începând cu a treia zi, numărul de tablete vândute zilnic este egal cu suma vânzărilor din cele două zile precedente, la care se adaugă încă o tabletă.
 - a) Determină numărul de tablete vândute în ziua a treia, a patra și în cea de-a cincea zi.
 - b) Scrie o relație prin care să exprimi numărul de tablete vândute în ziua n în funcție de numărul celor vândute în zilele anterioare.

Învăț

În mod obișnuit, prin șir de numere reale înțelegem o infinitate de numere reale, distincte sau nu, scrise unul după altul, fiecare având un loc bine determinat.

EXEMPLE:

1. 1, 2, 3, 4, 5, ... (șirul numerelor naturale nenule);
2. 1, 4, 9, 16, ... (șirul pătratelor numerelor naturale nenule);
3. -1, 1, -1, 1, ... (șirul puterilor cu exponent natural nenul ale lui -1);
4. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ (șirul inverselor numerelor naturale nenule).

OBSERVAȚII.

1. Un șir de numere nu este o mulțime de numere.
2. Într-un șir, fiecare element are un loc bine stabilit.

În general, un șir se scrie $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sau $(a_n)_n$ sau (a_n) . În locul literei a se poate folosi orice altă literă, de exemplu $(b_n)_n, (c_n)_n$ etc.

În scrierea $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ indicele arată poziția sau **rangul unui termen** în șir astfel: a_1 este primul termen, a_2 este al doilea termen, ..., **a_n este al n -lea termen sau termenul de rang n .**

ȘTIAI CĂ...?



Leonardo Fibonacci (aprox. 1170-1250) este considerat unul dintre cei mai talentați matematicieni occidentali ai Evului Mediu. S-a născut în Pisa, dar a călătorit mult în Africa de Nord (Bugia, în prezent în Algeria), unde tatăl său era reprezentantul negustorilor. Acolo a învățat despre sistemul de numerație indo-arab (cifrele 0-9). În anul 1202, a publicat lucrarea *Liber Abaci* (Cartea calculelor), prin care a introdus acest sistem în Europa, înlocuind cifrele romane, care erau extrem de greu de folosit în calcule complexe.

Exerciții rezolvate



1. Scrie următorii trei termeni ai șirului: 1, 3, 7, 15,

Rezolvare:

Observăm că: $a_1 = 2^1 - 1$, $a_2 = 2^2 - 1$, $a_3 = 2^3 - 1$, $a_4 = 2^4 - 1$, de unde deducem că $a_n = 2^n - 1$. Atunci, $a_5 = 2^5 - 1 = 31$, $a_6 = 2^6 - 1 = 63$ și $a_7 = 2^7 - 1 = 127$.

2. Se consideră șirul $(a_n)_n$, unde a_n reprezintă restul împărțirii lui n la 5. Determină termenii a_8 , a_{42} și a_{2026} .

Rezolvare:

a_8 este restul împărțirii lui 8 la 5 $\Rightarrow a_8 = 3$;

a_{42} este restul împărțirii lui 42 la 5 $\Rightarrow a_{42} = 2$;

a_{2026} este restul împărțirii lui 2 026 la 5 $\Rightarrow a_{2026} = 1$.

3. Verifică dacă numărul real 57 este termen al șirului $(a_n)_n$ definit prin $a_n = n^2 + n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare:

57 este termen al șirului $(a_n)_n \Leftrightarrow$ Ecuația $a_n = 57$ are soluții în $\mathbb{N}^*$.

Rezolvând ecuația $a_n = 57$, obținem $n \in \{-8, 7\}$. Deoarece $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă $n = 7$, deci 57 este termen al șirului (este termenul de rang 7).

4. Se consideră șirul $(a_n)_n$ cu $a_1 = \frac{1}{2}$ și $a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determină termenii a_2 și a_3 .

b) Exprimă termenul a_n în funcție de a_{n-2} , pentru $n \geq 3$.

Rezolvare:

a) Pentru $n = 1$ obținem $a_2 = \frac{2a_1 + 1}{a_1 + 2}$, de unde rezultă $a_2 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{4}{5}$.

Pentru $n = 2$ obținem $a_3 = \frac{2a_2 + 1}{a_2 + 2}$, de unde rezultă $a_3 = \frac{2 \cdot \frac{4}{5} + 1}{\frac{4}{5} + 2} = \frac{13}{14}$.

$$b) a_n = \frac{2a_{n-1} + 1}{a_{n-1} + 2} = \frac{2 \cdot \frac{2a_{n-2} + 1}{a_{n-2} + 2} + 1}{\frac{2a_{n-2} + 1}{a_{n-2} + 2} + 2} = \frac{\frac{4a_{n-2} + 2 + a_{n-2} + 2}{a_{n-2} + 2}}{\frac{2a_{n-2} + 1 + 2a_{n-2} + 4}{a_{n-2} + 2}} = \frac{5a_{n-2} + 4}{4a_{n-2} + 5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{5a_{n-2} + 4}{4a_{n-2} + 5}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3.$$

5. Fie șirul $(a_n)_n$ cu $a_1 = \frac{1}{2}$ și $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determină termenii a_2 , a_3 și a_4 .

b) Determină formula termenului general al șirului $(a_n)_n$ și demonstrează prin metoda inducției matematice că aceasta este corectă.

Rezolvare:

a) Pentru $n = 1$ avem $a_2 = a_1 + \frac{1}{(1+1)(1+2)}$, de unde rezultă $a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Pentru $n = 2$ avem $a_3 = a_2 + \frac{1}{(2+1)(2+2)}$, de unde rezultă $a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Pentru $n = 3$ avem $a_4 = a_3 + \frac{1}{(3+1)(3+2)}$, de unde rezultă $a_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$.

b) Din ipoteză și din punctul a), știm că $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{3}{4}$ și $a_4 = \frac{4}{5}$, deci putem deduce că $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrăm prin metoda inducției matematice că $a_n = \frac{n}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n .

Fie $P(n)$: $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

– Verificăm faptul că propoziția $P(1)$ este adevărată:

$P(1)$: $a_1 = \frac{1}{1+1} \Rightarrow P(1)$ este adevărată.

– Demonstrăm $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

$P(k)$: $a_k = \frac{k}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}^*$

$P(k+1)$: $a_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$, $k \in \mathbb{N}^*$

$a_{k+1} = a_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$,
 $\forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow P(k+1)$ este adevărată.

Ambele etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sunt verificate, prin urmare propoziția $P(n)$ este adevărată, pentru orice număr natural nenul n .

Aplic



1. Completează șirurile cu următorii trei termeni:

- | | |
|---------------------------|--|
| a) 7, 77, 777, 7777 ... ; | d) $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{17}, \dots$; |
| b) 7, 14, 21, 28, ... ; | e) 0, -3, -8, -15, ... ; |
| c) 3, 6, 12, 24, ... ; | f) 1, 122, 122333, 1223334444, |

2. Scrie formula termenului general pentru fiecare dintre șirurile următoare:

- | | |
|--|--|
| a) -2, 4, -8, 16, ... ; | d) 1, 5, 9, 13, 17, ... ; |
| b) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \dots$; | e) $\frac{1^2}{1 \cdot 3}, \frac{2^2}{3 \cdot 5}, \frac{3^2}{5 \cdot 7}, \frac{4^2}{7 \cdot 8}, \dots$. |
| c) 0, 3, 8, 15, 24, ... ; | |

3. Determină primii cinci termeni ai șirului $(a_n)_n$.

- a) $a_n = \frac{n^2 - 1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
 b) $a_n = \frac{2^n - 1}{2n - 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
 c) $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
 d) $a_n = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
 e) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
 f) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ și $x_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{a_n a_{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
 g) $a_1 = 2$ și $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Se consideră șirul $(x_n)_n$ cu termenul general $x_n = \frac{3n+5}{2n-1}$, $n \geq 1$. Precizează care dintre numerele 2, 5 și $\frac{32}{17}$ sunt termeni ai șirului $(x_n)_n$.

ȘTIAI CĂ...?



Șirul lui Fibonacci

este unul dintre cele mai captivante subiecte din matematică, deoarece face legătura între matematică, biologie, artă și chiar economie. În *Liber Abaci*, Fibonacci a prezentat o problemă ipotetică privind reproducerea iepurilor:

- există o pereche de iepuri nou-născuți într-un câmp;
- iepurii pot procrea la vârsta de o lună;
- la sfârșitul fiecărei luni, o pereche fertilă dă naștere unei noi perechi, iar iepurii nu mor niciodată.

Numărul de perechi la finalul fiecărei luni urmează exact șirul:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...

Folosind valorile termenilor din șirul lui Fibonacci, se poate construi *Spirala de aur* (trasând arce de cerc în pătrate cu lungimile laturilor egale cu valorile termenilor din șir), considerată perfectă din punct de vedere estetic.

ȘTIAI CĂ...?

În studiul șirului lui Fibonacci, există numeroase relații remarcabile între termenii săi. Una dintre cele mai cunoscute este **identitatea lui Cassini**, formulată în anul 1680 de astronomul Gian Domenico Cassini.

Se consideră $(F_n)_{n \geq 0}$ șirul lui Fibonacci, definit prin relația de recurență:

- $F_0 = 0$,
- $F_1 = 1$,
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, pentru orice $n \geq 2$.

Identitatea lui Cassini afirmă că, pentru orice număr natural $n \geq 1$, produsul vecinilor unui termen din șirul lui Fibonacci diferă de pătratul aceluși termen cu exact 1 sau -1 :
 $F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

POT MAI MULT

Fie șirul $(a_n)_n$ cu $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Determină primii cinci termeni ai șirului $(a_n)_n$.
- b) Determină formula termenului general al șirului $(a_n)_n$ și demonstrează prin metoda inducției matematice faptul că aceasta este corectă.

5. Se consideră șirul $(a_n)_n$ cu termenul general $a_n = n^2 - n + 1$, $n \geq 1$. Precizează care dintre numerele 2, 7 și 91 este termen al șirului $(a_n)_n$.
6. Fie șirul $(a_n)_n$ definit prin $a_1 = p$, $p \in \mathbb{N}$, și $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}$, $n \geq 1$.
 - a) Determină termenul general al șirului $(a_n)_n$.
 - b) Determină cardinalul mulțimii $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}^*, n \leq 100\} \cap \{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$, pentru $a_1 = 2$.
 - c) Determină a_1 , știind că mulțimea $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}^*, n \leq 100\} \cap \{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ are 95 de elemente.
7. Se consideră șirul $(f_n)_n$, unde $f_1 = f_2 = 1$ și $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ (cunoscut sub denumirea de șirul lui Fibonacci).
 - a) Scrie primii șapte termeni ai șirului $(f_n)_n$.
 - b) Demonstrează prin metoda inducției matematice că $f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1} = (-1)^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (**identitatea lui Cassini**).
 - c) Demonstrează prin metoda inducției matematice:
 - i. $f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
 - ii. $f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
8. Se consideră șirurile $(x_n)_n$ cu termenul general $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$, $n \geq 1$, și $(y_n)_n$ cu termenul general $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$, $n \geq 1$.
 - a) Arată că $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0$.
 - b) Demonstrează că $x_n = y_n$, pentru orice număr natural nenul n .
9. Fie șirul $(a_n)_n$, unde a_n reprezintă restul împărțirii lui n la 5.
 - a) Calculează termenii a_{103} și a_{2027} .
 - b) Determină cardinalul mulțimii $M = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
 - c) Determină cardinalul mulțimii $N = \{a_n \mid n = k^2, k \in \mathbb{N}^*\}$.
10. Fie șirul $(a_n)_n$, unde a_n reprezintă a n -a zecimală a numărului $\frac{1}{7}$.
 - a) Calculează termenii a_1 , a_{25} și a_{2207} .
 - b) Calculează suma elementelor mulțimii $M = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
 - c) Calculează suma $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}$.
11. Fie șirul $(a_n)_n$, unde a_n reprezintă ultima cifră a lui $7^{n(n+1)}$.
 - a) Calculează termenii a_1 , a_{25} și a_{2207} .
 - b) Calculează suma elementelor mulțimii $M = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
 - c) Calculează suma $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}$.
12. Fie șirul $(a_n)_n$ cu $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$, pentru orice număr natural nenul n .
 - a) Determină primii cinci termeni ai șirului $(a_n)_n$.
 - b) Determină formula termenului general al șirului $(a_n)_n$ și demonstrează prin metoda inducției matematice că aceasta este corectă.
13. Fie șirul $(a_n)_n$ cu $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Determină primii cinci termeni ai șirului $(a_n)_n$.
 - b) Determină formula termenului general al șirului $(a_n)_n$ și demonstrează prin metoda inducției matematice că aceasta este corectă.

1.2. Progresii aritmetice: determinarea termenului general al unei progresii; suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice, caracterizarea unei progresii aritmetice prin relația dintre orice trei termeni consecutivi, condiția ca n numere reale să fie în progresie aritmetică, pentru $n \geq 3$

Descopăr



Mircea a cumpărat o livadă de pomi fructiferi, care este situată pe un teren agricol în formă de trapez isoscel. Livada este formată din 24 de rânduri de pomi, paralele cu bazele trapezului. Pe primul rând, care este situat lângă baza mică a trapezului, sunt 17 pomi, iar pe fiecare dintre rândurile următoare sunt cu 2 pomi mai mult decât pe rândul precedent (figura 1).

- Calculează numărul de pomi de pe rândurile 2, 3, 4 și 5.
- Poți determina numărul de pomi de pe rândul al cincilea fără să calculezi numărul de pomi de pe rândurile 2, 3 sau 4? Formulează o concluzie.
- Determină numărul de pomi de pe ultimul rând.
- În figura 2 este reprezentat paralelogramul format prin alăturarea la trapezul inițial a trapezului obținut prin rotația acestuia cu 180° . Folosind această reprezentare, calculează câți pomi sunt în total pe primul și pe ultimul rând, pe al doilea și pe penultimul rând, pe al treilea și pe antepenultimul rând. Ce observi?
- Calculează numărul de pomi din livadă.

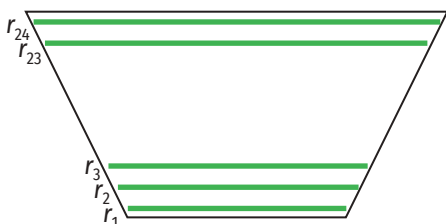


Figura 1

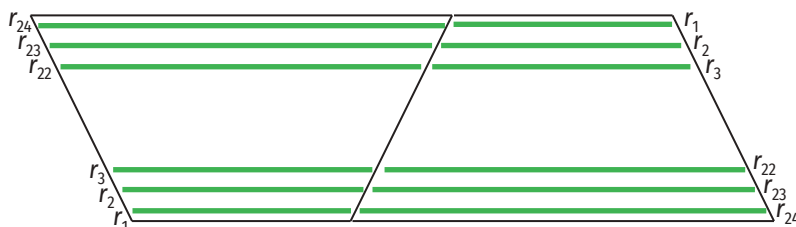


Figura 2



Învăț

Definirea progresiei aritmetice

Definiție. Se numește progresie aritmetică un șir de numere reale în care fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din cel precedent prin adunarea aceluiași număr, numit rația progresiei aritmetice.

OBSERVAȚII.

- Șirul $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ este progresie aritmetică dacă și numai dacă $a_{k+1} = a_k + r$, pentru orice număr natural nenul k , unde numărul r este rația progresiei aritmetice.
- Șirul $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ este progresie aritmetică dacă și numai dacă $a_{k+1} - a_k = r$, pentru orice număr natural nenul k , unde numărul r este rația progresiei aritmetice.
- Pentru a pune în evidență faptul că șirul $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ este progresie aritmetică scriem $\div a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.
- Progresia aritmetică $(a_n)_n$ este complet determinată, dacă se cunosc primul termen a_1 și rația r .

EXEMPLE:



1. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $a_1 = 12$ și $r = -\frac{1}{2}$. Atunci:

$$a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_2 = 12 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{23}{2};$$

$$a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 = \frac{23}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{22}{2} = 11;$$

$$a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 = 11 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{2}.$$

2. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $a_2 = 5$ și $a_3 = 11$. Atunci:

$$a_3 - a_2 = r \Rightarrow r = 11 - 5 \Rightarrow r = 6.$$

3. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $a_2 = 7$ și $a_4 = 15$. Atunci:

$$\left. \begin{array}{l} a_4 = a_3 + r = (a_2 + r) + r = a_2 + r + r = a_2 + 2r \\ a_4 = 15, a_2 = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 15 = 7 + 2r \Rightarrow r = 4.$$



• Proprietățile progresiei aritmetice

Teorema 1. Un șir de numere reale este progresie aritmetică dacă și numai dacă orice termen al său, începând cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini lui.

Altfel spus, șirul $(a_n)_n$ este progresie aritmetică dacă și numai dacă $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$.

Demonstrație: Șirul $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ este progresie aritmetică dacă și numai dacă $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$. (1)

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \Leftrightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ pentru orice număr natural } n, n \geq 2. (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că șirul $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ este progresie aritmetică dacă și numai dacă $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$.

OBSERVAȚII.

1. Proprietatea din teorema 1 justifică denumirea de progresie aritmetică.

2. Spunem că **numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt în progresie aritmetică** dacă ele sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

EXEMPLU:



Să determinăm numărul real x pentru care numerele $4x - 5, 3x + 3, 2x^2 - 1$ sunt în progresie aritmetică.

$$\begin{aligned} \text{Numerele } 4x - 5, 3x + 3, 2x^2 - 1 \text{ sunt în progresie aritmetică.} &\Leftrightarrow 3x + 3 = \frac{4x - 5 + 2x^2 - 1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6x + 6 = 2x^2 + 4x - 6 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 12 = 0 \mid : 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 3\}. \end{aligned}$$

• Formula termenului general al unei progresii aritmetice

Dacă într-o progresie aritmetică se cunosc primul termen și rația, se poate găsi o formulă care permite determinarea oricărui termen al progresiei în funcție de primul termen și de rație.

Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu rația r . Atunci, din definiția progresiei aritmetice, avem:

$$a_2 = a_1 + r;$$

$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r;$$

$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r;$$

$$a_5 = a_4 + r = (a_1 + 3r) + r = a_1 + 4r \text{ ș.a.m.d.}$$

Teorema 2. În orice progresie aritmetică $(a_n)_n$ cu rația r avem $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, pentru orice număr natural nenul n .

Demonstrație:

Demonstrăm prin metoda inducției matematice că $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $P(n): a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r, n \in \mathbb{N}^*$.

– Verificăm faptul că propoziția $P(1)$ este adevărată:

$$P(1): a_1 = a_1 + (1 - 1) \cdot r \Rightarrow P(1) \text{ este adevărată.}$$

– Demonstrăm $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

$$P(k): a_k = a_1 + (k - 1) \cdot r, k \in \mathbb{N}^*$$

$$P(k + 1): a_{k+1} = a_1 + [(k + 1) - 1] \cdot r, k \in \mathbb{N}^*$$

Deci $P(k + 1): a_{k+1} = a_1 + kr, k \in \mathbb{N}^*$.

$$a_{k+1} = a_k + r = a_1 + (k - 1) \cdot r + r = a_1 + kr - r + r = a_1 + kr, \forall k \in \mathbb{N}^*, \Rightarrow P(k + 1) \text{ este adevărată.}$$

Ambele etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sunt verificate. Așadar, propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n .

EXEMPLE:

1. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $a_1 = 5$ și rația $r = 3$. Atunci:

$$a_{41} = a_1 + (41 - 1)r \Rightarrow a_{41} = 5 + (41 - 1) \cdot 3 = 5 + 40 \cdot 3 = 125.$$

2. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $a_1 = 200$ și rația $r = -5$. Să determinăm rangul termenului care este egal cu 15.

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 15 = 200 + (n - 1) \cdot (-5) \Leftrightarrow -185 = (n - 1) \cdot (-5) \Leftrightarrow n - 1 = 37 \Leftrightarrow n = 38.$$

Așadar, rangul termenului egal cu 15 este 38.

• **Formula sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice**

Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$. Notăm $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

Ne propunem să determinăm suma primilor opt termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$ cu $a_1 = 3$ și $r = 5$.

Prin calcul obținem: $a_1 = 3, a_2 = 8, a_3 = 13, a_4 = 18, a_5 = 23, a_6 = 28, a_7 = 33, a_8 = 38$.

Scriem suma acestor termeni de două ori: pe primul rând scriem termenii sumei în ordinea în care apar în sumă, iar pe al doilea rând îi scriem în ordine inversă. Obținem:

$$S_8 = 3 + 8 + 13 + 18 + 23 + 28 + 33 + 38$$

$$S_8 = 38 + 33 + 28 + 23 + 18 + 13 + 8 + 3$$

$$S_8 + S_8 = 41 + 41 + 41 + 41 + 41 + 41 + 41 + 41 \Leftrightarrow 2S_8 = 41 \cdot 8 \Leftrightarrow S_8 = \frac{41 \cdot 8}{2} \Leftrightarrow S_8 = 164$$

Observăm că $a_1 + a_8 = a_2 + a_7 = a_3 + a_6 = a_4 + a_5$.

Plecând de la această observație se obține următorul rezultat:

Teorema 3. Dacă numerele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sunt în progresie aritmetică, atunci:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n, \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$$

Demonstrație:

Fie r rația progresiei aritmetice $a_1, a_2, \dots$. Atunci:

$$a_k = a_1 + (k-1)r, \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n; (1)$$

$$a_{n-k+1} = a_1 + (n-k+1-1)r = a_1 + (n-k)r, \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n. (2)$$

$$\text{Din (1) și (2) rezultă } a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)r + a_1 + (n-k)r = 2a_1 + (n-1)r, \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n. (3)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)r = 2a_1 + (n-1)r, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^* (4)$$

Din relațiile (3) și (4) obținem: $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$, pentru orice $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$.

Folosind această teoremă, vom determina formula pentru suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Folosind faptul că $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$ (conform teoremei 3), obținem:

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n), \text{ de unde rezultă } S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}, n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Dacă ținem cont de relația (2), obținem } S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)r] \cdot n}{2}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Teorema 4. Suma primilor n ($n \in \mathbb{N}^*$) termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$ este dată de formula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}, n \in \mathbb{N}^*$$

EXEMPLE: 

1. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $a_1 = 6$ și $a_2 = 13$. Să determinăm suma primilor 30 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$.

Determinăm rația progresiei aritmetice $(a_n)_n$: $r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 13 - 6 = 7$.

Calculăm valoarea termenului a_{30} : $a_{30} = a_1 + (30-1)r \Rightarrow a_{30} = 6 + 29 \cdot 7 = 209$.

Aplicând formula pentru calculul sumei primilor n termeni, obținem:

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2} = \frac{(6 + 209) \cdot 30}{2} = 3\,225.$$

2. Robert dorește să cumpere o pereche de căști care costă 390 de lei. El economisește în prima zi 5 lei, iar în fiecare dintre următoarele zile economisește cu 3 lei mai mult decât suma pe care a economisit-o în ziua anterioară. Să determinăm numărul de zile în care Robert reușește să economisească suma de bani necesară pentru achiziționarea căștilor.

Sumele de bani economisite de Robert zilnic sunt termenii unei progresii aritmetice $(a_n)_n$ cu $a_1 = 5$ și $r = 3$.

Dacă notăm cu n numărul de zile necesare pentru a economisi 390 de lei, atunci $S_n = 390$.

Aplicând formula pentru calculul sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

$$S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)r] \cdot n}{2}, (\forall)n \in \mathbb{N}^*, \text{ obținem:}$$

$$\frac{[2a_1 + (n-1)r] \cdot n}{2} = 390 \Leftrightarrow \frac{[2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 3] \cdot n}{2} = 390 \Leftrightarrow \frac{(10 + 3n - 3) \cdot n}{2} = 390 \Leftrightarrow \frac{(3n + 7) \cdot n}{2} = 390 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3n + 7) \cdot n = 780 \Leftrightarrow 3n^2 + 7n - 780 = 0.$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-780) = 49 + 9\,360 = 9\,409$$

$$n_1 = \frac{-7 + \sqrt{9409}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 + 97}{6} = \frac{90}{6} = 15 \in \mathbb{N}$$

$$n_2 = \frac{-7 - \sqrt{9409}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 - 97}{6} = -\frac{104}{6} = -\frac{52}{3} \notin \mathbb{N}$$

Robert economisește suma de bani necesară achiziționării căștilor în 15 zile.



Exerciții rezolvate



1. Aura are 1 000 de lei și economisește în fiecare lună câte 200 de lei. Ce sumă va avea după doi ani?

Rezolvare:

Sumele de bani pe care le are Aura în fiecare lună sunt termenii unei progresii aritmetice $(a_n)_n$ cu $a_1 = 1\,000$ și $r = 200$ (a_n reprezintă suma pe care Aura o are în luna n).

Folosind formula de calcul a termenului general a_n , în funcție de primul termen și de rație, obținem $a_n = 1\,000 + (n-1) \cdot 200$.

Pentru a determina suma pe care Aura o are după doi ani, trebuie să calculăm a_{25} (doi ani au 24 de luni).

$$a_{25} = 1\,000 + (25-1) \cdot 200 = 1\,000 + 24 \cdot 200 = 1\,000 + 4\,800 = 5\,800 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ După doi ani, Aura va avea 5 800 de lei.

2. Maria depune la bancă suma de 40 500 de lei pe o durată de 3 ani, cu rata dobânzii de 4,8%, în regim de dobândă simplă.

a) Ce sumă va avea Maria în cont la termenul scadent?

b) Cât ar trebui să dureze plasamentul astfel încât, la termenul scadent, Maria să aibă în cont 50 220 de lei?

Rezolvare:

a) Dobânda anuală este 4,8% din 40 500, adică $\frac{4,8}{100} \cdot 40\,500 = 4,8 \cdot 405 = 1\,944$ lei.

Dacă notăm cu s_n suma (soldul, capitalul) după un plasament de n ani, observăm că $(s_n)_n$ este o progresie aritmetică, având rația r egală cu dobânda anuală. Deci, $s_n = s_1 + (n-1)r$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, unde $s_1 = 40\,500 + 1\,944 = 42\,444$.

Așadar, $s_n = 42\,444 + (n-1) \cdot 1\,944$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

După trei ani, Maria are în cont: $s_3 = 42\,444 + 2 \cdot 1\,944 = 46\,332$ lei.

b) $s_n = 50\,220 \Leftrightarrow 42\,444 + (n-1) \cdot 1\,944 = 50\,220 \Leftrightarrow (n-1) \cdot 1\,944 = 7\,776 \Leftrightarrow n = 5$.

Deci, Maria va avea în cont 50 220 de lei peste 5 ani.

CONTEXTUALIZEZ

Dobânda simplă

reprezintă suma de bani cu care banca recompensează o persoană pentru menținerea capitalului inițial (suma inițială) în contul de depozit, pe o anumită perioadă. Această dobândă se calculează doar în funcție de suma depusă inițial, fără a se lua în considerare dobânda acumulată în perioadele anterioare.

Cu alte cuvinte, dobânda nu se capitalizează, adică nu se adaugă la capital pentru a produce, la rândul ei, dobândă.

ȘTIAI CĂ...?

• **Amortizarea**

reprezintă recuperarea treptată a valorii unui bun (utilaj, clădire, echipament etc.) pe durata utilizării sale.

• **Amortizarea lunară**

se obține împărțind valoarea amortizabilă a bunului la durata de utilizare, exprimată în luni.

• **Cota anuală de amortizare**

arată ce procent din valoarea bunului se amortizează într-un an.

2. O societate comercială achiziționează un echipament tehnologic cu valoarea de intrare de 19 200 de lei. Durata de utilizare stabilită este de 8 ani.

- Calculează cota anuală de amortizare și valoarea amortizării lunare.
- Identifică progresia aritmetică asociată activității descrise în enunț.
- Care este valoarea contabilă netă (valoarea rămasă) a utilajului în al șaselea an de utilizare?
- Construiește o diagramă în care să se observe valoarea contabilă netă pentru fiecare an.

Rezolvare:

- a) Amortizarea liniară presupune repartizarea uniformă a valorii de intrare a unui produs (activ) pe parcursul duratei sale de utilizare.

Cota anuală de amortizare (Ca) se calculează după formula $Ca = \frac{100}{T} \%$, unde T este durata de utilizare stabilită.

În cazul de față, cota de amortizare este $Ca = \frac{100}{8} \%$, adică $Ca = 12,5\%$. Valoarea amortizării anuale este 12,5% din valoarea de intrare, adică $\frac{12,5}{100} \cdot 19\,200 = 2\,400$ lei. Valoarea amortizării lunare este $\frac{1}{12}$ din valoarea amortizării anuale, adică $\frac{1}{12} \cdot 2\,400 = 200$ lei.

- b) Modelăm acest proces prin progresia aritmetică $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde a_n reprezintă valoarea contabilă (netă) a produsului în anul n utilizare, iar $r = -2\,400$. În acest caz, a_1 reprezintă valoarea contabilă (netă) a produsului în primul an de utilizare, deci $a_1 = 19\,200$. Atunci $a_n = 19\,200 + (n-1)(-2\,400)$, $n \in \{1, 2, \dots, 8\}$.

- c) $a_6 = 19\,200 + (6-1)(-2\,400) \Rightarrow a_6 = 19\,200 + 5 \cdot (-2\,400) = 7\,200$.

- d) Pentru construirea diagramei, avem nevoie de următorul tabel de date:

anul	1	2	3	4	5	6	7	8
valoarea	19 200	16 800	14 400	12 000	9 600	7 200	4 800	2 400

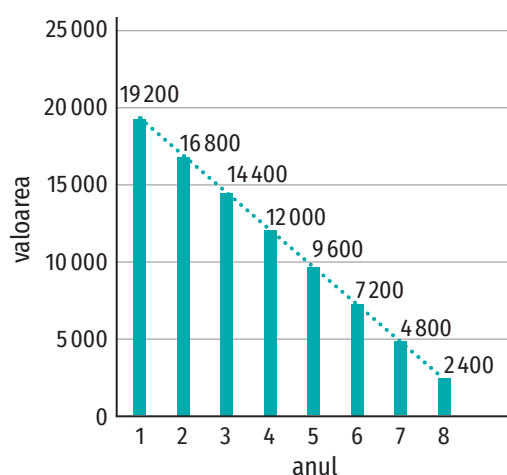


Figura 3

În figura 3 este reprezentată diagrama asociată datelor din tabel. Observăm că descreșterea este liniară.

4. Determină primul termen și rația progresiei aritmetice $(c_n)_n$ cu $c_5 = 23$ și $c_{13} = 7$.

Rezolvare:

$$\begin{cases} c_5 = c_1 + 4r \\ c_{13} = c_1 + 12r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 23 = c_1 + 4r \\ 7 = c_1 + 12r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 23 - 4r \\ c_1 = 7 - 12r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 23 - 4r \\ 23 - 4r = 7 - 12r \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 23 - 4r \\ 8r = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 23 - 4r \\ r = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 23 - 4 \cdot (-2) \\ r = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 31 \\ r = -2 \end{cases}$$

5. Demonstrează că șirul cu termenul general $a_n = 4n - 3$, $n \in \mathbb{N}^*$, este progresie aritmetică.

Rezolvare:

$$a_n = 4n - 3 \Rightarrow a_{n+1} = 4(n+1) - 3 \Rightarrow a_{n+1} = 4n + 1$$

$$a_{n+1} - a_n = 4n + 1 - (4n - 3) = 4n + 1 - 4n + 3 = 4$$

Cum $a_{n+1} - a_n = \text{constant}$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$, șirul $(a_n)_n$ este progresie aritmetică.

6. Suma primilor n ($n \in \mathbb{N}^*$) termeni ai unui șir $(a_n)_n$ este $S_n = \frac{3n(n-1)}{2}$.

a) Arată că șirul $(a_n)_n$ este progresie aritmetică.

b) Calculează $a_7 - a_2$.

Rezolvare:

$$\text{a) Din } S_n = \frac{3n(n-1)}{2} \Rightarrow S_{n+1} = \frac{3(n+1)[(n+1)-1]}{2} \Leftrightarrow S_{n+1} = \frac{3n(n+1)}{2} \quad (1)$$

$$S_{n+1} = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}_{S_n} + a_{n+1} \Leftrightarrow a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{3n(n+1)}{2} - \frac{3n(n-1)}{2} \Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{3n}{2}[(n+1) - (n-1)] \Leftrightarrow a_{n+1} = 3n, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Din } a_{n+1} = 3n \Rightarrow a_n = a_{(n-1)+1} = 3(n-1) \Rightarrow a_n = 3(n-1), (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

Șirul $(a_n)_n$ este progresie aritmetică dacă și numai dacă diferența a doi termeni consecutivi este constantă. Calculăm diferența a doi termeni consecutivi:

$$a_{n+1} - a_n = 3n - 3(n-1) = 3, (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezultă că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică.

$$\text{b) } a_7 = 3 \cdot (7-1) = 18; a_2 = 3 \cdot (2-1) = 3 \Rightarrow a_7 - a_2 = 15.$$

7. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $1 + 5 + 9 + 13 + \dots + x = 435$.

Rezolvare:

Observăm că termenii sumei din membrul stâng sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice $(a_n)_n$, unde $a_1 = 1$, $r = 4$, $a_n = x$ și $S_n = 1 + 5 + 9 + 13 + \dots + x$. (1)

Exprimând termenul general a_n în funcție de primul termen și rație, obținem:

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 3, (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{(1 + 4n - 3)n}{2} = \frac{4n^2 - 2n}{2} = 2n^2 - n \quad (2)$$

Înlocuind în ecuația inițială relațiile (1) și (2), obținem ecuația $2n^2 - n = 435$, care are soluțiile $n_1 = 15$ și $n_2 = -\frac{29}{2}$. Cum n este număr natural nenul, obținem $n = 15$, de unde rezultă că $a_{15} = x$.

$$a_n = 4n - 3, (\forall)n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_{15} = 4 \cdot 15 - 3 \Rightarrow a_{15} = 57$$

Așadar, $x = 57$.



ȘTIAI CĂ...?

Carl Friedrich Gauss

(1777-1855) a fost unul dintre cei mai mari oameni de știință germani.

Legenda spune că într-o zi, la școală, Gauss a făcut o șotie. Pentru acest lucru, a fost pedepsit să stea la colț, cu genunchii pe grăunțe, până aduna în minte numerele de la 1 la 100. Gauss a spus imediat rezultatul: 5 050. Întrebat cum a făcut calculele atât de repede, Gauss a răspuns:

„Am grupat termenii astfel:

$$1 + 100 = 101$$

$$2 + 99 = 101$$

$$3 + 98 = 101$$

$$\dots$$

$$50 + 51 = 101$$

În total avem 101 de 50 de ori, adică 5 050”.

De fapt, elevul Gauss observase că numerele din sumă au proprietatea că suma termenilor aflați la distanțe egale de capetele șirului este aceeași.

CONTEXTUALIZEZ

Progresiile aritmetice sunt modele matematice esențiale pentru descrierea fenomenelor cu variații constante. Acestea sunt utilizate în diverse domenii pentru predicții și analize:

• **Economie și finanțe:**

- dobânda simplă;
- amortizarea liniară, deprecierea activelor (de exemplu, utilaje, vehicule) cu o sumă fixă în fiecare an;
- anuități*, plata constantă a ratelor sau a contribuțiilor la fonduri de pensii, putând fi calculate folosind suma termenilor unei progresii.

• **Construcții:**

- aranjarea locurilor în stadioane sau amfiteatre, unde fiecare rând are cu un număr fix de scaune mai mult decât precedentul;
- treptele unei scări construite astfel încât fiecare treaptă să aibă aceeași înălțime.

*anuitate = sumă de bani (incluzând o parte din capital și dobânda corespunzătoare) care se plătește periodic (de obicei, anual) spre a rambursa un capital sau o datorie.

Aplic

- Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu rația r și S_n suma primilor n termeni ai acesteia. Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate. 
 - Dacă $a_{10} = 45$ și $a_9 = 41$, atunci $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - Dacă $a_1 = 45$ și $r = -6$, atunci $a_6 = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - Dacă $a_1 = 4$ și $r = 9$, atunci $a_{10} = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - Dacă $a_4 = 12$ și $a_8 = 36$, atunci $r = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - Dacă $a_1 = 11$, $r = -0,5$ și $a_n = 1$, atunci $n = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - Dacă $a_1 = 2$, $r = 3$ și $S_n = 155$, atunci $n = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - Dacă $S_n = 2n(n+1)$, atunci $r = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. 
 - În progresia aritmetică $(a_n)_n$ avem $a_1 = -25$ și $r = 6$. Atunci:
 - $a_6 = 6$;
 - $a_6 = -55$;
 - $a_6 = 5$;
 - $a_6 = 9$.
 - În progresia aritmetică $(b_n)_n$ avem $b_1 = 30$ și $r = -3$. Atunci:
 - $b_6 = 6$;
 - $b_{10} = 6$;
 - $b_9 = 6$;
 - $b_8 = 6$.
 - În progresia aritmetică $(c_n)_n$ avem $c_7 + c_{11} = 11$. Atunci:
 - $c_1 + c_{17} = 22$;
 - $c_1 + c_{17} = 18$;
 - $c_1 + c_{17} = 16$;
 - $c_1 + c_{17} = 11$.
 - În progresia aritmetică $(d_n)_n$ avem $d_3 + d_4 + d_5 = 33$. Atunci:
 - $d_4 = 11$;
 - $d_4 = 22$;
 - $d_4 = 12$;
 - $d_4 = 14$.
 - Suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$ este $S_n = n(3n - 1)$. Atunci:
 - $a_n = n + 1, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$;
 - $a_n = 3n - 1, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$;
 - $a_n = 6n - 4, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$;
 - $a_n = 2n, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$.
- Determină primii cinci termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$:
 - $a_1 = 22$ și $r = -4$;
 - $a_1 = 10$ și $r = -\frac{4}{5}$;
 - $a_1 = 4$ și $a_2 - a_1 = -0,5$;
 - $a_4 = 1$ și $a_5 = -1$;
 - $a_1 = -7$ și $a_3 - a_2 = 4$;
 - $a_1 = -5$ și $a_6 = 5$;
 - $a_1 + a_2 = 4$ și $a_2 - a_1 = 2$;
 - $a_1 = -3$ și $a_{n+1} = a_n - 3$.
- Determină primii doi termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$:
 - $a_1, a_2, 10, 8, 6, \dots$;
 - $a_1, a_2, 5, \frac{16}{3}, \frac{17}{3}, \dots$;
 - $a_1, a_2, \sqrt{12}, \sqrt{27}, \sqrt{48}, \dots$.
- Determină primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_n$:
 - $a_{22} = 15$ și $r = -6$;
 - $a_{10} = 15$ și $a_{10} - a_9 = 4$;
 - $a_{51} = 15$ și $a_{12} - a_8 = 8$.
- Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ și S_n suma primilor n termeni ai acesteia. Determină formula termenului general al progresiei aritmetice $(a_n)_n$ știind că:
 - $a_1 = 7$ și $r = -2$;
 - $a_1 + a_2 = 7$ și $a_2 = 5$;
 - $a_4 - a_3 = \frac{1}{4}$ și $a_2 = 2$;
 - $a_{10} + a_{12} = 70$ și $a_3 - a_2 = 3$;
 - $a_{2n-3} = 8n - 15, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$;
 - $S_5 = 7$ și $a_1 = 7$;
 - $S_n = n^2, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$;
 - $S_{2n-1} = 4n^2 - 1, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$.



CONTEXTUALIZEZ

Progresiile aritmetice pot fi utilizate și în:

- **Antrenament sportiv și fitness:** Sportivii folosesc adesea secvențe aritmetice pentru a-și structura programele de antrenament. De exemplu, creșterea numărului de repetări sau a greutății ridicate cu o cantitate fixă în fiecare săptămână urmează o progresie aritmetică, ajutând la îmbunătățirea treptată a condiției fizice și la prevenirea accidentărilor.

- **Medicină:** administrarea unui tratament progresiv pentru adaptarea organismului la un medicament nou: introducerea tratamentului se face gradual – în prima zi se administrează o doză care conține o cantitate minimă de substanță activă, apoi se adaugă în fiecare zi aceeași cantitate de substanță activă până se ajunge la doza standard.

- Determină primul termen și rația progresiei aritmetice $(a_n)_n$, știind că:
 - $a_n = 4n - 5, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$;
 - $a_{18} = 15$ și $a_8 = -5$;
 - $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ și $a_4 + a_8 = 46$;
 - $a_2 + a_7 = 0$ și $a_3 - a_5 = 4$;
 - $a_3 + a_4 + a_5 = 33$ și $a_1 + a_7 + a_{10} = 45$;
 - $S_4 = 36$ și $S_{10} = 30$, unde S_n este suma primilor n termeni ai progresiei $(a_n)_n$;
 - $S_6 = 33$ și $a_4 + a_7 = 23$, unde S_n este suma primilor n termeni ai progresiei $(a_n)_n$.
- Demonstrează că șirul cu termenul general $a_n = 7n - 5, n \in \mathbb{N}^*$, este progresie aritmetică. Determină primul termen și rația.
- Demonstrează că șirul cu termenul general $b_n = 10 - 5n, n \in \mathbb{N}^*$, este progresie aritmetică. Determină primul termen și rația.
- Demonstrează că șirul cu termenul general $x_n = 4n - 7, n \in \mathbb{N}^*$, este progresie aritmetică. Determină primul termen și rația.
- Determină valorile numărului real x pentru care:
 - 3, 1, $2x + 7$ sunt în progresie aritmetică;
 - $2x - 3, x + 1, x + 7$ sunt în progresie aritmetică;
 - $x + 1, 4, 2x$ sunt în progresie aritmetică;
 - $x^2 - 3, x + 1, x + 3$ sunt în progresie aritmetică;
 - $x^2 - x - 1, x^2 - x + 1, x^2 + x + 1$ sunt în progresie aritmetică;
 - $x^2 - 7, 2 - x^2, 1 + x - x^2$ sunt în progresie aritmetică.
- Calculează:

a) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 51$;	d) $7 + 10 + 13 + 16 + \dots + 100$;
b) $2 + 7 + 12 + 17 + \dots + 102$;	e) $1 + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + \dots + 30$;
c) $42 + 37 + 32 + 27 + \dots + (-23)$;	f) $100 + 97 + 94 + \dots + 1$.
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:
 - $3 + 9 + 15 + 21 + \dots + x = 432$;
 - $(-15) + (-12) + (-9) + (-6) + \dots + x = 18$;
 - $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + x = 121$;
 - $7 + 10 + 13 + 16 + \dots + x = 205$.
- Cât a fost capitalul inițial al unei operațiuni bancare dacă, după plasarea acestuia în regim de dobândă simplă pe o perioadă de 9 luni, cu rata dobânzii de 6%, s-a obținut un capital de 1 254 de lei?
- O persoană depune la bancă 3 200 000 de lei în regim de dobândă simplă. După trei ani, în contul persoanei sunt 3 699 200 de lei. Care este rata dobânzii?
- Un client depune la bancă suma de 80 000 lei pe o durată de 9 luni, cu rata dobânzii de 3,6%, în regim de dobândă simplă.
 - Ce sumă va avea clientul în cont la termenul scadent?
 - Cât ar trebui să dureze plasamentul, astfel încât, la termenul scadent, clientul să aibă în cont 83 600 de lei?



PORTOFOLIU

Un elev urmează un program de pregătire fizică timp de 12 zile, în care numărul exercițiilor crește zilnic pentru a evita suprasolicitarea. Programul începe în prima zi cu 10 flotări, 15 genuflexiuni și 20 de abdomene, apoi se adaugă zilnic 2 flotări, 3 genuflexiuni și 4 abdomene.

1. Scrie progresiile aritmetice care modelează fiecare tip de exercițiu fizic.

2. Determină numărul de exerciții fizice efectuate în a douăsprezecea zi.

3. Calculează numărul de exerciții fizice de fiecare tip efectuate în douăsprezece zile.

4. Calculează numărul total de exerciții fizice efectuate pe parcursul întregului program.

5. Consideri că această creștere este realistă într-un program de antrenament fizic?

Argumentează răspunsul.

17. O sală de spectacole are 18 rânduri de scaune. Pe fiecare rând, începând cu al doilea, sunt cu două locuri mai multe decât pe rândul anterior. Pe rândul 10 sunt 33 de locuri.

a) Câte locuri are sala?

b) Biletele de pe rândurile 1-10 sunt de categoria I, biletele de pe următoarele cinci rânduri sunt de categoria a II-a, iar restul sunt de categoria a III-a. Un bilet de categoria I are prețul de 200 de lei, un bilet de categoria a II-a costă 160 de lei, iar prețul unui bilet de categoria a III-a reprezintă 60% din prețul unui bilet de categoria I. Ce sumă se încasează la un spectacol unde s-au vândut toate biletele?

c) Înainte de începerea spectacolului, persoanele cu bilet se prezintă la intrare astfel: în primul minut vine un spectator, în al doilea minut vin trei spectatori, în al treilea minut vin cinci spectatori și așa mai departe. În câte minute se va umple sala?

18. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu termeni pozitivi, cu rația $r = 3$ și $a_1 a_2 a_3 a_4 = 880$. Determină primul termen al progresiei $(a_n)_n$.

19. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu termeni pozitivi, cu rația $r = 3$ și $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_9 a_{10}} = \frac{9}{28}$. Determină primul termen al progresiei $(a_n)_n$.

20. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu termeni pozitivi, cu $a_2 + a_4 = 14$ și $a_1 a_5 = 33$. Determină primul termen și rația progresiei $(a_n)_n$.

21. Demonstrează că următoarele numere nu pot fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice:

a) $2, \sqrt{6}, 2\sqrt{2}$; b) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{n+1}, n \in \mathbb{N}$; c) $\sqrt{n-2}, \sqrt{n}, \sqrt{n+2}, n \in \mathbb{N}, n > 1$.

22. Demonstrează că, dacă numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$ sunt în progresie aritmetică.

23. Demonstrează că numerele a^2, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă numerele $(b+c)^{-1}, (a+c)^{-1}, (a+b)^{-1}$ sunt în progresie aritmetică.

24. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu termeni strict pozitivi și rația r ($r \in \mathbb{R}, r > 0$). Demonstrează că:

a) $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}, n \in \mathbb{N}^*$.

b) $\frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_3 a_5} + \dots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{2n+1}}, n \in \mathbb{N}^*$.

c) $\frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \frac{1}{a_2 a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}} \right), n \in \mathbb{N}^*$.

d) $\frac{a_1 + a_2}{a_1^2 a_2^2} + \frac{a_2 + a_3}{a_2^2 a_3^2} + \dots + \frac{a_n + a_{n+1}}{a_n^2 a_{n+1}^2} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_{n+1}^2} \right), n \in \mathbb{N}^*$.

e) $a_1 + a_{1+k} + a_{1+2k} + \dots + a_{1+(n-1)k} = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)kr], n, k \in \mathbb{N}^*$.

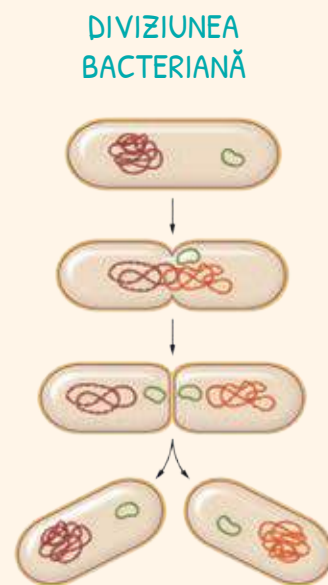
f) $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_1}}{r}, n \in \mathbb{N}^*$.

1.3. Progresii geometrice: determinarea termenului general al unei progresii; suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice, caracterizarea unei progresii geometrice prin relația dintre orice trei termeni consecutivi, condiția ca n numere reale să fie în progresie geometrică, pentru $n \geq 3$

Descopăr



1. Diviziunea bacteriană este un proces asexuat, prin care o celulă bacteriană se împarte în două celule fiice identice. Este o metodă extrem de rapidă de multiplicare, în condiții optime, unele bacterii divizându-se la fiecare 20-30 de minute. Presupunem că avem o celulă bacteriană care se divide la fiecare 20 de minute.
 - a) Determină numărul de bacterii care se obține după a patra diviziune.
 - b) Identifică șirul $(y_n)_n$, unde y_n reprezintă numărul de bacterii după a n -a diviziune. Determină termenul y_7 . Care este regula de formare a șirului?
 - c) După câte diviziuni vor fi 1 024 de bacterii?
 - d) Câte diviziuni se pot face în 24 de ore?
 - e) Presupunând că fiecare bacterie trăiește cel puțin 24 de ore, care este numărul de bacterii la 24 de ore după prima diviziune?
2. Fie șirul $(b_n)_n$ descris astfel: 1, 3, 9, 27,
 - a) Identifică termenii b_1, b_2, b_3, b_4 .
 - b) Scrie următorii trei termeni ai șirului.
 - c) Care este regula de formare a șirului?
 - d) Compară termenul b_2 cu media geometrică a vecinilor lui. Procedează în același mod cu termenii b_3 și b_4 . Ce observi?
 - e) Construiește un șir $(c_n)_n$, unde $\frac{c_{n+1}}{c_n} = 0,3$, pentru orice număr natural nenul n .



Învăț

• Definirea progresiei geometrice

Definiție. Se numește progresie geometrică un șir de numere în care fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din precedentul prin înmulțirea cu același număr, numit rația progresiei geometrice.

OBSERVAȚII.



1. Șirul $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ este progresie geometrică dacă și numai dacă $b_{k+1} = b_k \cdot q$, pentru orice număr natural nenul k , unde numărul q este rația progresiei geometrice.
2. Șirul $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, cu termeni nenuli, este progresie geometrică dacă și numai dacă $\frac{b_{k+1}}{b_k} = q$, pentru orice număr natural nenul k , unde numărul q este rația progresiei geometrice.
3. Pentru a pune în evidență faptul că șirul $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ este progresie geometrică scriem $\Leftrightarrow b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$.
4. Progresia geometrică $(b_n)_n$ este complet determinată dacă se cunosc primul termen b_1 și rația q .

EXEMPLE:

1. Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu $b_1 = 24$ și $q = -\frac{1}{2}$. Atunci:

$$b_2 = b_1 \cdot q \Rightarrow b_2 = 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -12;$$

$$b_3 = b_2 \cdot q \Rightarrow b_3 = (-12) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 6;$$

$$b_4 = b_3 \cdot q \Rightarrow b_4 = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3.$$

2. Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu $b_3 = 45$ și $b_4 = 135$. Să determinăm primul termen și rația progresiei.

$$(b_n)_n \text{ este progresie geometrică} \Rightarrow q = \frac{b_4}{b_3} \Rightarrow q = \frac{135}{45} \Rightarrow q = 3.$$

Cum $b_{k+1} = b_k \cdot q$, pentru orice număr natural nenul k , obținem:

$$b_3 = b_2 \cdot q \Rightarrow 45 = b_2 \cdot 3 \Rightarrow b_2 = 15;$$

$$b_2 = b_1 \cdot q \Rightarrow 15 = b_1 \cdot 3 \Rightarrow b_1 = 5.$$

Așadar, primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_n$ este 5, iar rația este 3.

• **Proprietățile progresiei geometrice**

Teorema 1. Un șir de numere reale pozitive este progresie geometrică dacă și numai dacă orice termen al său, începând cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini lui.

Altfel spus, șirul de numere pozitive $(b_n)_n$ este progresie geometrică dacă și numai dacă $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$.

Demonstrație: Șirul cu termeni pozitivi $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ este progresie geometrică dacă și numai dacă $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n}{b_{n-1}}$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$. (1)

Cum $b_n > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n}{b_{n-1}} \Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} \Leftrightarrow b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că șirul cu termeni pozitivi $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ este progresie geometrică dacă și numai dacă $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$.

OBSERVAȚIE.

Proprietatea din teorema 1 justifică denumirea de progresie geometrică.

Teorema 2. Șirul cu termeni nenuli $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ este progresie geometrică dacă și numai dacă $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$.

Într-adevăr, șirul cu termenii nenuli $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ este progresie geometrică dacă și numai dacă $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n}{b_{n-1}}$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n}{b_{n-1}} \Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \text{ pentru orice număr natural } n, n \geq 2$$

OBSERVAȚIE.

Spunem că numerele $b_1, b_2, \dots, b_n$ sunt în progresie geometrică dacă acestea sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.



Atunci, conform teoremei 2, **numerele x, y, z sunt în progresie geometrică dacă și numai dacă $y^2 = x \cdot z$.**

EXEMPLE:

1. Să determinăm numărul real x pentru care numerele $x - 2, 6, x + 7$ sunt în progresie geometrică.

Numerele $x - 2, 6, x + 7$ sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow 6^2 = (x - 2)(x + 7) \Leftrightarrow 36 = x^2 + 5x - 14 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 50 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-10, 5\}$.

2. Numerele $x - 1, x, x + 2$ sunt în progresie geometrică. Să determinăm rația acestei progresii.

Numerele $x - 1, x, x + 2$ sunt în progresie geometrică. $\Leftrightarrow x^2 = (x - 1)(x + 2) \Leftrightarrow x^2 = x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Dacă $x = 2$, atunci numerele în progresie geometrică sunt 1, 2, 4. Rația unei progresii geometrice reprezintă raportul a doi termeni consecutivi, deci rația este 2.

• **Exprimarea termenului general al unei progresii geometrice în funcție de primul termen și de rație**

Dacă într-o progresie geometrică $(b_n)_n$ știm primul termen b_1 și rația q , putem deduce o formulă prin care să exprimăm orice termen în funcție de primul termen și de rație.

Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu rația q . Atunci, din definiția progresiei geometrice, avem:

$$b_2 = b_1 \cdot q;$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2;$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3;$$

$$b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 \cdot q^3) \cdot q = b_1 \cdot q^4 \text{ ș.a.m.d.}$$

Teorema 3. În orice progresie geometrică $(b_n)_n$ cu rația q ($q \neq 0$), avem $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, pentru orice număr natural nenul n .

Demonstrație:

Demonstrăm prin metoda inducției matematice faptul că $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $P(n): b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$.

– Verificăm dacă propoziția $P(1)$ este adevărată:

$$P(1): b_1 = b_1 \cdot q^{1-1} \Rightarrow P(1) \text{ este adevărată.}$$

– Demonstrăm $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

$$P(k): b_k = b_1 \cdot q^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*$$

$$P(k + 1): b_{k+1} = b_1 \cdot q^{(k+1)-1}, k \in \mathbb{N}^*$$

Deci $P(k + 1): b_{k+1} = b_1 \cdot q^k, k \in \mathbb{N}^*$.

$$b_{k+1} = b_k \cdot q = (b_1 \cdot q^{k-1}) \cdot q = b_1 \cdot q^{(k-1)+1} = b_1 \cdot q^k \Rightarrow P(k + 1) \text{ este adevărată.}$$

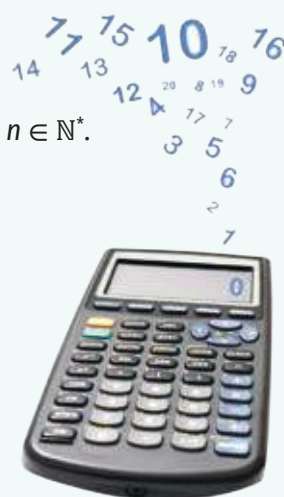
Ambele etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sunt verificate. Prin urmare, propoziția $P(n)$ este adevărată, pentru orice număr natural nenul n .

EXEMPLU:

Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu $b_1 = 15 \cdot 3^{10}$ și rația $q = -\frac{1}{3}$. Să determinăm termenul b_{10} .

$$(b_n)_n \text{ este progresie geometrică} \Rightarrow b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, (\forall)n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow b_{10} = b_1 \cdot q^{10-1} \Rightarrow$$

$$b_{10} = 15 \cdot 3^{10} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^9 = 15 \cdot 3^{10} \cdot \left(-\frac{1}{3^9}\right) = -15 \cdot 3^{10-9} = -45. \text{ Așadar, } b_{10} = -45.$$



Teorema 4. Fie numerele $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) în progresie geometrică. Atunci $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n$ pentru orice număr natural $k, k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Demonstrație:

i) $q \neq 0$

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ sunt în progresie geometrică $\Rightarrow b_k = b_1 \cdot q^{k-1}, k \in \{1, 2, \dots, n\}$. (1)

Atunci: $b_{n-k+1} = b_1 \cdot q^{(n-k+1)-1} \Leftrightarrow b_{n-k+1} = b_1 \cdot q^{n-k}$ (2) și

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}. \quad (3)$$

Din (1) și (2) obținem:

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = (b_1 \cdot q^{k-1}) \cdot (b_1 \cdot q^{n-k}) = b_1^2 \cdot q^{n-1}. \quad (4)$$

$$\text{Calculând } b_1 \cdot b_n \text{ obținem: } b_1 \cdot b_n = b_1 \cdot (b_1 \cdot q^{n-1}) = b_1^2 \cdot q^{n-1}. \quad (5)$$

Din (4) și (5) obținem $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n, k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

ii) $q = 0 \Rightarrow b_n = 0, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2 \Rightarrow b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n, (\forall) k \in \{1, 2, \dots, n\}, n \geq 2$.

• **Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice**

Teorema 5. Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu rația q . Dacă notăm cu $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$, atunci:

$$S_n = \begin{cases} b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, & \text{dacă } q \neq 1 \\ n \cdot b_1, & \text{dacă } q = 1 \end{cases}$$

Demonstrație:

1. Dacă $q \neq 1$, atunci $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1}$. (1)

Înmulțind relația (1) cu q , obținem: $S_n \cdot q = b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \dots + b_1 q^n$. (2)

Scăzând membru cu membru egalitatea (1) din egalitatea (2), obținem:

$$S_n \cdot q - S_n = b_1 \cdot q^n - b_1 \Rightarrow S_n(q - 1) = b_1(q^n - 1).$$

Deoarece $q \neq 1$, obținem $S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

2. Dacă $q = 1$, atunci $b_k = b_1 \cdot 1^{k-1} = b_1, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, de unde rezultă:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = b_1 + b_1 + b_1 + \dots + b_1 = n \cdot b_1.$$

EXEMPLE:

1. Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu $b_1 = 3$ și $b_2 = -6$. Să determinăm suma primilor 10 termeni ai progresiei.

Determinăm rația progresiei geometrice: $q = \frac{b_2}{b_1} \Rightarrow q = \frac{-6}{3} = -2$ ($q \neq 1$).

Cum $q \neq 1$, aplicăm formula $S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ pentru $n = 10$ și obținem:

$$S_{10} = b_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 3 \cdot \frac{(-2)^{10} - 1}{-2 - 1} = 3 \cdot \frac{1024 - 1}{-3} = -1\,023.$$

2. Să calculăm suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{128}$.

Numerele $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{128}$ sunt termeni consecutivi ai progresiei geometrice $(b_n)_n$ cu $b_1 = 1$ și $q = \frac{1}{2}$.

Observăm că suma se poate scrie $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^7$, deci $b_8 = \frac{1}{128}$.

Aplicând formula $S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ pentru $n = 8$, obținem:

$$S_8 = b_1 \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} \Rightarrow S_8 = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 \cdot \frac{\frac{1}{2^8} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = \frac{1 - 256}{-1} = \frac{255}{128}.$$

$$\text{Deci } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{128} = \frac{255}{128}.$$

Exerciții rezolvate



1. Demonstrează că șirul $(b_n)_n$ cu termenul general $b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este progresie geometrică.

Rezolvare:

$$b_n = 4 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow b_{n+1} = 4 \cdot 3^{(n+1)-1} \Rightarrow b_{n+1} = 4 \cdot 3^n.$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4 \cdot 3^n}{4 \cdot 3^{n-1}} = \frac{3^n}{3^{n-1}} = 3, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \text{Șirul cu termenul general } b_n = 4 \cdot 3^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*, \text{ este progresie geometrică.}$$

2. Demonstrează că șirul $(y_n)_n$, care are suma primilor n termeni $S_n = 3(2^n - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, este progresie geometrică. Apoi determină primul termen și rația acestei progresii geometrice.

Rezolvare:

$$S_n = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n \Rightarrow S_{n+1} = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n+1} \Rightarrow y_{n+1} = S_{n+1} - S_n \quad (1)$$

$$\text{Deoarece } S_n = 3(2^n - 1) \Rightarrow S_{n+1} = 3(2^{n+1} - 1), \text{ atunci, conform (1),}$$

$$y_{n+1} = 3(2^{n+1} - 1) - 3(2^n - 1), \text{ de unde rezultă } y_{n+1} = 3 \cdot 2^n.$$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{3 \cdot 2^n}{3 \cdot 2^{n-1}} = 2, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \text{Șirul } (y_n)_n \text{ este progresie geometrică.}$$

Din formula termenului general $y_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, pentru $n = 1$ obținem

$$y_1 = 3. \text{ Rația progresiei geometrice } (y_n)_n \text{ este } q = \frac{y_{n+1}}{y_n} = 2.$$

3. O minge de baschet cade de la o înălțime de 5,12 m. La fiecare contact cu podeaua din sală, mingea pierde energie, ridicându-se la 75% din înălțimea anterioară.

a) Identifică progresia geometrică asociată fenomenului descris în enunț.

b) De la ce înălțime (exprimată în cm) coboară mingea înainte de a atinge podeaua a cincea oară?

c) Realizează o diagramă cu coloane în care să ilustrezi înălțimea la care urcă mingea după fiecare contact cu podeaua.

d) Determină distanța totală parcursă de minge din momentul în care este lăsată să cadă până la al patrulea contact cu podeaua.



Rezolvare:

a) Exprimăm înălțimea de la care cade mingea în centimetri: 5,12 m = 512 cm.

$$\text{Știm că } 75\% \text{ din } x = \frac{75}{100} \cdot x = \frac{3}{4} \cdot x.$$

Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu primul termen $b_1 = 512$ și rația $q = \frac{3}{4}$, unde b_n reprezintă lungimea înălțimii de la care coboară mingea înainte de a atinge solul de n ori.

CONTEXTUALIZEZ

Progresiile geometrice sunt modele matematice fundamentale pentru descrierea fenomenelor în care variația (creșterea sau descreșterea) se realizează prin multiplicarea cu un factor constant. Acestea sunt esențiale pentru înțelegerea proceselor cu evoluție rapidă.

• Economie și finanțe:

– **Dobânda compusă:** Reprezintă cel mai comun exemplu, în care suma acumulată crește exponențial, deoarece dobânda se aplică și asupra dobânzilor anterior acumulate.

– **Inflația:** Creșterea prețurilor bunurilor și serviciilor cu un anumit procent anual este modelată printr-o progresie geometrică.

– **Investiții bursiere:** Calculul valorii viitoare a portofoliilor care au o rată de creștere medie constantă.

CONTEXTUALIZEZ

Progresiile geometrice pot fi utilizate și în:

• **Biologie și medicină:**

– **Diviziunea celulară:** Multiplicarea celulelor (de la una la două, apoi la patru, opt etc.) urmează o progresie geometrică având rația 2.

– **Răspândirea epidemiilor:** În fazele inițiale, numărul persoanelor infectate poate crește geometric, fiecare bolnav transmitând virusul, în medie, unui număr constant de persoane.

– **Timpul de înjumătățire a medicamentelor:** Procesul prin care concentrația unei substanțe în sânge scade la jumătate, la intervale regulate de timp.

• **Tehnologie și fizică:**

– **Legea lui Moore:** În industria microprocesoarelor, capacitatea de calcul a computerelor s-a dublat aproximativ la fiecare doi ani, formând o progresie geometrică.

– **Radioactivitatea:** Dezintegrarea atomilor unui element radioactiv în timp urmează o progresie geometrică.

$$b) b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow b_5 = 512 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5-1} \Rightarrow b_5 = 2^9 \cdot \frac{3^4}{(2^2)^4} = 2 \cdot 3^4 = 162.$$

Înainte de a atinge solul a cincea oară, mingea coboară de la înălțimea de 162 cm.

c) Realizăm tabelul cu valorile primilor termeni:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
b_n	512	384	288	216	162	121,5	91,125	68,34375

Diagrama este reprezentată în figura 1.

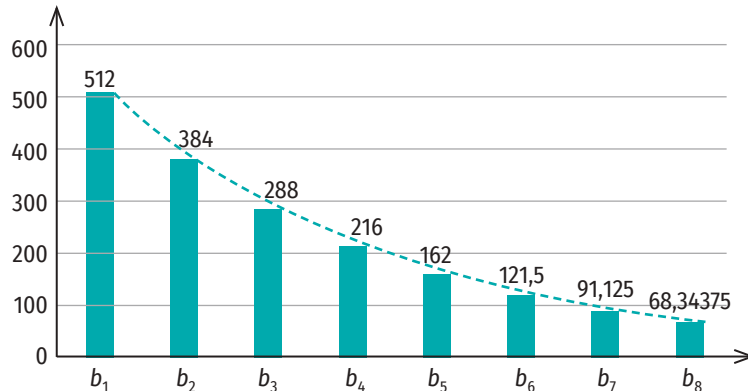


Figura 1

d) Notăm cu L distanța totală parcursă de minge din momentul în care este lăsată să cadă până la al patrulea contact cu podeaua.

$$L = b_1 + 2b_2 + 2b_3 + 2b_4 = 2S_4 - b_1 \quad (1)$$

$$S_4 = b_1 \cdot \frac{q^4 - 1}{q - 1} \Rightarrow S_4 = 512 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^4 - 1}{\frac{3}{4} - 1} \Rightarrow S_4 = 2^9 \cdot \frac{\frac{3^4}{4^4} - 1}{\frac{3}{4} - 1} \Rightarrow S_4 = 2^9 \cdot \frac{3^4 - 2^8}{2^8} \cdot \frac{4}{3 - 4} \Rightarrow$$

$$S_4 = 8 \cdot \frac{81 - 256}{-1} \Rightarrow S_4 = 8 \cdot 175 \Rightarrow S_4 = 1\,400 \quad (2)$$

Înlocuind (2) în (1), obținem $L = 2 \cdot 1\,400 - 512 = 2\,800 - 512 = 2\,288$.

Deci $L = 2\,288 \text{ cm} = 22,88 \text{ m}$.

4. Într-o comunitate izolată apare un virus gripal nou. În prima zi (generația 1), există două persoane infectate. Medicii observă că fiecare persoană bolnavă transmite virusul altor trei persoane sănătoase, în fiecare etapă de transmitere (o etapă durează trei zile). Persoanele care au fost infectate nu pot fi reinfectate.

a) Determină progresia geometrică prin care se modelează răspândirea virusului.

b) Câte persoane vor fi nou infectate în a cincea etapă de transmitere?

c) Care este numărul total de persoane care au fost infectate după cinci etape?

Rezolvare:

a) Fie $(b_n)_n$ progresia geometrică prin care se modelează răspândirea virusului în comunitate. Atunci $b_1 = 2$. Deoarece fiecare bolnav infectează alte trei persoane, numărul de cazuri noi se triplează la fiecare etapă. Prin urmare, rația progresiei geometrice este $q = 3$.

b) Numărul cazurilor noi în a cincea etapă reprezintă termenul b_5 al progresiei geometrice $(b_n)_n$.

Folosind formula termenului general $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$, pentru $n = 5$, obținem $b_5 = b_1 \cdot q^{5-1} = 2 \cdot 3^{5-1} = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$.

Așadar, în a cincea etapă de transmitere au fost infectate 162 de persoane.

c) Pentru a afla câți oameni s-au îmbolnăvit în total, calculăm suma primilor cinci termeni ai progresiei geometrice, folosind formula $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, pentru $n = 5$:

$$S_5 = 2 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} \Rightarrow S_5 = 2 \cdot \frac{243 - 1}{2} \Rightarrow S_5 = 242.$$

Așadar, numărul total de persoane care au fost infectate după cinci etape este 242.

5. Calculează suma $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024}$.

Rezolvare:

Numerele $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{1024}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, cu primul termen egal cu 1 și rația egală cu $-\frac{1}{2}$. Fie $(b_n)_n$ această progresie. Atunci, $b_1 = 1, q = -\frac{1}{2}, b_{11} = \frac{1}{1024}$, deoarece:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Folosind formula $S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, pentru $n = 11, b_1 = 1$ și $q = -\frac{1}{2}$, obținem:

$$S_{11} = 1 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{11} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow S_{11} = \frac{-\frac{1}{2^{11}} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow S_{11} = \frac{2^{11} + 1}{2^{11}} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow S_{11} = \frac{2^{11} + 1}{3 \cdot 2^{10}} \Rightarrow S_{11} = \frac{2049}{3072}.$$

$$\text{Așadar, } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024} = \frac{2049}{3072}.$$

6. Fie $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ și $a \neq b$. Se consideră progresia geometrică $(y_n)_n$ cu $y_1 = a$ și rația $q = \frac{b}{a}$.

a) Calculează suma primilor n termeni ai progresiei geometrice $(y_n)_n$.

b) Demonstrează că $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$, pentru orice numere reale a și $b, a \neq 0$ și $a \neq b, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Rezolvare:

a) Pentru orice progresie geometrică $(b_n)_n$ cu rația $q \neq 1$, avem $S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Aplicând formula pentru progresia geometrică $(y_n)_n$ cu $y_1 = a$ și rația $q = \frac{b}{a}$, obținem:

$$S_n = a \cdot \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^n - 1}{\frac{b}{a} - 1} = a \cdot \frac{\frac{b^n - a^n}{a^n}}{\frac{b - a}{a}} = a \cdot \frac{a^n - b^n}{a^n} \cdot \frac{a}{a - b} = \frac{a^n - b^n}{a^{n-2}(a - b)}.$$

$$\text{Așadar, } S_n = \frac{a^n - b^n}{a^{n-2}(a - b)}. \quad (1)$$

b) Cum $(y_n)_n$ este progresie geometrică, avem $y_n = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} = \frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Atunci,

$$S_n = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n = a + b + \frac{b^2}{a} + \dots + \frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}. \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2) obținem: } \frac{a^n - b^n}{a^{n-2}(a - b)} = a + b + \frac{b^2}{a} + \dots + \frac{b^{n-1}}{a^{n-2}} \mid \cdot a^{n-2} \Rightarrow$$

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1} \mid \cdot (a - b) \Rightarrow$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}), n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \quad (3)$$

OBSERVAȚIE. Egalitatea (3) este valabilă și în cazul în care $a = b$ sau $a = 0$ sau $b = 0$, demonstrația fiind evidentă.

PORTOFOLIU

Identifică și analizează situații din viața reală în care progresele geometrice apar în domenii diferite de cele exemplificate.

Pentru fiecare domeniu:

- descrie o situație reală în care o mărime variază în timp;
- explică de ce această variație poate fi modelată printr-o progresie geometrică.





CONTEXTUALIZEZ

Dobânda compusă

aferentă unui depozit bancar reprezintă suma de bani cu care banca recompensează o persoană pentru menținerea capitalului (suma) în bancă pe o anumită perioadă atunci când dobânda obținută se adaugă la capital și produce, la rândul ei, dobândă în perioadele următoare.

Cu alte cuvinte, dobânda se capitalizează, adică după fiecare perioadă de calcul (de exemplu, un an), dobânda obținută se adaugă la suma inițială, iar în perioada următoare dobânda se calculează nu doar pentru capitalul inițial, ci și pentru capitalul mărit. Astfel, suma de bani acumulată crește mai repede în timp, deoarece dobânda generează, la rândul ei, dobândă.

Aplic

1. Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu rația q și S_n suma primilor n termeni ai acesteia. Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

- a) Dacă $b_2 = 12$ și $b_3 = 32$, atunci $b_1 = \underline{\hspace{2cm}}$.
 b) Dacă $b_1 = 162$ și $q = -\frac{1}{3}$, atunci $b_6 = \underline{\hspace{2cm}}$.
 c) Dacă $b_1 = 4$ și $q = -1$, atunci $b_{100} = \underline{\hspace{2cm}}$.
 d) Dacă $b_4 = 5$ și $b_7 = 40$, atunci $q = \underline{\hspace{2cm}}$.
 e) Dacă $b_1 = 243$, $q = 0, (3)$ și $b_n = 1$, atunci $n = \underline{\hspace{2cm}}$.
 f) Dacă $b_1 = 4$, $q = -3$ și $S_n = 244$, atunci $n = \underline{\hspace{2cm}}$.
 g) Dacă $b_n = \frac{1}{4} \cdot 3^{n-1}$, atunci $q = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

A. În progresia geometrică $(b_n)_n$ avem $b_1 = -3$ și $q = -2$. Atunci:

- a) $b_6 = -192$; b) $b_6 = -13$; c) $b_6 = -96$; d) $b_6 = 96$.

B. În progresia geometrică $(b_n)_n$ avem $b_1 = \frac{9}{16}$ și $b_2 = \frac{3}{8}$. Atunci:

- a) $b_3 = \frac{3}{4}$; b) $b_4 = \frac{1}{6}$; c) $b_4 = \frac{1}{8}$; d) $b_3 = \frac{9}{8}$.

C. În progresia geometrică $(c_n)_n$ avem $c_2 c_{11} = 11$. Atunci:

- a) $c_1 + c_{12} = 11$; b) $c_1 c_{12} = 11$; c) $c_5 c_7 = 11$; d) $c_6^2 = 11$.

D. În progresia geometrică $(d_n)_n$ avem $d_3 = 7$. Atunci:

- a) $d_2 d_4 = 7$; b) $d_2 d_4 = \sqrt{7}$; c) $d_2 d_4 = 49$; d) $d_2 + d_4 = 14$.

E. Suma primilor n termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_n$ este $S_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$. Atunci:

- a) $b_2 = 2$; b) $b_2 = \frac{3}{2}$; c) $b_2 = \frac{3}{4}$; d) $b_2 = \frac{9}{4}$.

3. Determină primii cinci termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)_n$:

- a) $b_1 = 2$ și $q = -3$; e) $b_1 = 5^5$ și $b_6 = 1$;
 b) $b_1 = 648$ și $q = \frac{1}{2}$; f) $b_1 + b_2 = \frac{3}{125}$ și $b_2 - b_1 = \frac{2}{125}$;
 c) $b_1 = 4$ și $b_2 - b_1 = 8$; g) $b_1 = -3$ și $b_{n+1} = -3b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
 d) $b_1 = 777$ și $\frac{b_3}{b_2} = 0,1$;

4. Arată că șirul $(a_n)_n$ este progresie geometrică. Determină primul termen și rația acesteia.

- a) $a_n = 4 \cdot 3^{n-2}$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$; b) $a_n = \frac{5}{2^{n-1}}$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

5. a) Determină numărul real x pentru care numerele 1, 3, $2x + 7$ sunt în progresie geometrică.

b) Determină numărul real x pentru care numerele 1, 4, $2x$ sunt în progresie geometrică.

c) Determină numărul real x pentru care numerele $x - 2$, $x - 1$, $x + 1$ sunt în progresie geometrică.

d) Determină numărul real x pentru care numerele $2x - 3$, 3, $4x + 1$ sunt în progresie geometrică.

6. Determină valorile numărului real x pentru care următoarele numere sunt în progresie geometrică:

a) $1, 3, 2x + 7$; c) $x, x - 1, x + 6$; e) $x^2 - \sqrt{5}, 2x, x^2 + \sqrt{5}$;
b) $x - 2, x - 1, x + 1$; d) $5 - x^2, x, x^2$; f) $\frac{2}{2x+1}, 1, \frac{2x+1}{x+1}$.

7. Determină suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, știind că suma primilor doi termeni este egală cu 9, iar diferența dintre al doilea termen și primul termen este egală cu 3.

8. Calculează:

a) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{10}$;
b) $1 - 2 + 4 - 8 + \dots + 1\,024$;
c) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots - \frac{1}{3^9}$;
d) $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left((\sqrt{2})^2 + \frac{1}{(\sqrt{2})^2}\right)^2 + \left((\sqrt{2})^3 + \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\right)^2 + \dots + \left((\sqrt{2})^n + \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\right)^2$;
e) $9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{9999999\dots 9}_{\text{de } 2\,026 \text{ de ori } 9}$.

9. Rezolvă ecuațiile în mulțimea numerelor reale:

a) $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{11} = 0$; c) $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 = 0$;
b) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^9 = 0$; d) $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{32} = 0$.

10. Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu rația q ($q \neq \pm 1$).

a) Demonstrează că $(b_k^{-1} + b_{k+1}^{-1})^{-1} = \frac{1}{q+1} b_{k+1}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.
b) Demonstrează că:
i) $(1^{-1} + 2^{-1})^{-1} + (2^{-1} + 2^{-2})^{-1} + (2^{-2} + 2^{-3})^{-1} + \dots + (2^{-99} + 2^{-100})^{-1} = \frac{2(2^{100} - 1)}{3}$;
ii) $\frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}} + \dots + \frac{1}{\frac{1}{2^{44}\sqrt{2}} + \frac{1}{2^{45}}} = \sqrt{2}(2^{45} - 1)$.

11. Determină primul termen și rația progresiei geometrice $(b_n)_n$, știind că:

a) $b_2 + b_1 = 8$ și $b_2 - b_1 = 4$;
b) $b_1 + b_2 + b_3 = 3$ și $b_2 + b_3 + b_4 = -6$;
c) $b_5 - b_4 = 48$ și $b_4 - b_2 = 36$;
d) $\frac{b_1}{b_3} = 0,25$ și $S_8 = 255$, unde S_n reprezintă suma primilor n termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_n$;
e) $b_2 - b_4 + b_5 = 22$ și $b_1 - b_3 + b_4 = -11$.

12. Fie șirurile $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$, unde $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 2}$ și $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determină a_1 , a_2 și a_3 .
b) Arată că $b_2^2 = b_1 b_3$.
c) Demonstrează că șirul $(b_n)_n$ este progresie geometrică.
d) Demonstrează că $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n \leq 0,75$, pentru orice număr natural nenul n .

PROVOCARE!

Enigma lui Zenon: Ahile și broasca-țestoasă

În secolul al V-lea î.H., filozoful grec Zenon din Elea a formulat un paradox celebru. Acesta dorea să demonstreze că mișcarea este o iluzie și, în esență, imuabilă. Cea mai cunoscută provocare a sa rămâne o cursă imaginară care pare să sfideze legile fizicii prin puterea matematicii.

Imaginează-ți o întrecere neobișnuită între rapidul Ahile și o broască-țestoasă care are un avans de 100 m. Când cursa începe, Ahile ajunge rapid în punctul de unde a plecat broasca, dar ea a mai înaintat o mică distanță în acest timp. El parcurge și acel segment, dar țestoasa mai face câțiva pași. Ori de câte ori Ahile ajunge în locul unde broasca s-a aflat anterior, ea a parcurs deja o nouă distanță. Teoretic, Ahile n-ar putea să o ajungă niciodată, având de parcurs o infinitate de segmente de drum.

Tu cum ai rezolva această dilemă?



INDICAȚIE

Pentru calcul poți folosi aplicația *Calculator* de pe telefonul mobil, tabletă sau computer. Aproximează suma la numere întregi.

13. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $a + b \neq 0$, și progresia geometrică $(y_n)_n$ cu $y_1 = a$ și rația $q = -\frac{b}{a}$.
 - a) Calculează suma primilor $2n + 1$ termeni ($n \in \mathbb{N}^*$) ai progresiei geometrice $(y_n)_n$.
 - b) Demonstrează că $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots - ab^{2n-1} + b^{2n})$, pentru orice numere reale a și b , $a \neq 0$, $a + b \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
14. Fie progresia geometrică $(b_n)_n$. Arată că șirul $(c_n)_n$ definit prin $c_n = b_n - b_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este progresie geometrică.
15. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_n$ cu $b_1 = 2$ și $b_4 = 54$. Determină numărul natural nenul n pentru care $b_1 + b_2 + \dots + b_{2n} = 6\,560$.
16. Rata anuală de creștere a populației unui stat este de 1%. Populația actuală este de 100 000 000 de locuitori. Cu cât va crește numărul de locuitori în patru ani?
17. O instalație de filtrare a apei reziduale reține, la fiecare ciclu de filtrare, 20% din impuritățile rămase în apă. Inițial, apa conține o concentrație de impurități de 500 mg/l. Determină concentrația de impurități după 10 cicluri de filtrare. Este apa sigură pentru deversare, dacă limita legală este de 60 mg/l?
18. Ilie a depus la bancă suma de 100 000 € în regim de dobândă compusă pe o perioadă de 5 ani, cu rata anuală de 8% pe an. Ce sumă va încasa la sfârșitul perioadei?
19. O soluție salină este lăsată într-un dispozitiv de evaporare controlată. În fiecare oră, din cauza căldurii, se evaporă o cantitate de apă, astfel încât concentrația sării în soluție crește cu 10% față de ora precedentă. Concentrația inițială este de 2%. Care va fi concentrația soluției după 8 ore?
20. Un precipitat chimic reține impurități care trebuie eliminate prin spălări succesive. La fiecare spălare cu un volum fix de solvent se elimină 60% din cantitatea de impurități prezente în precipitat. Masa inițială de impurități este de 100 g. Calculează masa de impurități rămasă după a patra spălare.
21. O mașină nouă costă 30 000 €. Se estimează că mașina se devalorizează cu 20% în fiecare an, ceea ce înseamnă că, la sfârșitul fiecărui an, mașina valorează 80% din prețul avut în anul anterior. Care va fi valoarea mașinii după patru ani?

Portofoliu

Să presupunem că Ahile aleargă cu o viteză de 10 m/s, iar broasca-țestoasă cu 1 m/s. Broasca are un avans de 100 m.

1. Calculează primele patru distanțe pe care Ahile trebuie să le parcurgă succesiv pentru a atinge locul prin care tocmai a trecut broasca (d_1 este avansul inițial de 100 m, d_2 este distanța parcursă de broască în timp ce Ahile parcurge d_1 etc.).
2. Demonstrează că șirul distanțelor $(d_n)_n$ identificate la punctul 1 reprezintă o progresie geometrică. Precizează primul termen d_1 și rația q .
3. Folosind formula sumei primilor n termeni ai unei progresii geometrice, calculează distanța parcursă de către Ahile după 10 astfel de „pași”. Ce observi pe măsură ce n crește?
4. La ce bornă kilometrică va depăși Ahile broasca-țestoasă?



Studiu de caz



Jocul de șah a apărut în Gupta (pe teritoriul actual al Indiei), în jurul secolului VI d.H., unde se numea „chaturanga” (cuvânt sanscrit care desemna o formațiune de luptă), referindu-se la cele patru ramuri ale armatei indiene: elefanți, cavalerie, care de luptă și infanterie. Din India, jocul a ajuns în Imperiul Sasanid (Persia), unde a fost numit „chatrang”, apoi „shatranj”.

Legenda spune că inventatorul i-a prezentat regelui Imperiului Sasanid jocul de șah. Regele a fost deosebit de încântat de acest joc și a vrut să-l răsplătească pe inventator din plin. Modest, el a refuzat inițial răsplata, dar apoi, la insistențele regelui, a cerut o răsplată aparent neînsemnată: boabe de grâu după următoarea regulă – un bob pentru primul pătrat al tablei de șah, două boabe pentru al doilea, patru pentru al treilea, opt pentru al patrulea și așa mai departe. Regele a considerat că solicitarea era neînsemnată, însă în scurt timp a realizat că inventatorul cerea, de fapt, o răsplată surprinzător de mare.

Pentru a afla dacă ar fi fost posibil ca regele să onoreze plata și alte curiozități, vei parcurge următoarele etape:

Etapa 1 – Progresia geometrică

1. Identifică progresia geometrică prin care poate fi modelată situația descrisă în enunț.
2. Determină suma primilor 64 de termeni ai progresiei (numărul de boabe de grâu cerute de inventator).

Etapa 2 – Inteligența artificială în acțiune

3. Folosind IA (inteligența artificială), determină numărul mediu de boabe de grâu dintr-un kilogram de grâu la culturile din prezent, la culturile de acum 100 de ani, respectiv la culturile din secolul al VII-lea d.H.
4. Transformă numărul boabelor de grâu aflate la punctul 2 în tone (ținând cont de numărul mediu de boabe dintr-un kilogram în secolul al VII-lea d.H.).

Etapa 3 – Istorie sau legendă?

5. Documentează-te privind granițele Imperiului Sasanid din acea perioadă, apoi identifică statele actuale aflate pe teritoriul fostului imperiu.
6. Folosind resurse digitale (enciclopedii online, hărți sau IA), caută care este producția anuală de grâu ce se recoltează astăzi în fiecare stat identificat la punctul 5.

Etapa 4 – Analiza rezultatelor

7. Folosind IA, află de câte ori a crescut producția mondială de grâu față de cea din anii 1900, respectiv față de cea din anii 600 d.H.
8. Ținând cont de punctul 7, estimează care era producția anuală de grâu a Imperiului Sasanid.
9. Află în câți ani l-ar fi putut răsplăti regele pe inventator.

Când regele a aflat că întreaga recoltă a lumii, strânsă timp de sute de ani, nu ar fi fost de ajuns pentru a umple tabla, a înțeles că inventatorul era un maestru al minții! Aceasta legendă a rămas peste veacuri drept „problema boabelor de grâu”, simbol al creșterii exponențiale.

Observație:



Exerciții recapitulative

1. O sală de spectacole are 20 de rânduri de scaune. Pe fiecare rând, începând cu al doilea, sunt cu două locuri mai multe decât pe rândul anterior. Pe al doilea rând sunt 15 locuri. Determină numărul de locuri de pe primul și de pe al optulea rând și numărul total de locuri din sală.
 2. Călin și Mircea trebuie să citească o carte. Mircea citește în prima zi cinci pagini, iar în zilele următoare citește de două ori mai multe pagini decât în ziua precedentă, terminând de citit cartea în cinci zile. Călin citește în prima zi două pagini, iar în zilele următoare citește cu trei pagini mai mult decât în ziua precedentă.
 - a) Câte pagini a citit în ultima zi Mircea?
 - b) Câte pagini are cartea?
 - c) Câte pagini citește Călin în a cincea zi?
 - d) În câte zile citește Călin cartea?
 3. Un pacient aflat în recuperare medicală trebuie să meargă în prima zi 500 de pași. Medicul îi recomandă să crească distanța cu 150 de pași în fiecare zi. Pacientul este considerat recuperat atunci când ajunge să parcurgă 5 000 de pași zilnic. După câte zile se recuperează pacientul?
 4. O echipă formată din mai mulți specialiști trebuie să realizeze un proiect. Durata de realizare a proiectului este de 30 de zile. În urma negocierilor se propun două modalități de plată:
 - i. O sumă fixă de 1 000 000 de euro pentru întreaga perioadă;
 - ii. O sumă obținută din adunarea veniturilor primite zilnic, unde plata se face astfel: un eurocent în prima zi, 2 eurocenți în a doua zi, 4 eurocenți în a treia zi și așa mai departe, suma dublându-se zilnic.
 Care dintre cele două variante de plată este mai avantajoasă? Justifică răspunsul.
 5. Un grup de turiști urcă pe un munte. În prima oră, aceștia parcurg o diferență de nivel de 200 de metri, dar, din cauza oboselii, în fiecare dintre orele următoare urcă cu 20 de metri mai puțin decât în ora anterioară. Parcurgerea întregului traseu a durat cinci ore. Dacă turiștii au pornit de la altitudinea de 1 200 de metri, la ce altitudine se aflau după parcurgerea traseului?
 6. O substanță radioactivă își înjumătățește masa în fiecare oră. Dacă masa inițială a fost de 640 de grame, ce masă va mai rămâne din substanță după șase ore?
 7. Pavel a depus la bancă suma de 20 000 € în regim de dobândă compusă pe o perioadă de 5 ani, cu rata anuală de 8%. Ce sumă va încasa la sfârșitul perioadei?
- INDICAȚIE:** Pentru calcul poți folosi aplicația *Calculator* de pe telefonul mobil, tabletă sau computer. Aproximează suma la numere întregi.
8. Un produs costă 800 de lei. În fiecare lună se aplică o reducere de 5% față de prețul lunii precedente.
 - a) Identifică progresia care descrie acest proces.
 - b) Determină prețul produsului la începutul celei de-a șasea luni. Rotunjește numărul la întregi.
 - c) Care este scăderea totală procentuală la începutul celei de-a șasea luni?
 9. Suprafața ocupată de nuferii de pe un lac se dublează zilnic. Dacă durează 40 de zile pentru ca nuferii să acopere întregul lac, în cât timp vor ajunge aceștia să acopere un sfert din suprafața lui?
 10. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $a_1 = 5$ și $a_3 = 17$.
 - a) Determină rația progresiei aritmetice $(a_n)_n$.
 - b) Determină termenii a_2 , a_4 și a_{25} .
 - c) Verifică dacă numărul 533 este termen al progresiei aritmetice $(a_n)_n$.
 - d) Calculează suma primilor 25 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$.





11. Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu $b_1 = 5$ și $b_4 = -40$.
 - a) Determină rația progresiei geometrice $(b_n)_n$.
 - b) Determină termenii b_2 , b_3 și b_5 .
 - c) Verifică dacă numărul real -640 este termen al progresiei geometrice $(b_n)_n$.
 - d) Calculează suma primilor 10 termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_n$.
12. Demonstrează că șirul cu termenul general $x_n = 4 - 3n$, $n \in \mathbb{N}^*$, este progresie aritmetică. Determină primul termen și rația acestei progresii.
13. Demonstrează că șirul cu termenul general $y_n = 3 \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, este progresie geometrică. Determină primul termen și rația acestei progresii.
14. Determină formula termenului general al progresiei aritmetice $(a_n)_n$ cu $a_7 - a_5 = 6$ și $a_5 = 8$.
15. Determină formula termenului general al progresiei geometrice $(b_n)_n$ cu $\frac{b_4}{b_1} = 8$ și $b_2 = 6$.
16. Determină numărul real x pentru care numerele $2x - 7$, 4 , $2x + 3$ sunt în progresie aritmetică.
17. Determină numărul real x pentru care numerele $x - 8$, $x - 4$, $x + 8$ sunt în progresie geometrică.
18. Calculează sumele:
 - a) $29 + 26 + 23 + \dots + 5$;
 - b) $2 + 9 + 16 + 23 + \dots + 142$;
 - c) $1 - 2 + 4 - 8 + \dots + 256$;
 - d) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^9}$.
19. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:
 - a) $1 + 5 + 9 + 13 + \dots + x = 496$;
 - b) $1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + x = 612$.
20. Numerele reale a , b și c sunt în progresie aritmetică, iar numerele a , $b - 1$ și c sunt în progresie geometrică. Determină numerele a , b și c , știind că suma lor este 15.
21. Numerele reale x , y și z sunt în progresie geometrică, iar numerele $x - 1$, $y + 1$ și z sunt în progresie aritmetică. Determină suma pătratelor numerelor x , y și z , știind că produsul lor este 216.
22. Arată că, pentru orice număr real x , numerele $x + 1$, $x + 2$ și $x + 3$ nu pot fi în progresie geometrică.
23. Determină primul termen și rația progresiei aritmetice $(a_n)_n$.
 - a) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = -2 \\ a_4 = 18 \end{cases}$;
 - b) $\begin{cases} a_2 = 5 \\ S_5 = 5 \end{cases}$;
 - c) $\begin{cases} a_5 - a_1 = 2 \\ a_3 = 3 \end{cases}$.
24. Determină primul termen și rația progresiei geometrice $(b_n)_n$.
 - a) $\begin{cases} b_1 + b_2 = 8 \\ 3b_1 = b_2 \end{cases}$;
 - b) $\begin{cases} S_3 = -3 \\ b_1 = -1 \end{cases}$;
 - c) $\begin{cases} \frac{b_4}{b_1} = \frac{1}{8} \\ b_2 - b_3 = 2 \end{cases}$.
25. Calculează suma primilor 25 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$, știind că $a_7 + a_{14} + a_{18} = 99$.
26. Câte submulțimi cu 500 de elemente în progresie aritmetică are mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 1\,000\}$?
27. Câte submulțimi cu 8 elemente în progresie geometrică are mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 1\,000\}$?
28. Fie șirurile $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ cu $x_1 = 6$, $x_{n+1} = \frac{x_n - 6}{x_n - 4}$ și $y_n = \frac{x_n - 3}{x_n - 2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Determină x_1 , x_2 și x_3 .
 - b) Arată că $y_2^2 = y_1 y_3$.
 - c) Demonstrează că șirul $(y_n)_n$ este progresie geometrică.
 - d) Arată că $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{10} \leq 768$.
29. Fie $(b_n)_n$ o progresie geometrică. Arată că șirul $(c_n)_n$, definit prin $c_n = b_n b_{n+1}^p$, unde $n, p \in \mathbb{N}^*$, este progresie geometrică.

Timp de lucru: 45 de minute

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I

30 de puncte

30 de puncte	1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.
(10 p.)	A. Fie $(x_n)_n$ un șir cu termenul general $x_n = \frac{n^2 + 1}{n + 2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Numărul natural 2 este termenul de rang k al șirului $(x_n)_n$. Atunci:
	a) $k = -1$; b) $k = 2$; c) $k = 3$; d) $k = 4$.
(10 p.)	B. Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu rația q , $b_5 = 48$ și $b_2 = 6$. Atunci $b_1 + q$ este egal cu:
	a) 6; b) 9; c) 8; d) 5.
(10 p.)	C. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $S_5 = 15$ (S_n reprezintă suma primilor n termeni). Atunci a_3 este egal cu:
	a) 5; b) 2; c) -1; d) 3.

Subiectul al II-lea

60 de puncte

Scrie rezolvările complete.

60 de puncte	1. Laurențiu depune la bancă suma de 12 000 de lei în regim de dobândă simplă, pe o perioadă de 9 luni, cu rata anuală a dobânzii de 6%. Care este valoarea capitalului la sfârșitul celor 9 luni?
(10 p.)	
(10 p.)	2. Determină numărul real nenul x pentru care numerele 1, $x + 1$ și $2x^2 + 1$ sunt în progresie geometrică.
(15 p.)	3. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu termeni raționali, care are rația $r = 2$ și $a_1 a_2 a_3 a_4 = -15$. Determină primul termen al progresiei $(a_n)_n$.
	4. Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu $b_1 + b_2 + b_3 = 9$ și $b_3 - b_1 = 9$.
(15 p.)	a) Determină primul termen și rația progresiei $(b_n)_n$.
(10 p.)	b) Determină numărul natural nenul n pentru care $S_n = 1 - 2^{10}$.

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din această unitate.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	5 foarte bine	4 bine	3 mediu	2 slab	1 foarte slab
Mi-a fost ușor să rezolv exercițiile.					
Am înțeles criteriile de rezolvare.					
Mi-am amintit conținuturile învățate.					

Funcții

3

► 1. Proprietăți generale ale funcțiilor

- 1.1. Funcții: definiție, exemple, modalități de a descrie o funcție, funcții egale, restricții ale unei funcții, imaginea unei funcții
- 1.2. Reprezentarea grafică a unei funcții definite pe submulțimi ale lui $\mathbb{R}$, intersecția graficului cu axele de coordonate, drepte în plan de forma $x = m$ sau de forma $y = m$, $m \in \mathbb{R}$; semnul unei funcții numerice, interpretarea geometrică a soluțiilor ecuațiilor de forma $f(x) = m$ și $f(x) = g(x)$
- 1.3. Proprietăți ale funcțiilor numerice: monotonie, mărginire, paritate/imparitate, convexitate/concavitate; lecturi grafice

► 1.4. Funcții obținute prin operații algebrice elementare (sumă, diferență, produs, raport); compunerea funcțiilor

► 1.5. Funcții injective, surjective, bijective, inversabile: definiție, interpretare geometrică pentru funcții numerice, condiția necesară și suficientă ca o funcție să fie inversabilă; lecturi grafice

► 2. Funcția de gradul al doilea

- 2.1. Definiție, reprezentare grafică, intersecțiile reprezentării grafice cu axele de coordonate, axa de simetrie
- 2.2. Monotonia funcției de gradul al doilea; punctul de extrem
- 2.3. Semnul funcției de gradul al doilea; interpretare geometrică (poziția

unei parabole în raport cu axa Ox), inecuații de gradul al doilea studiate pe mulțimea $\mathbb{R}$ sau pe intervale de numere reale; interpretare geometrică (proiecții ale unor porțiuni de parabolă pe axe)

► 2.4. Relațiile lui Viète

► 2.5. Sisteme care conțin ecuații de gradul al doilea; interpretare geometrică

► 3. Funcția putere cu exponent întreg. Funcția radical

- 3.1. Funcția putere cu exponent întreg
- 3.2. Radicali, operații cu radicali, proprietățile radicalilor; expresii conjugate
- 3.3. Funcția radical
- 3.4. Ecuații și inecuații cu radical

1.1. Funcții: definiție, exemple, modalități de a descrie o funcție, funcții egale, restricții ale unei funcții, imaginea unei funcții

Descopăr



O firmă de taxi percepe pentru efectuarea unei curse o taxă de pornire de 4 lei, iar pentru fiecare kilometru parcurs costul este de 5 lei.

a) Completează tabelul de mai jos, unde $t(d)$ reprezintă tariful perceput pentru parcurgerea a d kilometri.

d (km)	5	6	7,2	8	9,5	10	11,8	12
$t(d)$ (lei)								

b) Scrie funcția care exprimă tariful perceput în funcție de distanța parcursă.

Învăț

Din cele mai vechi timpuri s-au căutat modalități de a trece de la interpretarea intuitivă a unor procese la o abordare riguroasă, care să poată conduce la modelarea unor fenomene complexe. Astfel, în multe domenii precum matematica, fizica, chimia, biologia sau economia, s-a studiat modul în care anumite fenomene sunt interdependente, pentru a le descrie, a le explica și a le prezice evoluția. În acest context, funcția este o noțiune de bază în matematică, realizând legătura între două mulțimi.

Definiția 1. Fie A și B două mulțimi nevide. Prin funcție definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B se înțelege orice lege (procedeu, convenție) f , care face ca fiecărui element a din mulțimea A să îi corespundă un unic element din mulțimea B , notat $f(a)$.

Se notează „ $f: A \rightarrow B$ ” și se citește „funcția f definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B ” ($f(a)$ se citește „ f de a ”).

EXEMPLE:

1. Fie A mulțimea țărilor membre ale Uniunii Europene și B mulțimea capitalelor acestora. Definim funcția $f: A \rightarrow B$ după legea de corespondență: fiecărei țări i se asociază capitala sa.

De exemplu, $f(\text{România}) = \text{București}$, $f(\text{Franța}) = \text{Paris}$.

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$;

3. $f: \{-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 2$.

Definirea funcției $f: A \rightarrow B$ presupune existența a trei elemente:

- o mulțime A (nevidă) pe care este definită funcția, numită **domeniul de definiție** al funcției;
- o mulțime B (nevidă) în care ia valori funcția, numită **codomeniul** funcției sau mulțimea în care funcția ia valori;
- un procedeu (**lege de corespondență**, convenție etc.) f , care face ca fiecărui element x din mulțimea A să îi corespundă un unic element $y = f(x)$ din mulțimea B . Procedul (legea, convenția etc.) se notează, în general, cu diverse litere (de exemplu: f , g , h , i , j etc.).

EXEMPLU:

Domeniul de definiție al funcției $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $f(x) = 2x - 3$, este mulțimea $\{0, 1, 2, 3\}$, iar codomeniul este mulțimea $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

OBSERVAȚIE.

Domeniul maxim de definiție al unei funcții numerice reprezintă mulțimea tuturor valorilor pe care le poate lua variabila pentru care legea de corespondență are sens.

De exemplu, $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ reprezintă domeniul maxim de definiție al unei funcții a cărei lege de corespondență este $x \rightarrow \frac{4}{x-1}$.

Definiția 2. Fie funcția $f: A \rightarrow B$, unde A și B sunt mulțimi nevide. Pentru fiecare $x \in A$, elementul $y = f(x) \in B$ se numește **imaginea lui x prin f sau valoarea funcției f în x** . În scrierea $f(x)$, x se numește **argument sau variabilă**.

OBSERVAȚIE.

Fie funcția $f: A \rightarrow B$, unde A și B sunt mulțimi nevide. Dacă $x \in A$ și $y = f(x) \in B$, atunci x se numește **preimagea lui y prin f** .

EXEMPLU:

Se consideră funcția $f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $f(x) = x + 2$. Imaginea lui 1 prin f sau valoarea funcției f în 1 este 3, deoarece $f(1) = 3$. Putem spune că 1 este preimagea lui 3 prin f .

Modalități de a descrie o funcție

Se disting două moduri de a descrie o funcție:

- **sintetic** – pentru fiecare element din domeniul de definiție al funcției se precizează elementul care i se asociază din codomeniul acesteia. Acest lucru se poate realiza și cu ajutorul **diagramelor Venn-Euler** (figura 1) sau a unui tabel, numit **tabel de valori al funcției** (figura 2).

EXEMPLU:

Fie $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ și $B = \{1, 4\}$. Definim funcția $f: A \rightarrow B$ astfel: $f(-2) = 4$, $f(-1) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$.

Legea de corespondență poate fi reprezentată grafic cu ajutorul diagramelor Venn-Euler (figura 1) sau cu ajutorul unui tabel (figura 2).

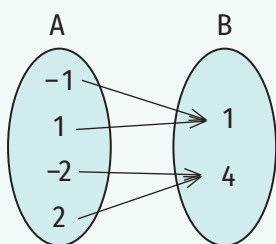


Figura 1

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	4	1	1	4

Figura 2

- **analitic** – se precizează relația care leagă un element arbitrar $a \in A$ de elementul $f(a) \in B$.

EXEMPLE:

1. $f: \{-2, -1, 1, 2\} \rightarrow \{1, 4\}$, $f(x) = x^2$;

2. $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $f(n) = \text{restul împărțirii numărului natural } n \text{ la } 5$.

OBSERVAȚIE.

Aceleiași formule/expresii algebrice îi putem asocia mai multe funcții. De exemplu, expresiei algebrice x^2 îi putem asocia funcțiile $f_1: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, $f_1(x) = x^2$, $f_2: \{-2, -1, 1, 2\} \rightarrow \{1, 4\}$, $f_2(x) = x^2$ și nu numai.

Funcții egale

Definiția 3. Fie mulțimile nevide A, B, C și D . Două funcții $f: A \rightarrow B$ și $g: C \rightarrow D$ sunt egale dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$, pentru orice $x \in A$. Se notează $f = g$.

EXEMPLU:

Funcțiile $f, g: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $f(x) = x^4$, $g(x) = |x|$, sunt egale.

Într-adevăr, funcțiile f și g au același domeniu de definiție și același codomeniu. (1)

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = (-1)^4 = 1 \\ g(-1) = |-1| = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-1) = g(-1)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^4 = 0 \\ g(0) = |0| = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = g(0)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1^4 = 1 \\ g(1) = |1| = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = g(1)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = g(-1) \\ f(0) = g(0) \\ f(1) = g(1) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x), \text{ pentru orice } x \in \{-1, 0, 1\} \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă $f = g$.

OBSERVAȚIE.

Două funcții $f, g: A \rightarrow B$ ($A, B \neq \emptyset$) nu sunt egale dacă există cel puțin un element $x_0 \in A$ pentru care $f(x_0) \neq g(x_0)$.

Restricții ale unei funcții

Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție și $A' \subset A$ ($A' \neq \emptyset$). Putem defini **funcția $g: A' \rightarrow B$, $g(x) = f(x)$ pentru orice $x \in A'$** . Funcția g astfel definită se numește **restricția funcției f la submulțimea $A' \subset A$** și se notează $g = f|_{A'}$.

EXEMPLU:

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$.

Restricția funcției f la intervalul $(-\infty, 0)$ este funcția $g: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x+1$ ($g = f|_{(-\infty, 0)}$), iar **restricția funcției f la intervalul $[0, +\infty)$** este funcția $h: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x$ ($h = f|_{[0, +\infty)}$).

OBSERVAȚII.

1. Graficul restricției unei funcții f este o submulțime a graficului funcției f .
2. O funcție poate avea mai multe restricții.

EXEMPLU:

Funcțiile $f_1: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = 2x - 3$, $f_2: (2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = 2x - 3$, $f_3: (3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x) = 2x - 3$, sunt restricții ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$.

Imaginea unei funcții

Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție. **Imaginea funcției f este:**

$$Im f = f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in B \mid (\exists)x \in A \text{ astfel încât } f(x) = y\}.$$

EXEMPLE:

1. $f: \{1, 3, 5\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$. Cum $f(1) = 5$, $f(3) = 9$ și $f(5) = 13$, obținem $Im(f) = \{5, 9, 13\}$.

2. $f: (-\infty, 4) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 1$

Fie $y \in \text{Im } f$. Atunci există $x \in (-\infty, 4)$, astfel încât $f(x) = y$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow -3x + 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{3}$$

Cum $x \in (-\infty, 4)$, obținem $\frac{1-y}{3} < 4$, de unde rezultă că $y > -11$, adică $y \in (-11, +\infty)$.

Am demonstrat că $\text{Im } f \subseteq (-11, +\infty)$. (3)

Pentru a demonstra că $\text{Im } f = (-11, +\infty)$, trebuie să arătăm că $(-11, +\infty) \subseteq \text{Im } f$.

Fie $y \in (-11, +\infty)$. Atunci $\frac{1-y}{3} < 4$, de unde rezultă că există $x \in (-\infty, 4)$ astfel încât $x = \frac{1-y}{3}$ (sau $y = -3x + 1$).

Am demonstrat că există $x \in (-\infty, 4)$ astfel încât $-3x + 1 = y$, ceea ce este echivalent cu $f(x) = y$, deci $(-11, +\infty) \subseteq \text{Im } f$. (4)

Din (3) și (4) rezultă că $\text{Im } f = (-11, +\infty)$.

OBSERVAȚII.

1. Pentru orice funcție $f: A \rightarrow B$, avem $\text{Im } f \subseteq B$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale. Atunci:

- $\text{Im } f = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, dacă $a \neq 0$;
- $\text{Im } f = f(\mathbb{R}) = \{b\}$, dacă $a = 0$.

Definiția 4. Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție. Se numește imaginea mulțimii $C \subset A$ prin funcția f mulțimea $f(C) = \{f(x) \mid x \in C\} = \{y \in B \mid (\exists)x \in C, \text{ astfel încât } f(x) = y\}$.

EXEMPLU:

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$. Ne propunem să determinăm imaginea mulțimii $(2, 3)$ prin funcția f .

Fie $y \in f((2, 3))$. Atunci există $x \in (2, 3)$, astfel încât $f(x) = y$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2x + 3 = y \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}$$

Cum $x \in (2, 3)$, obținem $2 < \frac{y-3}{2} < 3$, de unde rezultă $7 < y < 9$, adică $y \in (7, 9)$.

Am demonstrat că $f((2, 3)) \subseteq (7, 9)$. (5)

Pentru a demonstra că $f((2, 3)) = (7, 9)$, trebuie să arătăm că $(7, 9) \subseteq f((2, 3))$.

Fie $y \in (7, 9)$. Atunci $2 < \frac{y-3}{2} < 3$, de unde rezultă că există $x \in (2, 3)$, astfel încât $x = \frac{y-3}{2}$ (sau $y = 2x + 3$).

Am demonstrat că există $x \in (2, 3)$ astfel încât $2x + 3 = y$, ceea ce este echivalent cu $f(x) = y$, deci $(7, 9) \subseteq f((2, 3))$. (6)

Din (5) și (6) rezultă că $f((2, 3)) = (7, 9)$.

Definiția 5. Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție. Se numește preimaginea mulțimii $C \subset B$ prin funcția f mulțimea $f^{-1}(C) = \{x \mid x \in A \text{ și } f(x) \in C\}$.

EXEMPLU:

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x - 2$. Ne propunem să determinăm preimaginea mulțimii $[0, 7; +\infty)$ prin funcția f .

Fie $x \in f^{-1}([0,7; +\infty))$. Atunci $x \in \mathbb{R}$ și $5x - 2 \geq 0,7$.

$$5x - 2 \geq 0,7 \Rightarrow 5x \geq 2,7 \Rightarrow x \geq 0,54 \Rightarrow x \in [0,54; +\infty)$$

Am demonstrat că $f^{-1}([0,7; +\infty)) \subseteq [0,54; +\infty)$. (7)

Pentru a demonstra că $f^{-1}([0,7; +\infty)) = [0,54; +\infty)$, trebuie să arătăm că $[0,54; +\infty) \subseteq f^{-1}([0,7; +\infty))$.

Fie $x \in [0,54; +\infty)$. Atunci:

$$x \geq 0,54 \Rightarrow 5x - 2 \geq 0,7 \Rightarrow f(x) \in [0,7; +\infty) \Rightarrow x \in f^{-1}([0,7; +\infty)). \quad (8)$$

Din (7) și (8) rezultă că $f^{-1}([0,7; +\infty)) = [0,54; +\infty)$.

În continuare vom prezenta câteva funcții importante: **funcția modul, funcția parte întreagă și funcția parte fracționară.**

Funcția modul

Din clasele anterioare, știm că axa numerelor este o dreaptă pe care s-a fixat un punct O, numit origine, un sens pozitiv și o unitate de măsură. Oricărui număr real x îi putem asocia un punct pe axa numerelor. Vom spune că punctul respectiv are coordonata x . De exemplu, în figura 3, punctul A are coordonata 1 (scriem A(1) și citim „punctul A de coordonată 1”), punctul B are coordonata -3 (scriem B(-3) și citim „punctul B de coordonată -3”), iar punctul C are coordonata $\sqrt{5}$ (scriem C($\sqrt{5}$) și citim „punctul C de coordonată $\sqrt{5}$ ”).

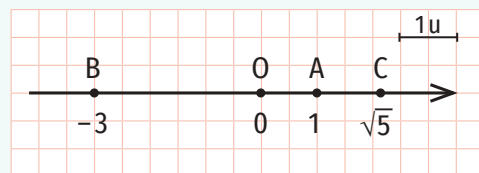


Figura 3

Distanța de la originea axei numerelor la punctul prin care este reprezentat un număr real x pe axa numerelor se numește modulul numărului real x . Se notează cu $|x|$.

Modulul unui număr real se mai numește și valoare absolută.

EXEMPLE:

1. Modulul numărului real -3 este egal cu distanța de la punctul O la punctul B(-3), deci $|-3| = 3$.
2. Modulul numărului real $\sqrt{5}$ este egal cu distanța de la punctul O la punctul C($\sqrt{5}$), deci $|\sqrt{5}| = \sqrt{5}$.

OBSERVAȚIE.

Ținând cont de definirea modulului unui număr real, obținem $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$.

Proprietățile modulului unui număr real

1. $|x| \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $|x| = |-x|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
4. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ sau $x = -y$;
5. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$;
6. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$;
7. $|x + y| \leq |x| + |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ (inegalitatea triunghiului);
8. $||x| - |y|| \leq |x - y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Vom demonstra în continuare proprietatea $|x + y| \leq |x| + |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Dacă $x = 0$, atunci $|x + y| = |y|$ și $|x| + |y| = |y|$, deci $|x + y| = |x| + |y|$.

Analog, dacă $y = 0$, atunci $|x + y| = |x| + |y|$.

Presupunem $x \neq 0$ și $y \neq 0$. Se disting patru cazuri:

a) Dacă $x > 0$ și $y > 0$, atunci $x + y > 0$ și $|x| = x$, $|y| = y$, $|x| + |y| = x + y$, $|x + y| = x + y$, de unde rezultă $|x + y| = |x| + |y|$.

b) Dacă $x < 0$, $y < 0$, atunci $x + y < 0$ și $|x| = -x$, $|y| = -y$, $|x| + |y| = (-x) + (-y) = -(x + y)$, $|x + y| = -(x + y)$, de unde rezultă $|x + y| = |x| + |y|$.

c) Dacă $x > 0$ și $y < 0$, atunci $|x| = x$, $|y| = -y$, $|x| + |y| = x + (-y)$.

În acest caz avem două situații: $x + y \geq 0$ sau $x + y < 0$.

- Dacă $x + y \geq 0$, atunci $|x + y| = x + y = |x| + |y| \leq |x| + |y|$.

- Dacă $x + y < 0$, atunci $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = (-x) + |y| \leq |y| \leq |x| + |y|$.

d) Dacă $x < 0$ și $y > 0$ se demonstrează analog cazului c) că $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Definiția 6. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ se numește funcția modul.

Reprezentarea geometrică a graficului funcției modul este redată în figura 4.

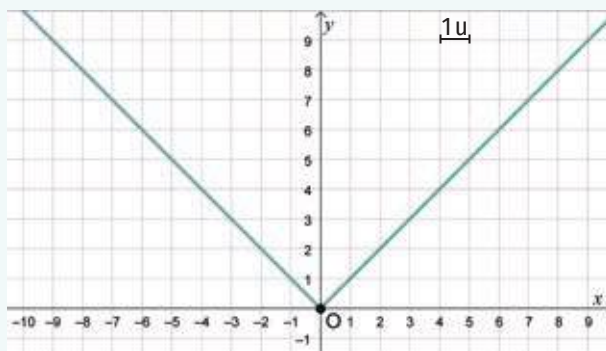


Figura 4

Funcția parte întreagă

Știm că, pentru orice număr real a , există și este unic un număr întreg n , astfel încât $n \leq a < n + 1$. Numărul întreg n reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Așadar, **partea întreagă a numărului real a este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu a .** Se notează cu $[a]$.

EXEMPLE:

1. $[0] = 0$;

3. $[-3] = -3$;

5. $\left[-\frac{5}{6}\right] = -1$, deoarece $-1 < -\frac{5}{6} < 0$;

2. $[7] = 7$;

4. $[2,51] = 2$, deoarece $2 < 2,51 < 3$;

6. $[-\sqrt{7}] = -3$, deoarece $-3 < -\sqrt{7} < -2$.

OBSERVAȚII.

1. $[a] \leq a < [a] + 1$, pentru orice număr real a .

2. $a - 1 < [a] \leq a$, pentru orice număr real a .

3. $[a + n] = [a] + n$, pentru orice număr real a și orice număr întreg n .

Definiția 7. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = [x]$ se numește funcția parte întreagă.

Analizând partea întreagă a unui număr real pe intervale, deducem că:

$$f(x) = [x] = \begin{cases} \vdots \\ -2, & x \in [-2, -1) \\ -1, & x \in [-1, 0) \\ 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \in [1, 2) \\ 2, & x \in [2, 3) \\ \vdots \end{cases}$$

Imaginea funcției parte întreagă este $\mathbb{Z}$ ($Im f = \mathbb{Z}$).

Reprezentarea geometrică a graficului funcției parte întreagă este redată în figura 5.

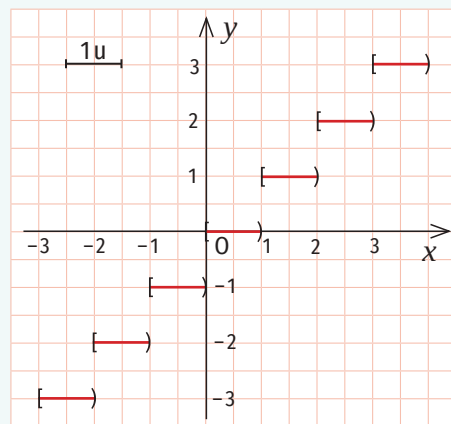


Figura 5

Funcția parte fracționară

Partea fracționară a numărului real a este diferența dintre numărul a și partea sa întreagă. Se notează cu $\{a\}$.

Așadar, $\{a\} = a - [a]$, pentru orice număr real a .

Cum $[a] \leq a < [a] + 1$, rezultă că $0 \leq a - [a] < 1$, deci $0 \leq \{a\} < 1$, pentru orice număr real a .

EXEMPLE:

1. $\{7\} = 7 - [7] = 7 - 7 = 0$;
2. $\{2,51\} = 2,51 - [2,51] = 2,51 - 2 = 0,51$;
3. $\left\{-\frac{5}{6}\right\} = -\frac{5}{6} - \left[-\frac{5}{6}\right] = -\frac{5}{6} - (-1) = -\frac{5}{6} + 1 = \frac{1}{6}$;
4. $\{-\sqrt{7}\} = -\sqrt{7} - [-\sqrt{7}] = -\sqrt{7} - (-3) = -\sqrt{7} + 3$.

OBSERVAȚIE.

$\{a + n\} = \{a\}$, pentru orice număr real a și orice număr întreg n .

Definiția 8. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$, $f(x) = \{x\}$ se numește funcția parte fracționară.

Explicitând partea fracționară a unui număr real x , deducem că:

$$f(x) = \begin{cases} \vdots \\ x + 2, & x \in [-2, -1) \\ x + 1, & x \in [-1, 0) \\ x, & x \in [0, 1) \\ x - 1, & x \in [1, 2) \\ x - 2, & x \in [2, 3) \\ \vdots \end{cases}$$

Imaginea funcției parte fracționară este intervalul $[0, 1)$ ($Im f = [0, 1)$).

Reprezentarea geometrică a graficului funcției parte fracționară este redată în figura 6.

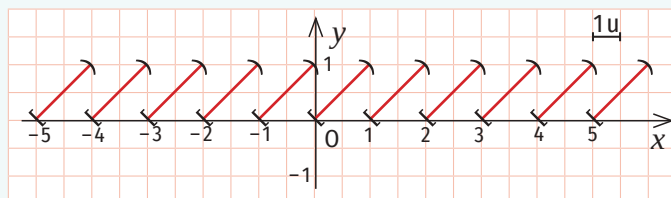


Figura 6

Exerciții rezolvate



1. Demonstrează că $||a| - |b|| \leq |a - b|$, pentru orice numere reale a și b .

Rezolvare:

Se disting două cazuri:

$$\text{Cazul 1. } |a| - |b| \geq 0 \Rightarrow ||a| - |b|| = |a| - |b|$$

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b| \Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

$$\text{Cazul 2. } |a| - |b| < 0 \Rightarrow ||a| - |b|| = |b| - |a|$$

$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b| \Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

2. Determină valorile numărului real x pentru care:

$$\text{a) } \left\lfloor \frac{5x+1}{3} \right\rfloor = 4; \quad \text{b) } [x] = x - 0,6.$$

Rezolvare:

$$\text{a) } \left\lfloor \frac{5x+1}{3} \right\rfloor = 4 \Leftrightarrow 4 \leq \frac{5x+1}{3} < 5 \Leftrightarrow 12 \leq 5x+1 < 15 \Leftrightarrow 11 \leq 5x < 14 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{11}{5}, \frac{14}{5} \right)$$

$$\text{b) } [x] = x - 0,6 \Leftrightarrow 0,6 = x - [x] \Leftrightarrow \{x\} = 0,6 \Leftrightarrow x \in \{n + 0,6 \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

3. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2a + 3b)x^2 + 4x + a + b$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2bx^2 + 4x + 4a + 3b + 1$, unde a și b sunt numere reale. Determină numerele reale a și b pentru care funcțiile f și g sunt egale.

Rezolvare:

Funcțiile f și g au același domeniu de definiție și același codomeniu. Pentru a fi egale trebuie, în plus, ca $f(x) = g(x)$ pentru orice număr real x .

$$f(x) = g(x), (\forall)x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (2a + 3b)x^2 + 4x + a + b = 2bx^2 + 4x + 4a + 3b + 1, (\forall)x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow 2a + 3b = 2b \text{ și } a + b = 4a + 3b + 1$$

$$\begin{cases} 2a + 3b = 2b \\ a + b = 4a + 3b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ -3a - 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ -3a - 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Aplic



1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 1$. Calculează:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(3); & \text{c) } f(\sqrt{3}) - \sqrt{48}; & \text{e) } \frac{f(\sqrt{3}) - f(\sqrt{5})}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}; \\ \text{b) } f(7,82); & \text{d) } f\left(\sqrt{5} - \frac{1}{4}\right); & \text{f) } \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 100}{f(25)}. \end{array}$$

2. Verifică dacă funcțiile f și g sunt egale.

$$\begin{array}{l} \text{a) } f: \{0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 3, g: \{0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, g(0) = 3, g(1) = 4, g(2) = 5; \\ \text{b) } f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3, g: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -|x|; \\ \text{c) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2^x. \end{array}$$

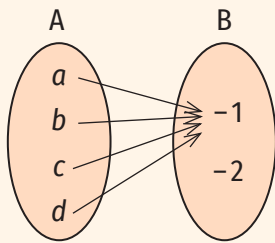
3. a) Determină numărul funcțiilor $f: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
 b) Determină numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ cu $f(1) = 3$.
 c) Determină numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$ cu $f(1) \leq 2$.
 d) Determină numărul funcțiilor $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ cu $f(0) = f(1) = 0$.
 e) Determină numărul funcțiilor $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$ cu $f(1) = f(2)$.



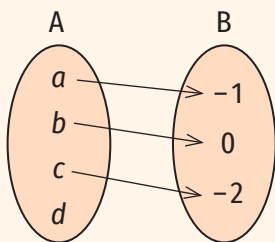
EXERSEAZĂ!

Precizează care dintre legile de corespondență reprezentate grafic prin diagramele de mai jos reprezintă o funcție. Justifică.

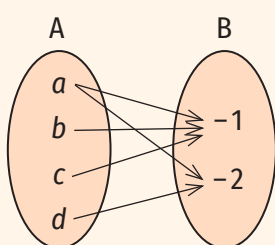
a)



b)



c)



4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + \frac{1}{2}$.

a) Determină imaginile prin funcția f ale mulțimilor:

$$\left\{1,7; \frac{\sqrt{5}}{4}; 8,5\right\}, \left(-\infty, \frac{7}{4}\right), [-\sqrt{3}, +\infty), [-3, 3].$$

b) Determină preimaginile prin funcția f ale mulțimilor:

$$\left\{\frac{3\sqrt{2}}{2}; 10; 11,5\right\}, \left(-\infty, -\frac{13}{2}\right), [1, +\infty), [-5, 5], \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \mathbb{R} \setminus (-1, 1).$$

5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ 2x - 3, & x \geq 0 \end{cases}$.

a) Determină funcția $f|_{(-\infty, -8]}$ și imaginea sa.

b) Determină $f((-3, -1])$ și $f([2, 6])$.

6. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < -1 \\ 2x + 3, & x \in [-1, 2) \\ x + 6, & x \geq 2 \end{cases}$.

a) Scrie restricțiile funcției f la intervalele $(-\infty, -2)$ și $[7, +\infty)$.

b) Determină $f((-5, -3])$, $f((0, 2))$ și $f([3, +\infty))$.

7. Fie funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = mx + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}, m \neq 0$. Determină numerele reale m și n pentru care:

a) $g((4, 5)) = (19, 24)$;

c) $g^{-1}((0, 8]) = (-2, 0]$;

b) $g\left(\left[\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)\right) = \left(\frac{19}{7}, \frac{20}{7}\right]$;

d) $g^{-1}((\sqrt{3} - 2, \sqrt{3} + 6)) = (-\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$.

8. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $|x| = 9$;

d) $1 - 7|1 - 2x| = 1$;

g) $\left|\frac{x+1}{2} + \frac{x+8}{3}\right| = 0,5$;

b) $|2x + 5| = 5,4$;

e) $\sqrt{7} - \sqrt{11}|2x| = \sqrt{13}$;

h) $\left|\frac{x+1}{5}\right| = \frac{3x-1}{4}$;

c) $2\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{2}{3} = 1, (3)$;

f) $\left|\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 1\right| = 0$;

i) $|(x-6)(x+6) - (x+5)^2| = 4$.

9. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele inecuații:

a) $|x + 2| < 3$;

d) $|7x + 9| \geq \frac{2}{3}$;

g) $12 - 2|4x + 1| \geq 5$.

b) $|-3x + 1| \leq 4$;

e) $\sqrt{(4x + 1)^2} \leq 0$;

c) $|5x + 2| > 5$;

f) $2\sqrt{(6x + 0,2)^2} + 2,5 \geq 8$;

10. Determină numărul real a pentru care funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2(a + 7)x + 4$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 16x + 3a + 1$, sunt egale.

11. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Determină numerele reale a și b pentru care $f(2) = g(2)$ și $f(0) = g(-1)$.

a) $f(x) = 3(2a + 1)x + b$ și $g(x) = ax + 2b + 4$;

b) $f(x) = a\sqrt{2}x + b$ și $g(x) = 2a\sqrt{2}x - b + 2$;

c) $f(x) = \frac{a}{2}x + \frac{b}{3}$ și $g(x) = \frac{a+1}{4}x + b$.

12. Demonstrează că $||a| - |b|| \leq |a + b|$ pentru orice numere reale a și b .

13. Calculează partea întreagă și partea fracționară pentru numerele:

a) $6,3; -6,4; 1,(2); -2,(6); 4,1(2); -7,23(1); 1\frac{2}{3}; -5\frac{1}{2}; 0;\frac{4}{5}; -\frac{7}{3}; \frac{123}{23}$;

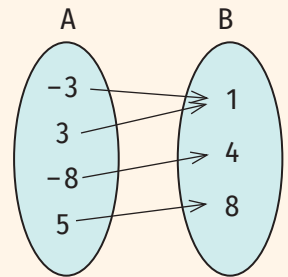
b) $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{7}; 5 + 2\sqrt{2}; 2 - 3\sqrt{3}; 8 - 2\sqrt{5}; \frac{1}{2}\sqrt{7} + 4; \frac{\sqrt{3} - \sqrt{11}}{2}$.

14. Se consideră funcția parte întreagă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x]$. Determină:
 $f([-2, 5]), f((-\infty, -4)), f((5, 6)), f([2, 4)), f(\mathbb{N}), f(\mathbb{Z})$.
15. Se consideră funcția parte fracționară $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x\}$. Determină:
 $f([-4, 3]), f((-\infty, -2)), f((1, 2)), f(\mathbb{N}), f(\mathbb{Z})$.
16. Fie $a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$, unde n este număr natural, $n \geq 2$.
- a) Determină partea întreagă și partea fracționară a numărului real a .
 b) Determină numărul natural $n, n \geq 2$, pentru care $\{a\} = 0,98$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a .
17. a) Determină partea întreagă a fiecăruia dintre numerele $\sqrt{n^2+1}, \sqrt{n^2+2}, \dots, \sqrt{n^2+n}$, unde n este număr natural nenul.
 b) Fie $S = \sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2} + \dots + \sqrt{n^2+n}$, unde n este număr natural nenul. Demonstrează că $[\sqrt{S}] = [\sqrt{n^2+k}]$ pentru orice număr natural nenul n și orice număr natural nenul $k, k \leq n$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .
18. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile următoare:
- a) $[x] = 5$; e) $\{x\} = 0,75$; i) $3 \cdot (2 \cdot \{x\} + 4) + 2 = 14,9$;
 b) $[x+2] = -1$; f) $\left\{x - \frac{1}{2}\right\} = 0,2$; j) $\left[2x + \frac{5}{6}\right] = \frac{3x+1}{2}$;
 c) $[2x-5] = 2$; g) $\left\{x + \frac{1}{3}\right\} = 0,4$; k) $\frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{4} = [2x]$;
 d) $\left[\frac{x+3}{-5}\right] = 0$; h) $\{x\} + [x] = 14x + 39$; l) $\left[\frac{2x+1}{3}\right] = x-1$.
19. Demonstrează că:
- a) $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$, pentru orice număr real x ;
 b) $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$, pentru orice număr real x și pentru orice număr natural $n \geq 2$ (**Identitatea lui Hermite**).
20. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile următoare:
- a) $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = 7$; d) $\left[\frac{x-1}{2}\right] + \left[\frac{3x-1}{6}\right] + \left[\frac{3x+1}{6}\right] = 8$;
 b) $\left[\frac{x+2}{3}\right] + \left[\frac{2x+7}{6}\right] = \frac{x+4}{5}$; e) $\left[\frac{x+2}{5}\right] + \left[\frac{2x+9}{10}\right] = \frac{x+6}{3}$.
 c) $[x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] = 3 - \left[x + \frac{2}{3}\right]$;
21. Pe o platformă online sunt postate două videoclipuri ale formațiilor celebre A și B. Videoclipul postat de formația A atinge un număr de 300 de vizualizări în prima jumătate de oră de la postare, adică până la ora 14:00, apoi numărul acestora crește cu 80 de vizualizări în fiecare oră. Videoclipul postat de formația B atinge un număr de 1 200 de vizualizări în primele 45 de minute, adică tot până la ora 14:00, apoi numărul acestora crește cu 50 de vizualizări în fiecare oră.
- a) Determină funcțiile care modelează situația descrisă*.
 b) La cât timp după ora 14:00 videoclipurile celor două formații au același număr de vizualizări?
 c) Care este numărul de vizualizări în momentul în care cele două videoclipuri au același număr de vizualizări?
 d) În ce interval de timp formația A are mai multe vizualizări decât formația B?

EXERSEAZĂ!

Pentru fiecare din funcțiile de mai jos, determină domeniul de definiție și codomeniul.

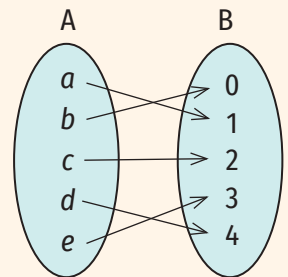
a)



b) $f: A \rightarrow B$

x	-2	0	2
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	5	$\frac{\pi}{3}$

c)



d) $f: A \rightarrow B$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	0	1	1	1

INDICAȚIE*

Se cer funcțiile care exprimă numărul de vizualizări ale fiecăruia dintre cele două videoclipuri în funcție de timpul, măsurat în ore, scurs după ora 14.

1.2. Reprezentarea grafică a unei funcții definite pe submulțimi ale lui $\mathbb{R}$, intersecția graficului cu axele de coordonate, drepte în plan de forma $x = m$ sau de forma $y = m$, $m \in \mathbb{R}$; semnul unei funcții numerice, interpretarea geometrică a soluțiilor ecuațiilor de forma $f(x) = m$ și $f(x) = g(x)$

Descopăr



Într-un oraș există trei companii de transport, fiecare având un mod diferit de calcul al tarifului unei călătorii:

- Compania A percepe o taxă de pornire de 4 lei și un cost de 3 lei pentru fiecare kilometru parcurs.
 - Compania B percepe o taxă de pornire de 10 lei și un cost de 2 lei pentru fiecare kilometru parcurs.
 - Compania C nu are taxă de pornire, dar percepe 4 lei pentru fiecare kilometru parcurs.
- a) Determină funcțiile care exprimă costul unei călătorii în funcție de distanța parcursă pentru cele trei companii.
 - b) Reprezintă grafic, în același reper cartezian, funcțiile determinate la punctul a).
 - c) Pentru fiecare dintre cele trei companii, determină distanța pentru care costul unei călătorii este de 100 de lei.
 - d) Două călătorii, realizate de companiile A și B, au același cost. Care sunt distanțele parcurse în fiecare caz?
 - e) Există o distanță pentru care toate cele trei companii încasează aceeași sumă? Justifică răspunsul.

Învăț

Reprezentarea grafică a unei funcții definite pe submulțimi ale lui $\mathbb{R}$

Fie A și B două mulțimi nevide. Ne amintim că produsul cartezian al mulțimilor A și B , notat cu $A \times B$, reprezintă mulțimea tuturor perechilor de forma (x, y) , unde $x \in A$ și $y \in B$.

Așadar, $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y \in B\}$.

Definiția 1. Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție. Mulțimea tuturor perechilor $(x, f(x))$, unde $x \in A$, se numește graficul funcției f și se notează G_f .

Așadar, $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} = \{(x, y) \mid x \in A, y = f(x)\}$.

EXEMPLU:

Fie funcția $f: \{a, b, c\} \rightarrow \{d, e, f, g\}$, $f(a) = d$, $f(b) = e$, $f(c) = g$. Atunci $G_f = \{(a, d), (b, e), (c, g)\}$ și $\text{card } G_f = 3 = \text{card } A$.

Cum $A \times B = \{(a, d), (a, e), (a, f), (a, g), (b, d), (b, e), (b, f), (b, g), (c, d), (c, e), (c, f), (c, g)\}$, obținem $\text{card } A \times B = 12$. Așadar, $\text{card } G_f < \text{card } A \times B$.

OBSERVAȚII.

1. Dacă $f: A \rightarrow B$ este o funcție, atunci:

a) $G_f \subseteq A \times B$; b) $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow x \in A \text{ și } f(x) = y$.

2. Dacă A este mulțime finită și $f: A \rightarrow B$ este o funcție, atunci $\text{card } G_f = \text{card } A$.

Din clasele anterioare știm că o pereche ordonată de două axe perpendiculare care au aceeași origine se numește sistem de axe **ortogonale în plan** sau **reper cartezian în plan** sau **sistem de coordonate în plan** (figura 1). Se notează xOy .

Definiția 2. Funcția $f: A \rightarrow B$, unde A și B sunt două mulțimi nevide de numere reale se numește **funcție numerică**.

EXEMPLE:

1. $f: (1, 7) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 3$; 2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = [x]$.

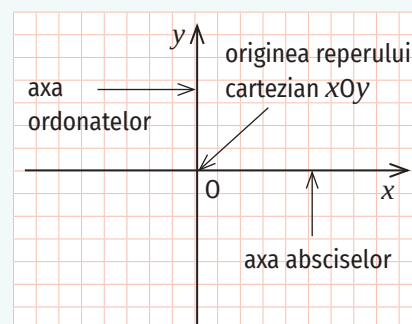


Figura 1

Definiția 3. Pentru orice funcție numerică $f: A \rightarrow B$, mulțimea tuturor punctelor reprezentate în reperul cartezian xOy , având coordonatele date de perechile $(x, y) \in G_f$, se numește **reprezentarea geometrică a graficului funcției f** .

OBSERVAȚIE.

Punctul $A(x, y)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției $f: A \rightarrow B$ ($A, B \subseteq \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow x \in A$ și $y = f(x)$.

EXEMPLU:

Punctul $M(2, 1)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -4x + 9$, pentru că $f(2) = -4 \cdot 2 + 9 = 1$.

În continuare, pentru simplificarea limbajului, atunci când vorbim despre reprezentarea geometrică a graficului funcției f , vom folosi „reprezentarea graficului funcției f ” sau „reprezentarea grafică a funcției f ”.

Atunci când reprezentăm mai multe funcții într-un reper cartezian xOy , vom scrie denumirea funcției în cadrul reprezentării grafice, pentru a nu exista confuzii.

Definiția 4. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale, se numește **funcție afină**.

Teorema 1. Reprezentarea grafică, într-un reper cartezian xOy , a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale, este o dreaptă.

OBSERVAȚII.

1. Reprezentarea grafică, în reperul cartezian xOy , a funcției afine $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$, este o dreaptă care trece prin originea sistemului de coordonate xOy .

2. Reprezentarea grafică, în reperul cartezian xOy , a funcției afine $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = b, b \in \mathbb{R}^*$, este o dreaptă paralelă cu axa Ox .

3. Reprezentarea grafică, în reperul cartezian xOy , a funcției afine $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0$, este axa Ox .

Pentru a reprezenta grafic funcția afină $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) într-un reper cartezian xOy , este suficient să fie reprezentate două puncte distincte $A(x_0, f(x_0))$ și $B(x_1, f(x_1))$, unde x_0 și $x_1 \in \mathbb{R}, x_0 \neq x_1$. Dreapta determinată de cele două puncte (dreapta AB) este reprezentarea grafică a funcției f în reperul cartezian xOy .

EXEMPLU:

Pentru a reprezenta grafic în reperul cartezian xOy funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 4$, calculăm valorile funcției f pentru două numere diferite din domeniul său de definiție. Cum $f(1) = 2$ și $f(3) = -2$, punctele $A(1, 2)$ și $B(3, -2)$ aparțin reprezentării grafice a funcției f în reperul cartezian xOy . Reprezentarea grafică a funcției f este dreapta AB din figura 2.

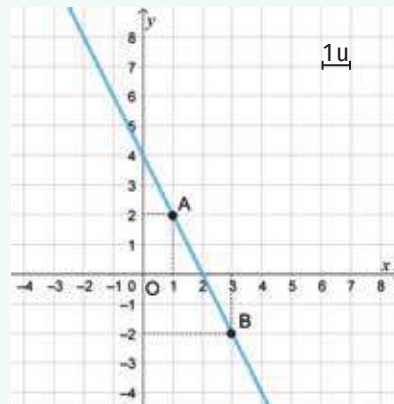


Figura 2

OBSERVAȚIE.

Fie I o submulțime nevidă a lui $\mathbb{R}$. Reprezentările grafice într-un reper cartezian xOy ale funcțiilor de forma $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) sunt mulțimi finite de puncte, segmente sau semidrepte.

EXEMPLE:



Se consideră funcțiile $g: (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x - 2$, și $h: [-1, 3) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 3x - 2$. Observăm că funcțiile g și h sunt restricțiile funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$, la intervalele $(-\infty, 2]$ și $[-1, 3)$.

Punctele de pe reprezentarea grafică a funcției f (figura 3) care au abscisele în intervalul $(-\infty, 2]$ formează reprezentarea grafică a funcției g (figura 4). Pentru a marca faptul că punctul $A(2, 4)$ aparține reprezentării grafice a funcției g , folosim simbolul „ $]$ ”.

Punctele de pe reprezentarea grafică a funcției f (figura 3) care au abscisele în intervalul $[-1, 3)$ formează reprezentarea grafică a funcției h (figura 5). Pentru a marca faptul că punctul $B(-1, -5)$ aparține reprezentării grafice a funcției h , folosim simbolul „ $[$ ”, iar pentru a marca faptul că punctul $C(3, 7)$ nu aparține reprezentării grafice a funcției h , folosim simbolul „ $)$ ”.

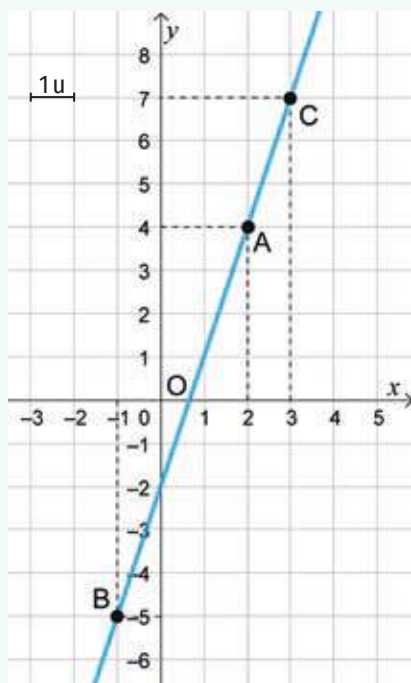


Figura 3

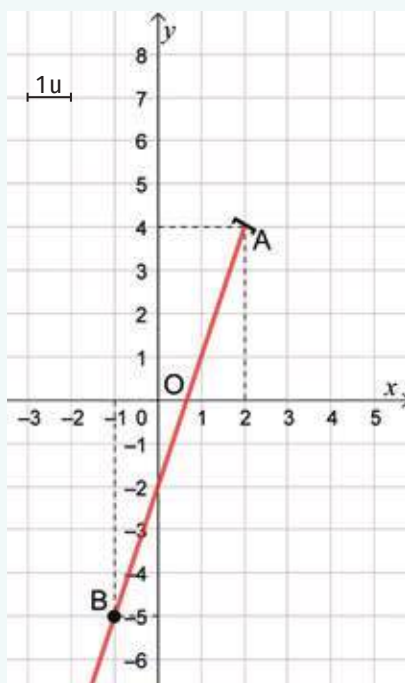


Figura 4

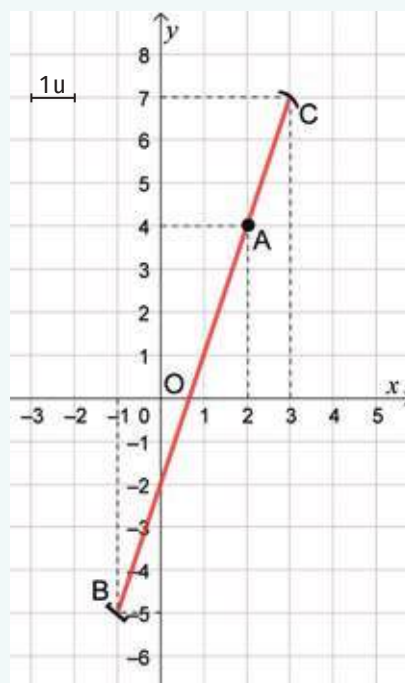


Figura 5

Intersecția graficului cu axele de coordonate

Pentru a determina coordonatele punctului/punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu axa Ox , rezolvăm ecuația $f(x) = 0$. Intersecția dintre reprezentarea grafică a funcției f și axa Ox poate fi $\emptyset$ sau o mulțime formată din unul sau mai multe puncte, în funcție de numărul de soluții ale ecuației $f(x) = 0$.

Coordonatele punctului de intersecție a reprezentării grafice a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu axa Oy sunt $(0, f(0))$.

EXAMPLE:

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 6$.

Având în vedere că ecuația $f(x) = 0$ are soluția $x = 2$, rezultă că punctul de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și axa Ox are coordonatele $(2, 0)$.

$f(0) = -6 \Rightarrow$ Punctul de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și axa Oy are coordonatele $(0, -6)$.

2. Se consideră funcția $f: [4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0,2x - 8$.

Ecuația $f(x) = 0$ are soluția $x = 40$, deci punctul de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și axa Ox are coordonatele $(40, 0)$.

$0 \notin [4, +\infty) \Rightarrow$ Reprezentarea grafică a funcției f nu intersectează axa Oy .

Drepte în plan de forma $x = m$ sau de forma $y = m$, unde $m \in \mathbb{R}$

Fie m un număr real fixat și $A = \{m\}$. În acest caz, $A \times \mathbb{R} = \{(m, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ și $\mathbb{R} \times A = \{(x, m) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Reprezentarea geometrică a produsului cartezian $A \times \mathbb{R}$ este mulțimea punctelor din plan de forma $M(m, y)$, unde m este o constantă reală, iar y parcurge $\mathbb{R}$, adică dreapta Oy pentru $m = 0$ sau o dreaptă paralelă cu Oy care conține punctul de coordonate $(m, 0)$ pentru $m \neq 0$ (figura 6). Această dreaptă are ecuația $x = m$.

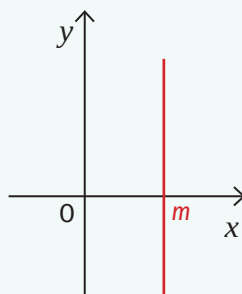


Figura 6

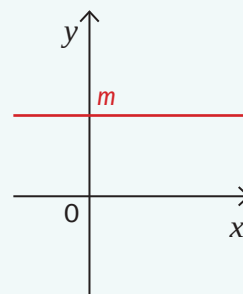


Figura 7

Reprezentarea geometrică a produsului cartezian $\mathbb{R} \times A$ este mulțimea punctelor din plan de forma $M(x, m)$, unde x parcurge $\mathbb{R}$, iar m este o constantă reală, adică dreapta Ox pentru $m = 0$ sau o dreaptă paralelă cu Ox care conține punctul de coordonate $(0, m)$ pentru $m \neq 0$ (figura 7). Această dreaptă are ecuația $y = m$.

Semnul unei funcții numerice

A determina semnul unei funcții numerice $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ înseamnă a identifica intervalele pe care funcția f ia valori pozitive și intervalele pe care ia valori negative. Altfel spus, determinarea semnului funcției f presupune rezolvarea inecuațiilor $f(x) < 0$ și $f(x) > 0$ în mulțimea A .

Semnul funcției f se poate determina și cu ajutorul reprezentării grafice a funcției în reperul cartezian xOy . În acest sens, se vor identifica porțiunile din reprezentarea grafică a funcției f situate deasupra, respectiv dedesubtul axei Ox , precum și mulțimea/mulțimile valorilor pe care le au abscisele punctelor corespunzătoare acestor porțiuni.

EXEMPLE:



1. Prin lecturarea reprezentării grafice a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 4x - 8$, în reperul cartezian xOy (figura 8), deducem că reprezentarea grafică a funcției g intersectează axa Ox în punctul de coordonate $(2, 0)$ și:

$$g(x) > 0, \text{ pentru orice număr real } x \in (2, +\infty);$$

$$g(x) < 0, \text{ pentru orice număr real } x \in (-\infty, 2).$$

2. Prin lecturarea reprezentării grafice a funcției $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = -2x + 2$, în reperul cartezian xOy (figura 9), deducem că reprezentarea grafică a funcției h intersectează axa Ox în punctul de coordonate $(1, 0)$ și:

$$h(x) > 0, \text{ pentru orice număr real } x \in (-\infty, 1);$$

$$h(x) < 0, \text{ pentru orice număr real } x \in (1, +\infty).$$

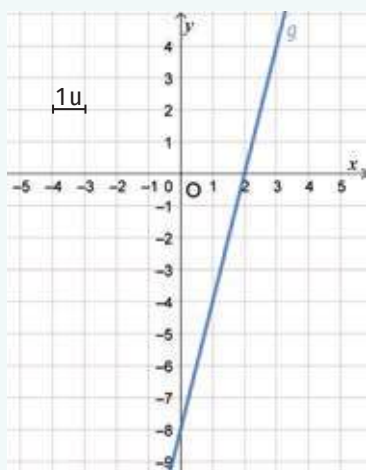


Figura 8

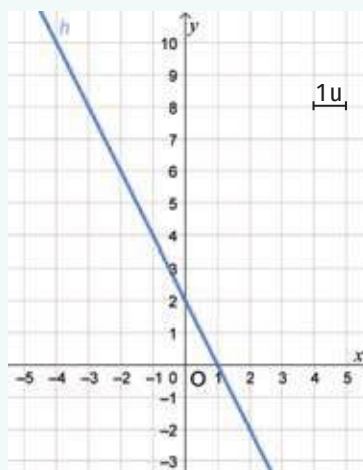


Figura 9

Fie funcția afină $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

- Pentru $a > 0$, reprezentarea grafică a funcției f (figura 10) are un comportament asemănător cu reprezentarea grafică a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 4x - 8$ (figura 8).

Cum reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Ox în punctul de coordonate $(-\frac{b}{a}, 0)$, obținem:

$$f(x) > 0, \text{ pentru orice număr real } x \in (-\frac{b}{a}, +\infty);$$

$$f(x) < 0, \text{ pentru orice număr real } x \in (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

Această concluzie se poate exprima și astfel:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$ ($a > 0$)	-----	0	+++++

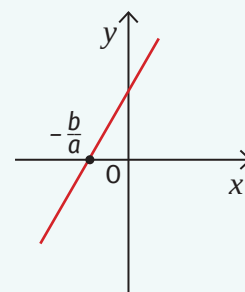


Figura 10

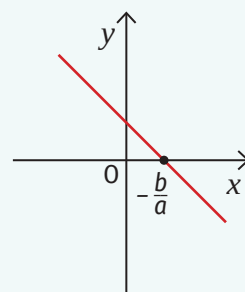


Figura 11

- Pentru $a < 0$, reprezentarea grafică a funcției f (figura 11) are un comportament asemănător cu reprezentarea grafică a funcției $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = -2x + 2$ (figura 9).

Cum reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Ox în punctul de coordonate $(-\frac{b}{a}, 0)$, obținem:

$$f(x) > 0, \text{ pentru orice număr real } x \in (-\infty, -\frac{b}{a});$$

$$f(x) < 0, \text{ pentru orice număr real } x \in (-\frac{b}{a}, +\infty).$$

Această concluzie se poate exprima și astfel:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$ ($a < 0$)	++++++	0	-----

Observăm că, pe intervalul $(-\infty, -\frac{b}{a})$, funcția f are semnul contrar semnelui lui a , iar pe intervalul $(-\frac{b}{a}, +\infty)$ funcția f are semnul lui a .

Această concluzie se poate exprima și astfel:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	semn contrar semnelui lui a	0	semnul lui a

Interpretarea geometrică a soluțiilor ecuațiilor de forma $f(x) = m$ și $f(x) = g(x)$

Se consideră A și B două submulțimi nevide ale lui $\mathbb{R}$, $f: A \rightarrow B$ o funcție și m un număr real. **Mulțimea soluțiilor ecuației $f(x) = m$ este formată din abscisele punctelor de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și dreapta de ecuație $y = m$.**

EXEMPLE:

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$. Ecuația $f(x) = 2$ are soluția $x = 1$, de unde rezultă că reprezentarea grafică a funcției f intersectează dreapta de ecuație $y = 2$ într-un punct care are abscisa 1 – coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și dreapta de ecuație $y = 2$ sunt $(1, 2)$ (figura 12).

2. Fie funcția $f: (-1, 5) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x - 1$. Ecuația $f(x) = 2$ nu are soluții în mulțimea $(-1, 5)$, de unde rezultă că reprezentarea grafică a funcției f nu intersectează dreapta de ecuație $y = 2$ (figura 13).

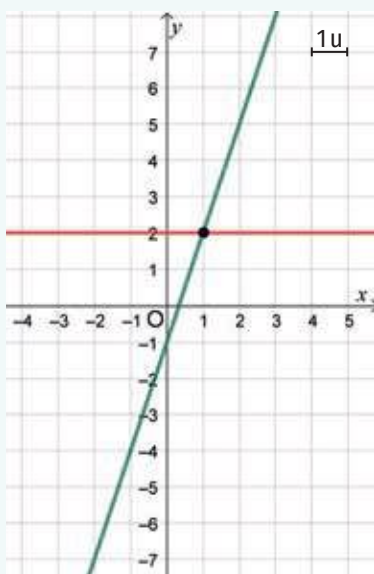


Figura 12

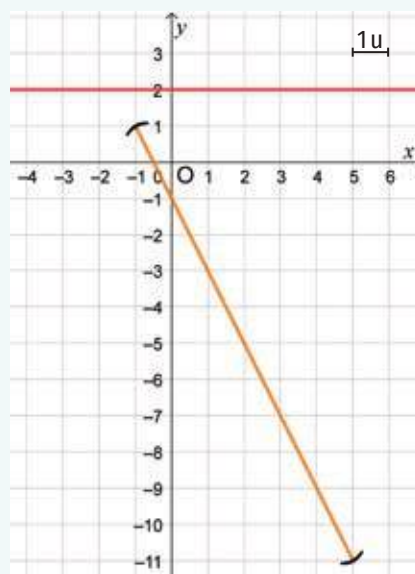


Figura 13

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x < 1 \\ -x + 3, & x \geq 1 \end{cases}$. Ecuația $f(x) = -3$ are soluțiile $x = -\frac{5}{3}$ și $x = 6$, deci reprezentarea grafică a funcției f intersectează dreapta de ecuație $y = -3$ în două puncte (figura 14).

Fie A, B, C și D submulțimi nevide ale lui $\mathbb{R}$ și funcțiile $f: A \rightarrow B, g: C \rightarrow D$. **Mulțimea soluțiilor ecuației $f(x) = g(x)$ este formată din abscisele punctelor de intersecție dintre reprezentările grafice ale funcțiilor f și g .**

OBSERVAȚIE.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

a) Dacă ecuația $f(x) = g(x)$ nu are soluție, rezultă că reprezentările grafice ale funcțiilor f și g sunt drepte paralele.

b) Dacă ecuația $f(x) = g(x)$ are o soluție x_0 , rezultă că reprezentările grafice ale funcțiilor f și g se intersectează în punctul de coordonate $(x_0, f(x_0))$.

EXEMPLE:

1. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x - 1$. Ecuația $f(x) = g(x)$ are soluția $x = -2$ și $f(-2) = g(-2) = -3$, deci reprezentările grafice ale funcțiilor f și g se intersectează în punctul de coordonate $(-2, -3)$ (figura 15).

2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x - 1$. Ecuația $f(x) = g(x)$ nu are soluție, deci reprezentările grafice ale funcțiilor f și g sunt două drepte paralele (figura 16).

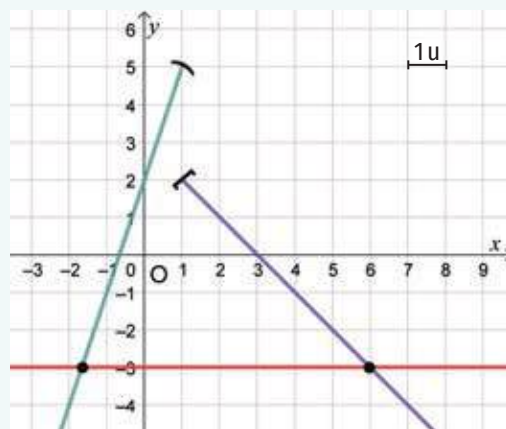


Figura 14

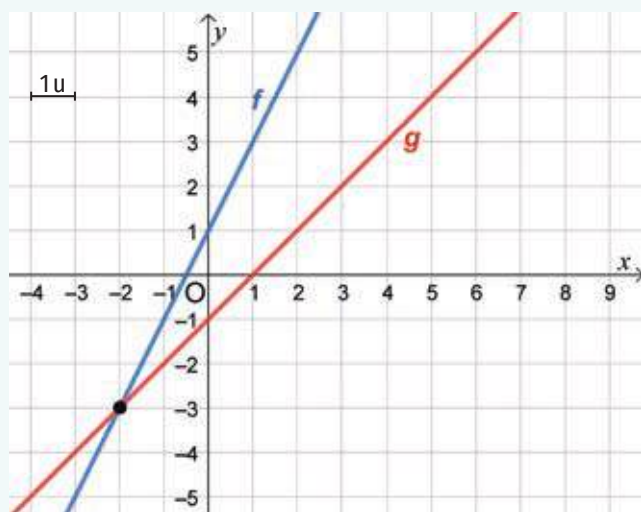


Figura 15

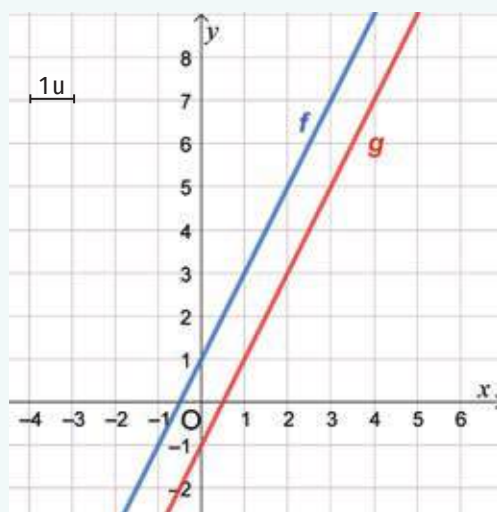


Figura 16

Exerciții rezolvate

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + \frac{1}{2}$. Determină numărul real a pentru care punctul $M(4, 10a + 1)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .

Rezolvare:

Punctul $M(4, 10a + 1)$ aparține reprezentării grafice a funcției $f \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 4 + \frac{1}{2} = 10a + 1 \Leftrightarrow 10a = \frac{15}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$$

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2|x + 1| - 6$.

- a) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = 0$.
b) Reprezintă grafic funcția f .

Rezolvare:

a) Pentru a rezolva ecuația $f(x) = 0$, vom considera două cazuri:

Cazul 1. Dacă $x < -1$, atunci $f(x) = 2(-x - 1) - 6 = -2x - 8$ și ecuația $f(x) = 0$ devine $-2x - 8 = 0$, care are soluția $x = -4$.

Cazul 2. Dacă $x \geq -1$, atunci $f(x) = 2(x + 1) - 6 = 2x - 4$ și ecuația $f(x) = 0$ devine $2x - 4 = 0$, care are soluția $x = 2$.

$$b) f(x) = 2|x + 1| - 6 = \begin{cases} -2x - 8, & x < -1 \\ 2x - 4, & x \geq -1 \end{cases}$$

Se poate realiza tabelul de variație al funcției:

x	$-\infty$	-4	-2	-1	0	$+\infty$
$f(x) = -2x - 8$		0	-4			
$f(x) = 2x - 4$				-6	-4	

În figura 17 este reprezentată grafic funcția f în reperul cartezian xOy .

3. Determină funcția afină a cărei reprezentare grafică conține punctele $A(2, 3)$ și $B(4, 10)$.

Rezolvare:

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$.

Punctul $A(2, 3)$ aparține reprezentării grafice a funcției $f \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(2) = 3 \Leftrightarrow 2a + b = 3 \quad (1)$$

Punctul $B(4, 10)$ aparține reprezentării grafice a funcției $f \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(4) = 10 \Leftrightarrow 4a + b = 10 \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2) avem } \begin{cases} 2a + b = 3 \\ 4a + b = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ 4a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ b = 10 - 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 10 - 4a = 3 \\ b = 10 - 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = -7 \\ b = 10 - 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = -4 \end{cases}$$

Așadar, funcția afină cerută este $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{7}{2}x - 4$.

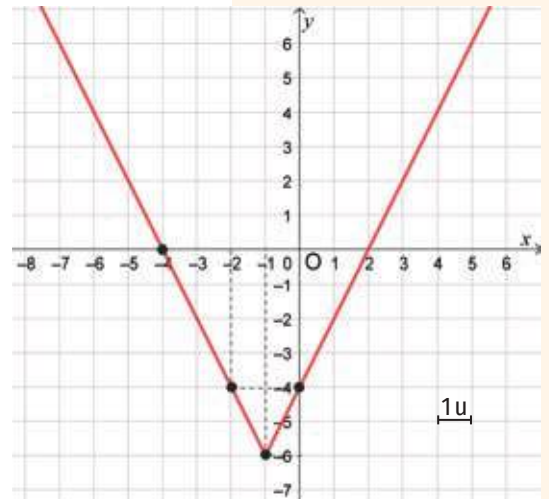


Figura 17

EXERSEAZĂ!

Reprezintă grafic funcția f .

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = |x + 4|$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = 2|x + 2|$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = 3|-x + 1|$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$;

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = |x - 3| - 2x + 1$;

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = |x - 1| + |x| + |x + 1|$;

g) $f: \{-0,5; 0; 0,5; 1; 2\} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = -2|x + 4| + 5$;

h) $f: (-5, 3) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = |x + 3|$;

i) $f: (-\infty, 2) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = |x| + 1$;

j) $f: (4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = |x - 5| + x$;

k) $f: [1, 10) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = |x - 4| + 2x - 5$;

l) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = |10x - 5| + 15$.

NE AMINTIM!

Definiție. Două unghiuri se numesc suplimentare dacă suma măsurilor lor este egală cu 180° . În acest caz, fiecare unghi este un suplement al celuilalt.

Aplic

- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (-3m + 6)x + 2m - 1$, unde m este număr real. Determină numărul real m pentru care $(-2, 6) \in G_f$.
- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2m - 5)x + 2m^2 + 10$, unde m este număr real. Determină numărul real m pentru care $(-m, 5) \in G_f$.
- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + 5, & x < -3 \\ (a - 1)x + 2b + 3, & x \geq -3 \end{cases}$, unde a și b sunt numere reale. Determină numerele reale a și b pentru care $(-1, 2) \in G_f$ și $(5, -3) \in G_f$.
- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$.
 - Determină numărul real a pentru care punctul $M(2a\sqrt{3}, -1)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .
 - Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre graficul funcției f și axele de coordonate Ox și Oy .
 - Calculează perimetrul și aria triunghiului determinat de reprezentarea grafică a funcției f și axele de coordonate Ox și Oy .
 - Determină numerele reale a și b pentru care funcția f este egală cu funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (2a + 3b)x + 2a + b$.
 - Determină semnul funcției f .
 - Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = -8$.
 - Determină coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și dreapta de ecuație $y = 3$.
 - Determină coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și dreapta de ecuație $x = -4$.
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 2$.
 - Determină numărul real a pentru care punctul $M(a - 1, 2a + 3)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .
 - Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre graficul funcției f și axele de coordonate Ox și Oy .
 - Calculează perimetrul și aria triunghiului determinat de reprezentarea grafică a funcției f și axele de coordonate Ox și Oy .
 - Determină numărul real a pentru care $2f(a) - 7 = 2,4$.
 - Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $5f(x) + 5^2f(x) + 5^3f(x) = 310$.
 - Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x + 5) + f(x + 3) + f(x + 7) = 819$.
 - Determină semnul funcției f .
- Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + \frac{1}{5}$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -2x + \frac{6}{5}$.
 - Calculează aria triunghiului determinat de reprezentarea grafică a funcției f și axele de coordonate Ox și Oy .
 - Calculează aria triunghiului determinat de reprezentările grafice ale funcțiilor f și g și axa Ox .

7. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x - 3$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -2x + 3$.
- Reprezintă grafic funcțiile f și g .
 - Determină coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele de coordonate Ox și Oy .
 - Determină coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției g cu axele de coordonate Ox și Oy .
 - Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) < 0$.
 - Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $g(x) > 0$.
 - Determină coordonatele punctului de intersecție a reprezentărilor grafice ale funcțiilor f și g .
 - Determină mulțimea numerelor reale x pentru care $f(x) \leq g(x)$.
8. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 3$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -2x - 1$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{2}x + 3$ și $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i(x) = \frac{1}{2}x - 1$. Determină natura patrulaterului delimitat de reprezentările grafice ale funcțiilor f, g, h și i .
9. Determină funcția afină a cărei reprezentare grafică conține punctele $A(1, 5)$ și $B(-1, 9)$.
10. Determină funcția afină a cărei reprezentare grafică intersectează dreapta de ecuație $x = 3$ în punctul A , care are ordonata egală cu 4, și dreapta de ecuație $y = -5$ în punctul B , care are abscisa egală cu 2.
11. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x < 0 \\ 3x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$.
- Verifică dacă punctul $A(2, 8)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .
 - Determină numărul real a pentru care punctul $M(-3, 2a - 1)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .
 - Determină valorile numărului real a pentru care punctul $N(a, 2a)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .
 - Demonstrează că, pentru orice număr real a , punctul $P(a, 4a)$ nu aparține reprezentării grafice a funcției f .
 - Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre graficul funcției f și axele de coordonate Ox și Oy .
 - Reprezintă grafic funcția f .
 - Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și dreapta de ecuație $y = 1$.
 - Determină coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și dreapta de ecuație $x = -1$.
 - Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = 4x - 1$.
 - Demonstrează că dreptele suport ale reprezentărilor grafice corespunzătoare restricțiilor funcției f la intervalele $(-\infty, 0)$ și $[0, +\infty)$ sunt paralele.
 - Determină semnul funcției f .

EXERSEAZĂ!

Reprezintă grafic funcția f .

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x + 1]$;
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3[x - 1] + 2$;
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4[-x + 2]$;
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x] + [x + 1] + [x + 2]$;
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right]$;
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right]$;
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x + 100\}$;
- $h: \{-0,5; 0; 0,5; 1; 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3[x] + x$;
- $f: (-5, 3) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x + 0,5\}$;
- $f: (-\infty, 3) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2[x] + \{x\}$;
- $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + [x + 1]$;
- $f: [-3, 3) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2\left[x + \frac{1}{3}\right] + 1$;
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left\{x - \frac{2}{3}\right\}$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x .

CONTEXTUALIZEZ

Exemple de funcții afine utilizate în diferite domenii de activitate:

Economie, finanțe:

– *costul de producție*:
 $c(x) = mx + F$, unde F reprezintă costurile fixe (chirie, utilaje), iar m este costul unitar de producție.

Fizică, chimie:

– *dilatarea termică*:
 $l(t) = L_0(1 + \alpha(t - t_0))$,
 unde $l(t)$ este lungimea unei bare metalice la temperatura t , L_0 este lungimea barei la momentul t_0 și α este o constantă (coeficient de dilatare specific materialului).

Informatică și criptografie:

– *criptografia clasică (cifrul afin)* folosește o funcție afină.

Funcțiile care modelează matematic anumite fenomene practice sunt restricții ale unor funcții afine la o mulțime de valori pentru care are loc fenomenul.

$$12. \text{ Fie funcția } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \in (-\infty, -1) \\ x - 2, & x \in [-1, 2] \\ 3x + 2, & x \in (2, +\infty) \end{cases}.$$

- Verifică dacă punctul $A(1, -1)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .
- Determină numărul real a pentru care punctul $M(3, -a + 5)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .
- Determină numărul real a pentru care punctul $M(a, -a - 3)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .
- Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre graficul funcției f și axele de coordonate Ox și Oy .
- Reprezintă grafic funcția f .
- Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și dreapta de ecuație $y = -2$.
- Determină coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și dreapta de ecuație $x = 2$.
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = x$.
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(-7x + 2) \leq 2x + 1$.
- Determină semnul funcției f .

$$13. \text{ Se consideră funcția } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 5x - 1, & x \in (-\infty, 0) \\ 3, & x \in [0, 4) \\ 3x - 15, & x \in [4, +\infty) \end{cases}.$$

- Reprezintă grafic funcția f .
- Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și axele de coordonate.
- Determină punctele care aparțin reprezentării grafice a funcției f și au coordonatele egale.
- Determină imaginea funcției f .
- Determină numărul de soluții reale ale ecuației $f(x) = m$, unde m este număr real.
- Determină semnul funcției f .

14. Determină semnul funcției f :

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 2| - 3$;
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |2x + 3| - |x - 1|$.

15. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

- $|x + 1| = |3x + 2|$;
- $|2(x + 1) + 7| = |x + 4|$;
- $|x - 3| + |x + 1| = 6$;
- $|2x + 4| - |x - 1| = 3$;
- $|x + 2| + |x - 4| = 3x - 1$;
- $|2x + 6| + |1 - x| = x + 7$.

16. Dreptele OA și BC din figura 18 sunt reprezentările grafice ale funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, respectiv $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în reperul cartezian xOy .

- Scris coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției g cu axele sistemului de coordonate xOy .
- Determină funcțiile f și g .
- Determină coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g .
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $g(x) \geq 0$.
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $g(x) \leq f(x)$.

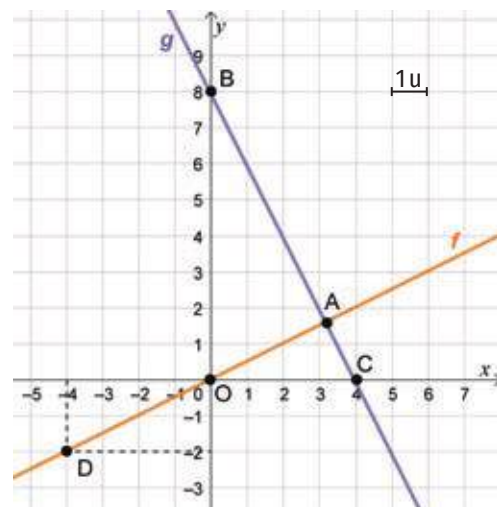


Figura 18

17. Dreptele AB, CD, EF și OE din figura 19 sunt reprezentările grafice ale funcțiilor f, g, h și p în reperul cartezian xOy .

- Determină funcțiile f, g, h și p .
- Determină coordonatele punctului de intersecție a reprezentărilor grafice ale funcțiilor f și g .
- Determină coordonatele punctului de intersecție a reprezentărilor grafice ale funcțiilor f și p .
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $h(x) = p(x)$.
- Determină cărei reprezentări grafice aparține fiecare dintre punctele $M(-3, 2)$, $N(1, -1)$, $P(\frac{1}{3}, 5)$.

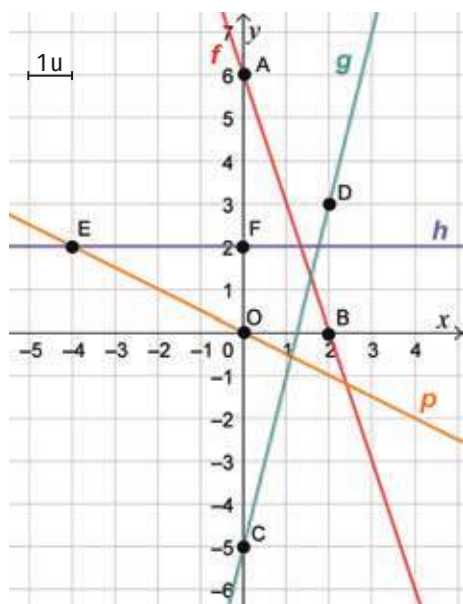


Figura 19

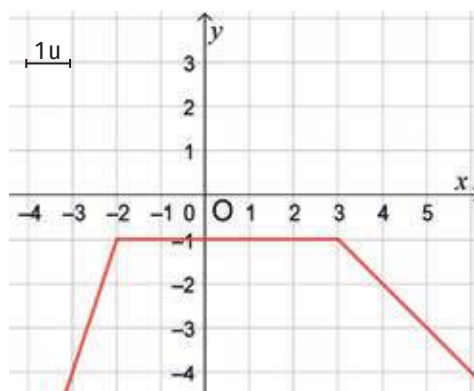


Figura 20

18. În figura 20 este reprezentată grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, în reperul cartezian xOy . Determină funcția f .

EXERSEAZĂ!

Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

- $|x + 2| < 5$;
- $|2x - 3| > 7$;
- $|-4x + 1| \geq 5$;
- $|x + 1| + |2x - 3| < 6$;
- $|2x - 3| - |x - 5| \leq 3$;
- $|4x + 1| + |2x - 1| \geq 8$;
- $|x + 1| + |2x + 6| \geq 6$;
- $|7x - 3| \leq 0$;
- $|x - 2| + |x^2 - 4| \leq 0$.

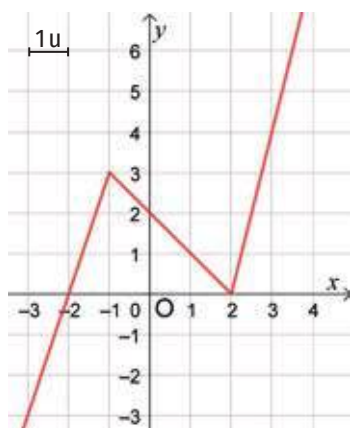


Figura 21

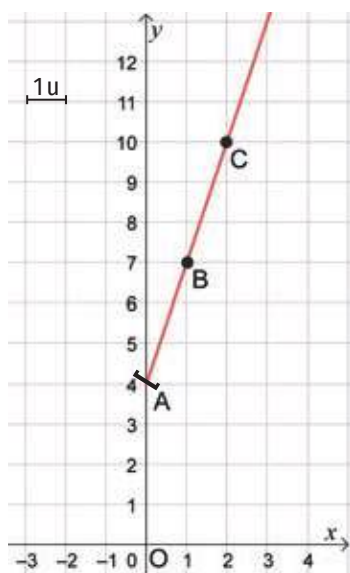


Figura 22

19. În figura 21 este reprezentată grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în reperul cartezian xOy .
- Scrie coordonatele punctului de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy .
 - Scrie coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox .
 - Determină funcția f .
 - Determină mulțimea valorilor numărului real m pentru care ecuația $f(x) = m$ are trei soluții în mulțimea numerelor reale.
 - Determină mulțimea numerelor reale m pentru care reprezentarea grafică a funcției f intersectează dreapta de ecuație $y = m$ într-un punct.
 - Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și reprezentarea grafică a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$.
 - Determină semnul funcției f .

20. O companie de taximetrie percepe, pentru efectuarea unei curse (fără staționări), o taxă t de pornire, la care se adaugă un cost de c lei pentru fiecare kilometru parcurs. În figura 22 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția care exprimă costul unei călătorii în funcție de numărul de kilometri parcurși.

- Scrie coordonatele punctelor A, B și C.
- Care este valoarea taxei de pornire?
- Care este costul în lei pentru un kilometru parcurs?
- Determină funcția care exprimă costul unei călătorii în funcție de numărul de kilometri parcurși.
- Cât plătește un client care a mers 14 km cu taxiul?

21. O bară de oțel se dilată sau se contractă în funcție de temperatura pe care o are. Deoarece temperatura minimă a barei poate fi -20°C , iar cea maximă poate fi 45°C , atunci când se montează bara, inginerii trebuie să prevadă o marjă de siguranță (numită rost de dilatare). În figura 23 este reprezentată grafic funcția liniară f care descrie dependența dintre valoarea dilatării/contractiei barei (în milimetri) și temperatura acesteia (exprimată în $^\circ\text{C}$). Punctul $B(25; 4,5)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .

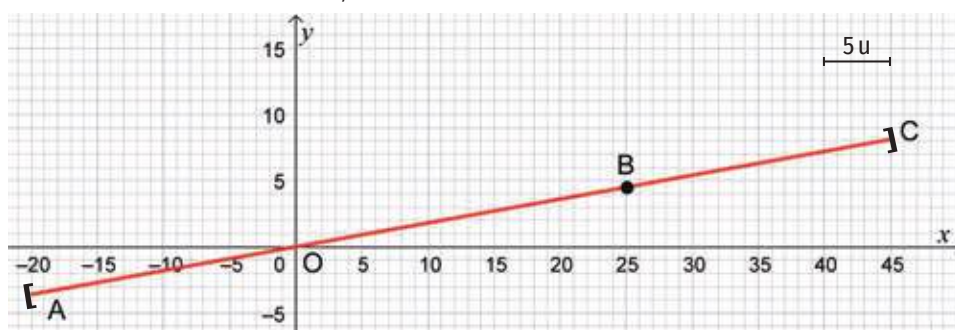


Figura 23

- Determină funcția f .
- Cu câți milimetri se contractă bara atunci când are o temperatură de -20°C ?
- Cu câți milimetri se dilată bara atunci când are o temperatură de 32°C ?
- Determină lungimea minimă a rostului de dilatare.



1.3. Proprietăți ale funcțiilor numerice: monotonie, mărginire, paritate/imparitate, convexitate/concavitate; lecturi grafice

Descopăr

Elevii vor fi împărțiți în două grupe.

1. În cadrul unui experiment de laborator se analizează modul în care se modifică înălțimile a două lumânări realizate din materiale diferite, raportat la momentul $t = 0$ când este aprinsă prima lumânare. Aceasta are înălțimea inițială de 20 cm și, odată aprinsă, se scurtează constant cu 1 cm la fiecare 2 minute. A doua lumânare are o înălțime inițială de 24 cm și este aprinsă când experimentul a ajuns deja la minutul 3. Din acel moment, înălțimea ei scade constant cu 2 cm la fiecare 3 minute.
 - a) Determinați funcțiile f și g care descriu evoluția înălțimilor celor două lumânări în funcție de timpul t exprimat în minute, măsurat din momentul aprinderii primei lumânări până la arderea completă a acesteia.
 - b) Reprezentați grafic funcțiile f și g în reperul cartezian xOy .
 - c) Determinați mulțimea valorilor fiecăreia dintre funcțiile f și g .
 - d) După câte minute de la începerea experimentului cele două lumânări vor avea aceeași înălțime?
 - e) După câte minute de la începerea experimentului prima lumânare va avea înălțimea de 8 cm? Ce înălțime va avea a doua lumânare în același moment?
 - f) Comparați înălțimea primei lumânări în două momente diferite ale experimentului. Ce observați?
 - g) Analizați modul în care se modifică înălțimea celei de-a doua lumânări înainte și după minutul 3 al experimentului.
 - h) Ce putem spune despre reprezentările grafice ale celor două funcții, dacă le privim de la stânga la dreapta?
2. În cadrul unui experiment de laborator se analizează modul în care se modifică cantitatea de lichid din două recipiente, în raport cu momentul $t = 0$, când începe umplerea primului recipient, până la momentul $t = 10$ când ambele recipiente sunt pline. Primul recipient conține inițial 5 litri de lichid. După începerea experimentului, cantitatea de lichid din acest recipient crește constant cu 2 litri la fiecare minut. Al doilea recipient conține inițial 8 litri de lichid și începe să fie umplut în minutul 2 al experimentului. Din acel moment, cantitatea de lichid din acest recipient crește constant cu 3 litri de lichid la fiecare 2 minute.
 - a) Determinați funcțiile f și g care descriu evoluția cantităților de lichid din cele două recipiente în funcție de timpul t , exprimat în minute, măsurat de la începutul experimentului.
 - b) Reprezentați grafic funcțiile f și g într-un reper cartezian xOy .
 - c) Determinați mulțimea valorilor fiecăreia dintre funcțiile f și g .





- d) După câte minute de la începerea experimentului vor conține cele două recipiente aceeași cantitate de lichid?
- e) După câte minute de la începerea experimentului primul recipient va conține 15 litri de lichid? Ce cantitate de lichid va conține al doilea recipient în acel moment?
- f) Comparați cantitățile de lichid existente în primul recipient în două momente diferite ale experimentului. Ce observați despre relația dintre trecerea timpului și volumul de lichid?
- g) Analizați modul în care se modifică cantitatea de lichid din cel de-al doilea recipient înainte și după minutul 2 al experimentului.
- h) Ce se poate spune despre reprezentările grafice ale celor două funcții, dacă le privim de la stânga la dreapta?

Învăț



Funcții monotone

În figurile 1, 2 și 3 sunt reprezentate grafic funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 1$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 1$ și $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2$.

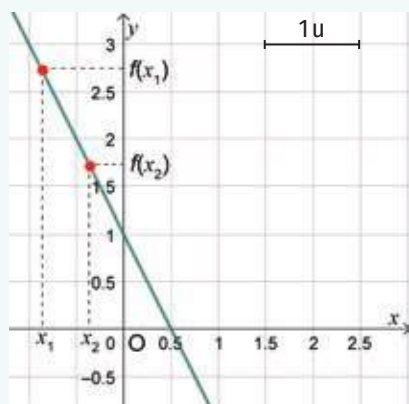


Figura 1

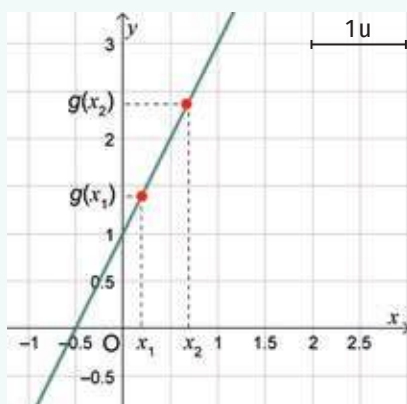


Figura 2

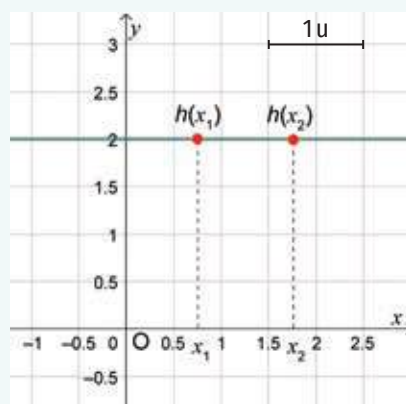


Figura 3

Analizând reprezentarea grafică a funcției f (figura 1), observăm că, pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) > f(x_2)$. Cu alte cuvinte, dacă valoarea argumentului crește, atunci valoarea imaginii corespunzătoare descrește. Vom spune că funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

Analizând reprezentarea grafică a funcției g (figura 2), observăm că, pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, cu $x_1 < x_2$, avem $g(x_1) < g(x_2)$. Cu alte cuvinte, dacă valoarea argumentului crește, atunci crește și valoarea imaginii corespunzătoare. Vom spune că funcția g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Analizând reprezentarea grafică a funcției h (figura 3), observăm că, pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, cu $x_1 < x_2$, avem $h(x_1) = h(x_2)$. Cu alte cuvinte, dacă valoarea argumentului crește, atunci valoarea imaginii corespunzătoare rămâne constantă. Funcția h este constantă și putem spune că este atât crescătoare, cât și descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

Definiția 1. Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție numerică și $I \subset A, I \neq \emptyset$. 

Spunem că funcția f este **monoton crescătoare** sau **crescătoare** pe mulțimea I dacă, oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Spunem că funcția f este **strict crescătoare** pe mulțimea I dacă, oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) < f(x_2)$.

Spunem că funcția f este **monoton descrescătoare** sau **descrescătoare** pe mulțimea I dacă, oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Spunem că funcția f este **strict descrescătoare** pe mulțimea I dacă, oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) > f(x_2)$.

OBSERVAȚII.

1. O funcție numerică $f: A \rightarrow B$ crescătoare sau descrescătoare pe o mulțime nevidă $I, I \subset A$, se numește **funcție monotonă pe I** . Intervalul I se numește, în acest caz, **interval de monotonie**.

2. Dacă o funcție numerică $f: A \rightarrow B$ este crescătoare sau descrescătoare pe A (domeniul de definiție), atunci spunem că funcția f este **monotonă**.

EXEMPLE:

1. Funcția $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{8, 10, 13, 17\}$, definită $f(1) = 17, f(2) = 13, f(3) = 10, f(4) = 8$, este o funcție strict descrescătoare, deoarece pentru $1 < 2 < 3 < 4$ avem $f(1) > f(2) > f(3) > f(4)$.

2. Funcția $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{8, 10, 13\}$, definită $f(1) = 8, f(2) = 10, f(3) = 13, f(4) = 13$, este o funcție monoton crescătoare, deoarece pentru $1 < 2 < 3 < 4$ avem $f(1) < f(2) < f(3) \leq f(4)$.

3. Funcția $f: \{-2, -1, 1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$, $f(x) = |x|$ nu este o funcție monotonă: $-2 < -1 < 1 < 2$, dar $f(-2) > f(-1) = f(1) < f(2)$.

Teorema 1. Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție numerică și $I \subset A$ o mulțime nevidă. Atunci:

1. Funcția f este monoton crescătoare sau crescătoare pe mulțimea I dacă și numai dacă $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$, oricare ar fi $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$.

2. Funcția f este strict crescătoare pe mulțimea I dacă și numai dacă $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, oricare ar fi $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$.

3. Funcția f este monoton descrescătoare sau descrescătoare pe mulțimea I dacă și numai dacă $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0$, oricare ar fi $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$.

4. Funcția f este strict descrescătoare pe mulțimea I dacă și numai dacă $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, oricare ar fi $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$.

Demonstrație:

1. Presupunem că funcția $f: A \rightarrow B$ este crescătoare pe mulțimea I . Fie $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$. Atunci $f(x_1) \leq f(x_2)$, deci $f(x_1) - f(x_2) \leq 0$. Cum $x_1 - x_2 < 0$, rezultă că $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$.

Presupunem că $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$, oricare ar fi $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$. Cum $x_1 - x_2 < 0$, rezultă că $f(x_1) - f(x_2) \leq 0$, deci $f(x_1) \leq f(x_2)$, ceea ce înseamnă că funcția f este crescătoare pe mulțimea I .

2. Presupunem că funcția $f : A \rightarrow B$ este strict crescătoare pe mulțimea I . Fie $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$. Atunci $f(x_1) < f(x_2)$, deci $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Cum $x_1 - x_2 < 0$, rezultă că $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$.

Presupunem că $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, oricare ar fi $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$. Cum $x_1 - x_2 < 0$, rezultă că $f(x_1) - f(x_2) < 0$, deci $f(x_1) < f(x_2)$, ceea ce înseamnă că funcția f este strict crescătoare pe mulțimea I .

3. Presupunem că funcția $f : A \rightarrow B$ este descrescătoare pe mulțimea I . Fie $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$. Atunci $f(x_1) \geq f(x_2)$, deci $f(x_1) - f(x_2) \geq 0$. Cum $x_1 - x_2 < 0$, rezultă că $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0$.

Presupunem că $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0$, oricare ar fi $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$. Cum $x_1 - x_2 < 0$, rezultă că $f(x_1) - f(x_2) \geq 0$, deci $f(x_1) \geq f(x_2)$, ceea ce înseamnă că funcția f este descrescătoare pe mulțimea I .

4. Presupunem că funcția $f : A \rightarrow B$ este strict descrescătoare pe mulțimea I . Fie $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$. Atunci $f(x_1) > f(x_2)$, deci $f(x_1) - f(x_2) > 0$. Cum $x_1 - x_2 < 0$, rezultă că $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$.

Presupunem că $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, oricare ar fi $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$. Cum $x_1 - x_2 < 0$, rezultă că $f(x_1) - f(x_2) > 0$, deci $f(x_1) > f(x_2)$, ceea ce înseamnă că funcția f este strict descrescătoare pe mulțimea I .

OBSERVAȚIE.

Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție numerică. Raportul $R(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$, unde $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$, se numește **rata creșterii/descrășterii funcției f** .

Analog se demonstrează pentru $x_1, x_2 \in I, x_1 > x_2$.

EXEMPLU:

Se consideră funcția modul $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$. Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $x_1 < x_2$. Atunci:

$$R(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{|x_1| - |x_2|}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2} = 1 > 0, \text{ dacă } x_1, x_2 \in [0, +\infty);$$

$$R(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{|x_1| - |x_2|}{x_1 - x_2} = \frac{-(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = -1 < 0, \text{ dacă } x_1, x_2 \in (-\infty, 0].$$

Rezultă că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$ și strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.

Teorema 2. Funcția afină $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ pentru $a > 0$, strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ pentru $a < 0$ și crescătoare/descrescătoare pe $\mathbb{R}$ pentru $a = 0$.

Demonstrație:

Fie $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$.

$$R(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} = \frac{ax_1 - ax_2}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = a$$

- Dacă $a < 0$, atunci $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, deci funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.
- Dacă $a > 0$, atunci $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, deci funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- Dacă $a = 0$, atunci $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0$, deci funcția f este crescătoare/descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

EXEMPLE:

1. Funcția afină $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ ($a = 5 > 0$).
2. Funcția afină $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -4x - 1$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ ($a = -4 < 0$).
3. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x < 1 \\ -3x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 1)$ și strict descrescătoare pe intervalul $[1, +\infty)$.

OBSERVAȚIE.

Monotonia unei funcții numerice se poate studia și prin observarea reprezentării grafice a acesteia în reperul cartezian xOy . Astfel:

- dacă reprezentarea graficului funcției „urcă” de la stânga la dreapta, funcția este crescătoare (figura 4);
- dacă reprezentarea graficului funcției „coboară” de la stânga la dreapta, funcția este descrescătoare (figura 5).

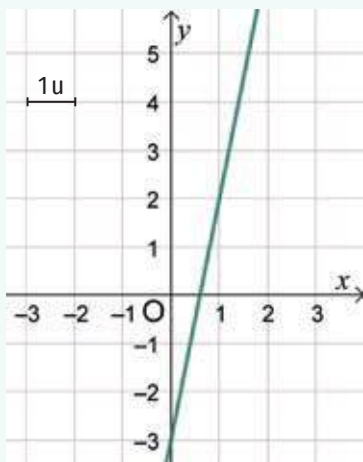


Figura 4

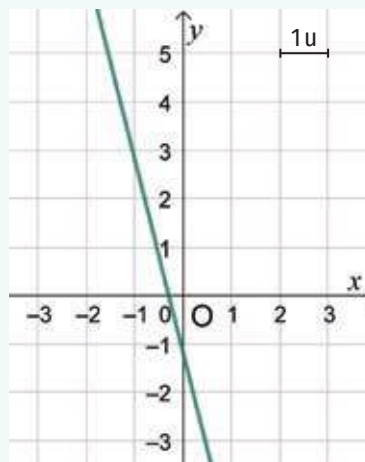


Figura 5

Funcții mărginite

Fie funcția parte fracționară $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$. Știm că $0 \leq \{x\} < 1$, pentru orice număr real x , de unde rezultă că $0 \leq f(x) < 1$ pentru orice număr real x . Putem spune astfel că funcția f este o funcție mărginită.

Definiția 2. Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție numerică. Spunem că funcția f este funcție mărginită dacă există numerele reale a și b , astfel încât $a \leq f(x) \leq b$, pentru orice număr real $x \in A$.

Dacă o funcție nu este mărginită, aceasta se numește nemărginită.

OBSERVAȚIE.

Funcția numerică $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este mărginită dacă există numărul real $M > 0$, astfel încât $|f(x)| \leq M$, pentru orice număr real $x \in A$.

EXEMPLE:

1. Funcția $1_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $1_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$, numită funcția lui Dirichlet, este mărginită ($Im\ 1_{\mathbb{Q}} = \{0, 1\}$).
2. Funcția $sgn: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $sgn(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, numită funcția semn sau funcția signum, este mărginită ($Im\ sgn = \{-1, 0, 1\}$).

3. Funcția $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, numită *funcția Heaviside*, este mărginită ($\text{Im } u = \{0, 1\}$).

4. Funcția $f : [7, 9] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -5x + 3$ este mărginită.

Observăm că $a = -5 < 0$, ceea ce înseamnă că funcția f este descrescătoare. Așadar, $f(9) \leq f(x) \leq f(7)$ pentru orice număr real $x \in [7, 9]$. Cum $f(9) = -42$ și $f(7) = -32$, rezultă că $-42 \leq f(x) \leq -32$ pentru orice număr real $x \in [7, 9]$, deci funcția f este mărginită.

Funcții pare, funcții impare

În figura 6 este reprezentată grafic funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Simetricul punctului $A(2, 4)$ față de axa Oy este punctul $A'(-2, 4)$. Observăm că punctele A și A' aparțin reprezentării grafice a funcției f .

Fie $x \in \mathbb{R}$ un număr real. Atunci $-x \in \mathbb{R}$ și $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Cum x este arbitrar, $f(-x) = f(x)$ pentru orice număr real x . În acest caz, spunem că funcția f este **funcție pară**.

Fie a un număr real. Punctul $M(a, f(a))$ aparține reprezentării grafice a funcției f . Cum $-a \in \mathbb{R}$ și $f(-a) = f(a)$, rezultă că punctul $M'(-a, f(a))$ aparține reprezentării grafice a funcției f și punctele M și M' sunt simetrice față de axa Oy . Cum a este un număr real oarecare, putem spune că reprezentarea grafică a funcției f este simetrică față de axa Oy .

În figura 7 este reprezentată grafic funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$. Simetricul punctului $A(2, 8)$ față de punctul O este punctul $A'(-2, -8)$. Observăm că punctele A și A' aparțin reprezentării grafice a funcției g . Fie $x \in \mathbb{R}$ un număr real. Atunci $-x \in \mathbb{R}$ și $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$. Cum x este arbitrar, $g(-x) = -g(x)$ pentru orice număr real x . În acest caz, spunem că funcția g este **funcție impară**.

Fie a un număr real. Punctul $M(a, g(a))$ aparține reprezentării grafice a funcției g . Cum $-a \in \mathbb{R}$ și $g(-a) = -g(a)$, rezultă că punctul $M'(-a, -g(a))$ aparține reprezentării grafice a funcției g și punctele M și M' sunt simetrice față de punctul O . Cum a este un număr real oarecare, putem spune că reprezentarea grafică a funcției g este simetrică față de punctul O .

Definiția 3. O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numește **simetrică față de origine** dacă $-x \in A$, pentru orice $x \in A$.

EXEMPLU:

Mulțimile $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $(-7, 7)$, $(-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$ sunt simetrice față de origine.

Mulțimile $\mathbb{N}$, $(-7, 7]$, $(-\infty, -5]$, $(-3, 2)$ nu sunt simetrice față de origine.

Definiția 4. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime simetrică față de origine. O funcție numerică $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **funcție pară** dacă $f(-x) = f(x)$, pentru orice $x \in A$.

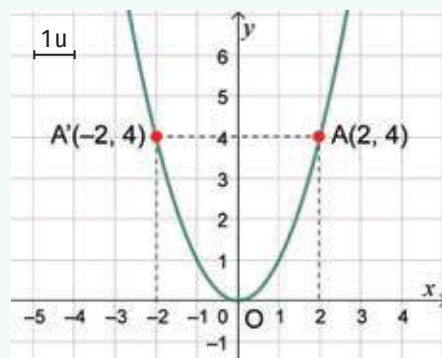


Figura 6

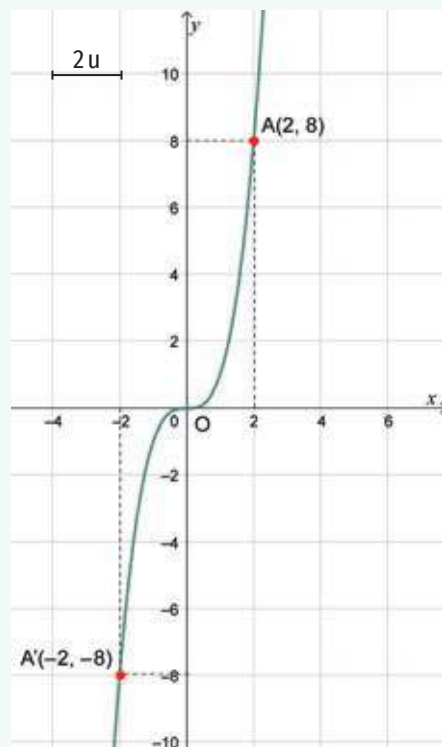


Figura 7

Teorema 3. Reprezentarea grafică a unei funcții pare este simetrică față de axa Oy.

Demonstrație:

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime simetrică față de origine și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție pară. Atunci, $f(-x) = f(x)$ pentru orice $x \in A$.

Punctele $M(x, f(x))$ și $M'(-x, f(-x))$, unde $x \in A$, aparțin reprezentării grafice a funcției f (figura 8). Cum $f(-x) = f(x)$ pentru orice $x \in A$, rezultă că punctul M' are coordonatele $(-x, f(x))$. Dreapta MM' este paralelă cu axa Ox, deci $MM' \perp Oy$. Dacă $MM' \cap Oy = \{N\}$, atunci $MM' \perp ON$. Fie P și P' proiecțiile punctelor M și, respectiv, M' , pe axa Ox. Atunci, $MP = M'P' = |f(x)|$, $OP = |x|$ și $OP' = |-x|$, deci $OP = OP' = |x|$. Din congruența triunghiurilor dreptunghice OPM și $OP'M'$ rezultă că $OM \equiv OM'$, deci triunghiul OMM' este isoscel. Cum ON este înălțime în triunghiul isoscel OMM' , rezultă că punctul N este mijlocul segmentului MM' , deci punctele M și M' sunt simetrice față de dreapta ON , adică față de axa Oy.

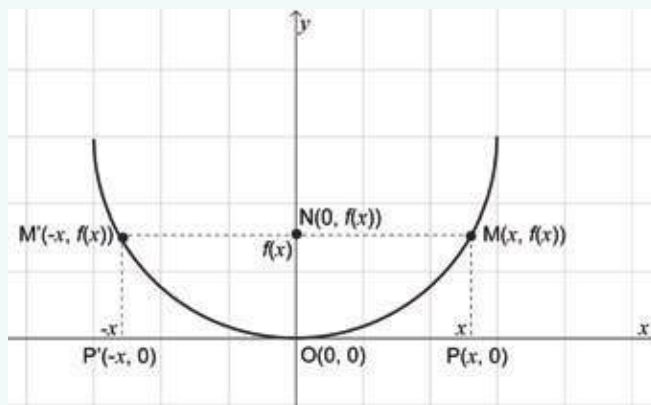


Figura 8

EXEMPLE:

1. Funcția $f: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2$, este funcție pară (figura 9).

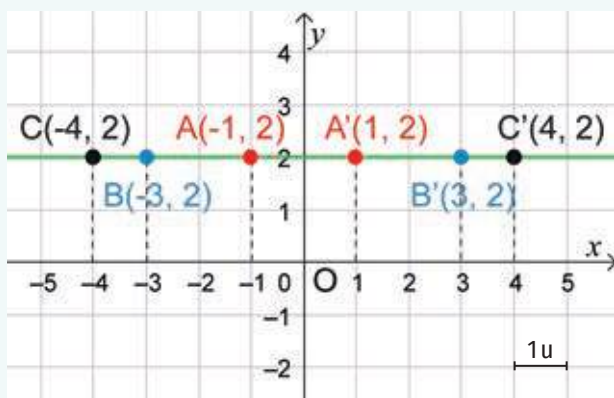


Figura 9

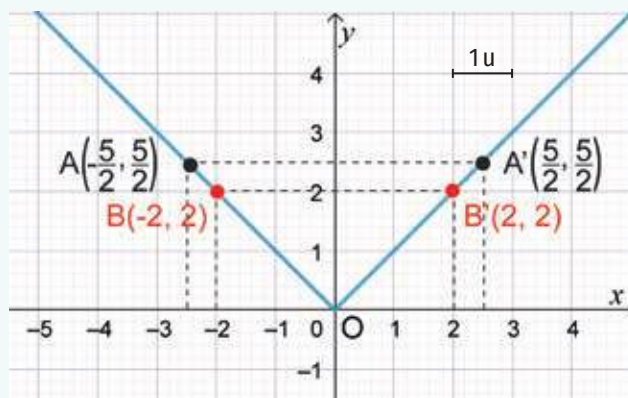


Figura 10

2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty, 0) \\ x, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$ este funcție pară (figura 10).

Definiția 5. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime simetrică față de origine. O funcție numerică $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ se numește funcție impară dacă $f(-x) = -f(x)$, pentru orice $x \in A$.

Teorema 3. Reprezentarea grafică a unei funcții impare este simetrică față de originea axelor de coordonate.

Demonstrație:

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime simetrică față de origine și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție impară. Atunci, $f(-x) = -f(x)$, pentru orice $x \in A$.

Punctele $M(x, f(x))$ și $M'(-x, -f(x))$, unde $x \in A$, aparțin reprezentării grafice a funcției f (figura 11). Cum $f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in A$ rezultă că punctul M' are coordonatele $(-x, -f(x))$. Fie P și P' proiecțiile punctelor M , respectiv M' , pe axa Ox . Atunci, $MP = M'P' = |f(x)|$, $OP = |x|$ și $OP' = |-x|$, deci $OP = OP' = |x|$. Din congruența triunghiurilor dreptunghice OPM și $OP'M'$ rezultă că $OM \equiv OM'$ și $\angle MOP \equiv \angle M'OP'$, deci punctele M și M' sunt simetrice față de punctul O .

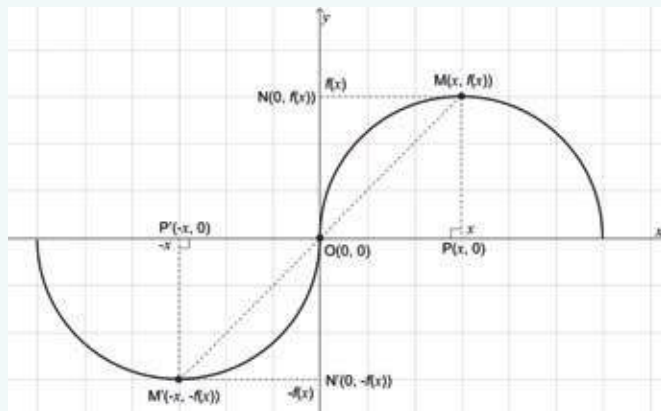


Figura 11

EXEMPLE:

1. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x$, este impară (figura 12).
2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3$, este impară (figura 13).
3. Funcția $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4}{x}$, este impară (figura 14).

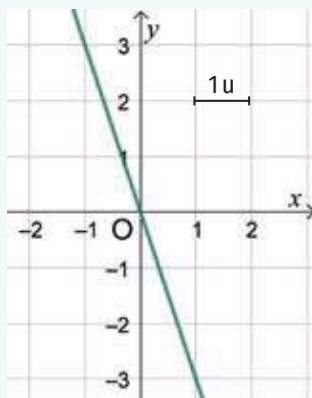


Figura 12

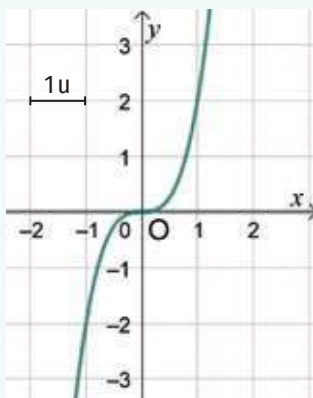


Figura 13

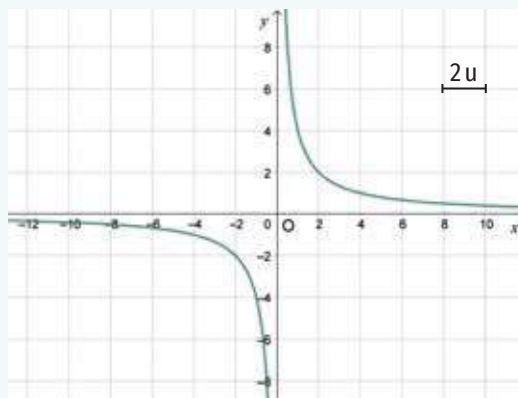


Figura 14

OBSERVAȚIE.

Există funcții care nu sunt nici pare și nici impare: de exemplu, funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 2$.

Funcții convexe. Funcții concave

În figura 15 sunt reprezentate grafic, în reperul cartezian xOy , funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$ și punctele $A(-2, 2)$ și $B(3, 7)$. Observăm că porțiunea din reprezentarea grafică a funcției f corespunzătoare punctelor care au abscisele în intervalul $[-2, 3]$ se află sub segmentul AB . În acest caz, spunem că funcția f este convexă pe intervalul $[-2, 3]$. De fapt, pentru orice două puncte $M(m, f(m))$ și $N(n, f(n))$, cu $m, n \in \mathbb{R}$, $m < n$, porțiunea din reprezentarea grafică a funcției f corespunzătoare punctelor care au abscisele în intervalul $[m, n]$ se află sub segmentul MN . Astfel, spunem că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

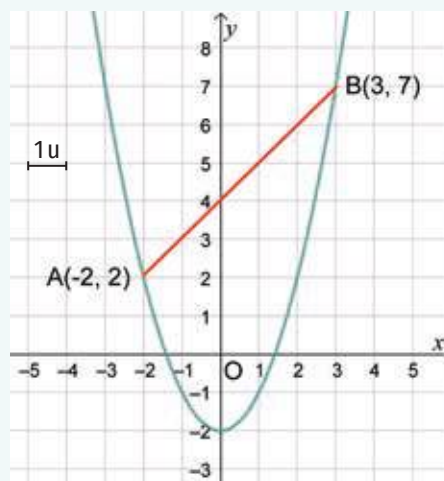


Figura 15

În figura 16 sunt reprezentate, în reperul cartezian xOy , grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$, și punctele $A(0, 3)$ și $B(2, 5)$. Observăm că porțiunea din reprezentarea grafică a funcției f corespunzătoare punctelor care au abscisele în intervalul $[0, 2]$ se află deasupra segmentului AB . În acest caz, spunem că funcția este concavă pe intervalul $[0, 2]$. De fapt, pentru orice două puncte $M(m, f(m))$ și $N(n, f(n))$, cu $m, n \in \mathbb{R}$, $m < n$, porțiunea din reprezentarea grafică a funcției f corespunzătoare punctelor care au abscisele în intervalul $[m, n]$ se află deasupra segmentului MN . Astfel, spunem că funcția f este concavă pe $\mathbb{R}$.

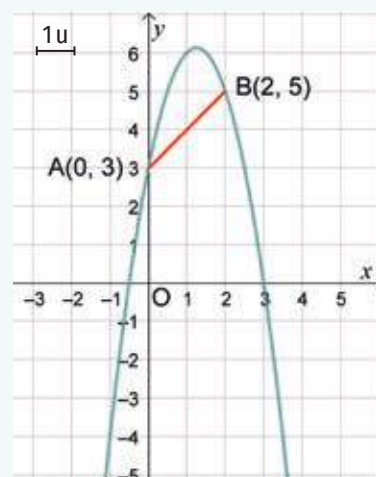


Figura 16

Definiția 6. Fie o funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval.

• Spunem că funcția f este convexă pe I

dacă $f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$, pentru orice $x_1, x_2 \in I$ și pentru orice $\lambda \in [0, 1]$.

• Spunem că funcția f este strict convexă pe I dacă $f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) < (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$, pentru orice $x_1, x_2 \in I$ și pentru orice $\lambda \in [0, 1]$.

• Spunem că funcția f este concavă pe I dacă $f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$, pentru orice $x_1, x_2 \in I$ și pentru orice $\lambda \in [0, 1]$.

• Spunem că funcția f este strict concavă pe I dacă $f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) > (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$, pentru orice $x_1, x_2 \in I$ și pentru orice $\lambda \in [0, 1]$.

EXEMPLU:

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = 2^x$ este o funcție convexă (figura 17), iar funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 0)$, $g(x) = -2^x$ este o funcție concavă (figura 18).

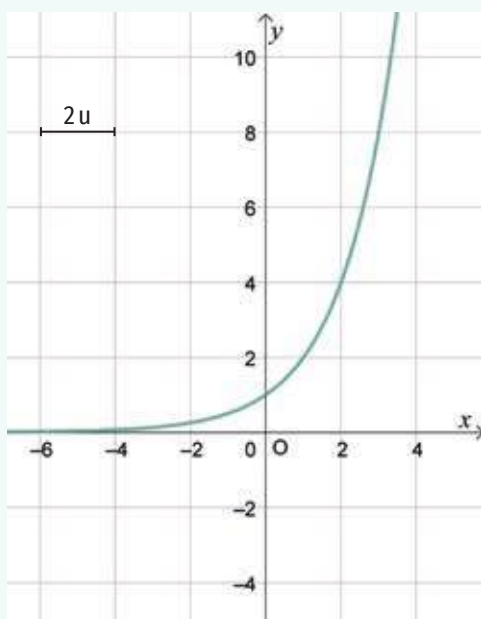


Figura 17

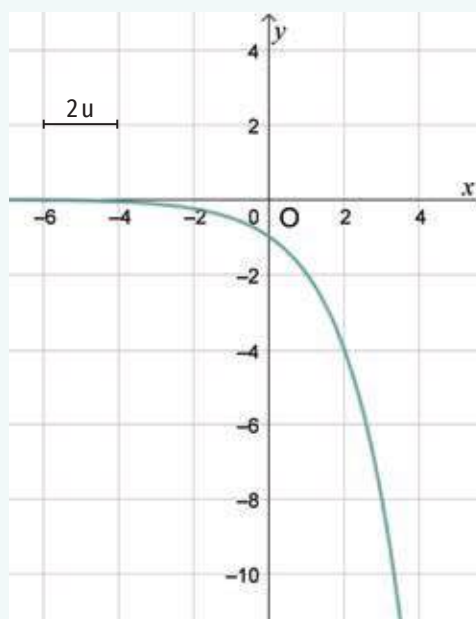


Figura 18

Exerciții rezolvate



1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & x \in (-\infty, -3) \\ x + 8, & x \in [-3, 1] \\ -2x + 5, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$.

Determină $f([3, 4))$ și $f((-\infty, 0))$

Rezolvare:

Funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[3, 4)$, deci $-3 < f(x) \leq -1$, pentru orice $x \in [3, 4)$. Obținem $f([3, 4)) = (-3, -1]$.

Funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, -3)$ și strict crescătoare pe intervalul $[-3, 1]$.

Atunci, $7 \leq f(x)$, pentru orice $x \in (-\infty, -3)$, și $5 \leq f(x) < 8$, pentru orice $x \in [-3, 0)$, deci $5 \leq f(x)$, pentru orice $x \in (-\infty, 0)$. Obținem $f((-\infty, 0)) = [5, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1 \\ ax - 2, & x \geq 1 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Determină valorile numărului real a pentru care funcția f este strict crescătoare.

b) Determină valorile numărului real a pentru care $\text{Im } f = \mathbb{R}$.

Rezolvare:

a) Funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 1)$. Pentru a fi strict crescătoare, funcția f trebuie să fie strict crescătoare și pe intervalul $[1, +\infty)$, ceea ce e echivalent cu $a > 0$.

Pentru $a > 0$, $f([1, +\infty)) = [a - 2, +\infty)$.

Cum $f((-\infty, 1)) = (-\infty, 2)$, pentru ca funcția f să fie strict crescătoare trebuie ca $a - 2 \geq 2$, adică $a \in [4, +\infty)$.

b) Cazul 1. $a > 0$

Dacă $a > 0$, atunci $f([1, +\infty)) = [a - 2, +\infty)$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Im } f = \mathbb{R} \\ f((-\infty, 1)) = (-\infty, 2) \\ f([1, +\infty)) = [a - 2, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow a - 2 \leq 2 \Rightarrow a \leq 4$$

Cum $a > 0$, obținem $a \in (0, 4]$.

Cazul 2. $a < 0$

Dacă $a < 0$, atunci $f([1, +\infty)) = (-\infty, a - 2]$ și $\text{Im } f \neq \mathbb{R}$.

Cazul 3. $a = 0$

Dacă $a = 0$, atunci $f([1, +\infty)) = \{-2\}$ și $\text{Im } f \neq \mathbb{R}$.

Așadar, $\text{Im } f = \mathbb{R}$ pentru $a \in (0, 4]$.



Aplic 1. Studiază monotonia funcției f .

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x$;
- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -0,7x + 3$;
- c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})x + 5$;
- d) $f: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{5}x - 10$;
- e) $f: (-\infty, 6) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{6}}x - 10$;
- f) $f: (-\infty, 9) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4 - \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{10}x$;
- g) $f: [-10, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x + 5|$;
- h) $f: [-4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3|x + 6| - 2\sqrt{2}x + 7$;
- i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left(1 - \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} - \dots - \frac{1}{9 \cdot 10}\right) - \frac{x + 2}{100}$;
- j) $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (2^{120} - 3^{80})(x - 1)$.

2. Se consideră funcția $f: \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3x + 2$.

- a) Reprezintă grafic funcția f cu ajutorul unui instrument digital (*GeoGebra* sau *Desmos*).
- b) Precizează intervalele de monotonie ale funcției f .

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x < -4 \\ |x + 2|, & -4 \leq x < 0 \\ 2x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

- a) Reprezintă grafic funcția f .
- b) Precizează intervalele de monotonie ale funcției f .

4. Arată că următoarele funcții sunt mărginite:

- a) $f: \{3, 6, 9\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3}{x} + 2$;
- b) $f: \{\sqrt{3} - 2, \sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + \sqrt{3}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$;
- c) $f: [4, 6] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 7x - 2$;
- d) $f: [-5, -2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1,2x - 1,6$;
- e) $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -6x + 1$;
- f) $f: \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x}$;
- g) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = 3 \cdot (-1)^n + 2,3$;
- h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 \cdot \{x\} + 5$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

5. Fie p un număr natural nenul de o cifră și funcțiile $f_p: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}, f_p(n) = \text{ultima cifră a puterii } p^n$.

- a) Arată că funcțiile f_1, f_5 și f_6 sunt constante.
- b) Arată că funcțiile f_p sunt mărginite, pentru orice număr natural nenul p de o cifră.
- c) Determină $\text{Im } f_p$, unde p este număr natural nenul de o cifră.

6. Arată că următoarele funcții sunt nemărginite:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x;$

b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = n + 1,6;$

c) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = |n - 5|;$

d) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = |2n + 1|;$

e) $f: \left[\frac{1}{\sqrt{10}}, +\infty \right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2;$

f) $f: (-\infty, 3) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x - 1,3;$

g) $f: \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 2,5;$

h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 \cdot [x] - 1$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

7. Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = (n, 37)$ (unde (a, b) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor a și b).

a) Determină imaginea funcției f .

b) Funcția f este funcție mărginită?

8. Fie funcția $g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}, g(n) = [n, 37]$ (unde $[a, b]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b).

a) Determină imaginea funcției g .

b) Funcția g este funcție mărginită?

9. Arată că următoarele funcții sunt pare:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^4 + 3x^2 + 2;$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -5x^6;$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x^2 + 5};$

d) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1};$

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2};$

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 3};$

g) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{9}{|x|}};$

h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4|x| - 2;$

i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\frac{2}{3}|x| + (2x^3)^2;$

j) $f: (-4, 4) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}.$

10. Arată că următoarele funcții sunt impare:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 2x;$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -6x^3 - x;$

c) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x^5} + 6x;$

d) $f: \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^7}{2|x| - 1};$

e) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{4\sqrt{x^2}}{x^9}.$

11. Arată că funcția $\operatorname{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ este impară.

12. Se consideră funcțiile $f: (-2, 0) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^3 - 2, g: [-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x + 3}$ și $h: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{2}{x^2} + 1$.

a) Reprezintă grafic funcțiile f, g și h cu ajutorul unui instrument digital.

b) Precizează intervalele de monotonie ale funcțiilor f, g și h .

c) Studiază mărginirea funcțiilor f, g și h .

d) Precizează dacă funcțiile f , g și h sunt convexe/concave pe domeniul lor de definiție.

e) Se poate discuta despre paritatea/imparitatea funcțiilor f , g și h ? Justifică răspunsul.

13. a) Determină numărul funcțiilor strict crescătoare $f: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$.

b) Determină numărul funcțiilor crescătoare $f: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$.

14. a) Determină numărul funcțiilor strict descrescătoare $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

b) Determină numărul funcțiilor descrescătoare $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

15. Determină intervalele de monotonie și imaginea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$a) f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x < 3 \\ -4x + 2, & x \geq 3 \end{cases}; \quad c) f(x) = \begin{cases} 5x - 1, & x \in (-\infty, -2) \\ 2x + 4, & x \in [-2, 3] \\ -5x + 7, & x \in (3, +\infty) \end{cases};$$

$$b) f(x) = \begin{cases} -6x + 2, & x \in (-\infty, -1] \\ -3x + 5, & x \in (-1, +\infty) \end{cases}; \quad d) f(x) = \begin{cases} -3, & x \in (-\infty, -4] \\ 2x + 5, & x \in (-4, 2] \\ 5x - 1, & x \in (2, +\infty) \end{cases}.$$

16. Se consideră funcțiile $f, g: [-5, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$, $g(x) = -x + 5$. Determină intervalele de monotonie ale funcțiilor $h, i, j, k: [-5, 6] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = \max(f(x), g(x)), i(x) = \min(f(x), g(x)), j(x) = |f(x) + g(x)|, k(x) = |f(x) - g(x)|.$$

INDICAȚIE:

$$\max(f(x), g(x)) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq g(x) \\ g(x), & f(x) < g(x) \end{cases}; \quad \min(f(x), g(x)) = \begin{cases} f(x), & f(x) < g(x) \\ g(x), & f(x) \geq g(x) \end{cases}$$

17. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 2$. Determină $f(-5, 3)$, $f(2, 4)$ și $f(3, +\infty)$.

18. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x - 4$. Determină $f(-\infty, 2)$ și $f(-2, +\infty)$.

19. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq -2 \\ 3x + 1, & x > -2 \end{cases}$.

Determină $f(-\infty, -5)$, $f(2, +\infty)$ și $f(-4, 1)$.

20. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < 2 \\ 4, & x = 2 \\ -2x + 5, & x > 2 \end{cases}$.

Determină $f(-2, 0)$, $f(2, 4)$ și $f(0, 3]$.

21. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

Determină $f(2, +\infty)$, $f(-2, -1)$, $f(2, 5]$ și $f(-5, 3]$.

22. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 3, & x \leq a \\ x + 1, & x > a \end{cases}$, unde a este număr real.

Demonstrează că funcția f este strict crescătoare pentru orice număr real a .

23. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + 2, & x \leq 1 \\ x + 3, & x > 1 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Determină valorile numărului real a pentru care funcția f este crescătoare.

b) Determină valorile numărului real a pentru care $\text{Im } f = \mathbb{R}$.

24. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & x < 2 \\ ax + 5, & x \geq 2 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Determină valorile numărului real a pentru care funcția f este strict descrescătoare.

b) Determină valorile numărului real a pentru care $\text{Im } f = \mathbb{R}$.

25. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \in (-\infty, 1) \\ a - 5, & x \in [1, 4) \\ 2x + 1, & x \in [4, +\infty) \end{cases}$, unde a este număr real. Determină valorile numărului real a pentru care funcția f este crescătoare.
26. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -3x + 5, & x \in (-\infty, -2] \\ (a + 2)x - 3, & x \in (-2, 3) \\ -x - 12, & x \in [3, +\infty) \end{cases}$, unde a este număr real. Determină valorile numărului real a pentru care funcția f este strict descrescătoare.
27. Productivitatea găinilor ouătoare este influențată direct de durata expunerii la lumină. Pentru a menține o producție optimă, fermierii folosesc adeseori iluminatul artificial. În perioada 1-10 februarie, durata luminii naturale crește constant cu 3 minute în fiecare zi. Se cunoaște faptul că, pe data de 10 februarie, durata luminii naturale este de 10 ore și 4 minute. Funcția f exprimă durata luminii naturale (exprimată în minute) în funcție de numărul zilei din perioada 1-10 februarie, iar funcția g exprimă durata perioadei fără lumină naturală (exprimată în minute) în funcție de numărul zilei din perioada 1-10 februarie.
- Determină care este durata luminii naturale în data de 1 februarie.
 - Determină funcția f .
 - Precizează monotonia funcției f .
 - Precizează monotonia funcției g .
 - Arată că funcțiile f și g sunt mărginite.
 - Poți studia paritatea funcțiilor f și g ? Justifică răspunsul.
28. În figura 19, cele două arce de cerc $\widehat{CB}$ și $\widehat{BC'}$ formează reprezentarea geometrică a graficului funcției $f: D \rightarrow D'$ în reperul cartezian xOy . Arcul $\widehat{CB}$ provine din cercul care are centrul în punctul A și raza r ($r > 0$), arcul $\widehat{BC'}$ provine din cercul care are centrul în punctul A' și raza r , iar punctele A și A' sunt simetrice față de punctul B .

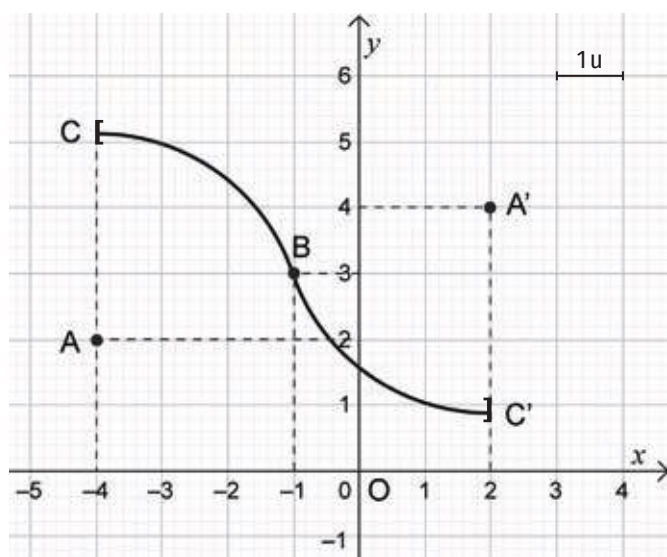


Figura 19

- Precizează coordonatele punctelor A , A' și B și domeniul de definiție al funcției f .
- Precizează coordonatele punctelor C și C' .
- Demonstrează că funcția f este mărginită.
- Precizează monotonia funcției f .
- Precizează intervalul pe care funcția f este convexă și intervalul pe care funcția f este concavă.
- Determină coordonatele punctului de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy .

1.4. Funcții obținute prin operații algebrice elementare (sumă, diferență, produs, raport); compunerea funcțiilor

Descopăr



Intensitatea curentului electric I (exprimată în amperi) depinde de rezistența variabilă R (exprimată în ohmi) a unui consumator extern, conform legii lui Ohm pentru întregul circuit. Funcția $I : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $I(R) = \frac{120}{R+10}$ reprezintă modelul matematic al legii lui Ohm pentru un circuit cu tensiunea electromotoare $E = 120$ V și rezistența internă $r = 10$ Ω .

- Reprezintă grafic funcția I în reperul cartezian xOy cu ajutorul unui instrument digital.
- Identifică punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției I cu axa Oy și determină coordonatele acestuia. Interpretează rezultatul obținut.
- Să presupunem că avem un dispozitiv care necesită o intensitate constantă a curentului electric de 2 amperi pentru a funcționa. La ce valoare, măsurată în ohmi, trebuie setată rezistența?
- O siguranță fuzibilă se arde în cazul în care curentul depășește 3 amperi. Determină intervalul valorilor rezistenței R pentru care siguranța nu se arde.



Învăț

Cu funcțiile numerice se pot efectua aceleași operații care se realizează cu numere reale. Prin adunarea, scăderea, înmulțirea sau împărțirea a două funcții numerice se obțin tot funcții numerice.

Definiția 1. Fie funcțiile numerice $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ și $g : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Funcția $f + g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, pentru orice $x \in A$, se numește suma dintre funcția f și funcția g .

Funcția $f - g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, pentru orice $x \in A$, se numește diferența dintre funcția f și funcția g .

Funcția $f \cdot g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, pentru orice $x \in A$, se numește produsul funcțiilor f și g .

Funcția $h : B \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, pentru orice $x \in B$, $B = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$, se numește raportul dintre funcția f și funcția g .

EXEMPLU:

Fie funcțiile $f : (-1, 4) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, și $g : (-1, 4) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 4$. Atunci:

- suma funcțiilor f și g este funcția $f + g : (-1, 4) \rightarrow \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = x + 5$;
- diferența dintre funcția f și funcția g este funcția $f - g : (-1, 4) \rightarrow \mathbb{R}$, $(f - g)(x) = 3x - 3$;
- diferența dintre funcția g și funcția f este funcția $g - f : (-1, 4) \rightarrow \mathbb{R}$, $(g - f)(x) = -3x + 3$;
- produsul funcțiilor f și g este funcția $f \cdot g : (-1, 4) \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = (2x + 1)(-x + 4)$;
- raportul dintre funcția f și funcția g este funcția $h : (-1, 4) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{2x + 1}{-x + 4}$;
- raportul dintre funcția g și funcția f este funcția $i : (-1, 4) \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{-x + 4}{2x + 1}$.

OBSERVAȚIE.

Suma și diferența a două funcții afine sunt tot funcții afine.

Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = c$, unde c este un număr real nenul. Suma dintre funcțiile f și g este funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + c$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Funcția h va avea aceeași monotonie ca funcția f . Reprezentarea grafică a funcției h în reperul cartezian xOy va avea aceeași formă ca reprezentarea grafică a funcției f , aceasta obținându-se prin translația reprezentării grafice a funcției f cu distanța $|c|$, în sus sau în jos, după cum $c > 0$ sau $c < 0$ (figura 1).

EXEMPLU:

Se consideră funcțiile $f, g, h: [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$, $g(x) = f(x) + 2$, $h(x) = f(x) - 1$. În figura 1 sunt reprezentările grafice ale funcțiilor f, g și h în reperul cartezian xOy .

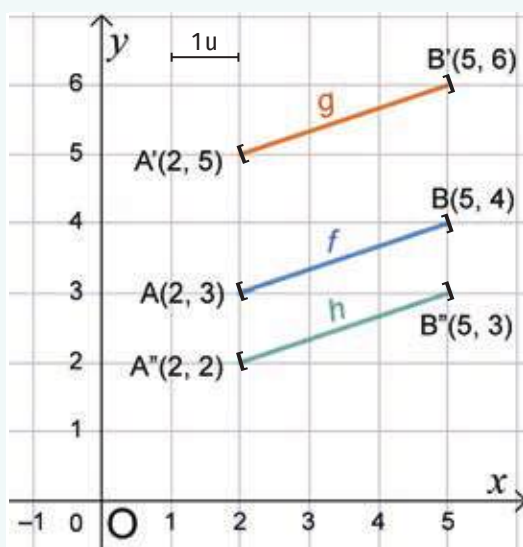


Figura 1

Produsul funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = c$, unde c este un număr real nenul, este funcția $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i(x) = c \cdot f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

În continuare vom observa comparativ reprezentările grafice ale unor funcții.

În figura 2 sunt reprezentate grafic funcțiile $f_1: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = 2x + 1$, și $i_1: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $i_1(x) = 2f_1(x)$, iar în figura 3 sunt reprezentate grafic funcțiile $f_2: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$, și $i_2: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $i_2(x) = 2f_2(x)$.

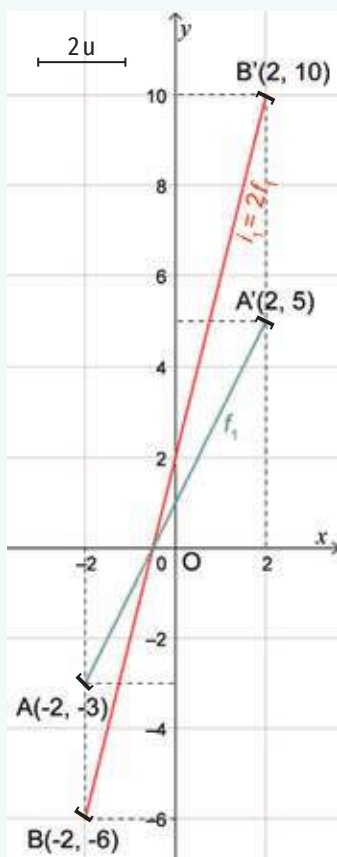


Figura 2

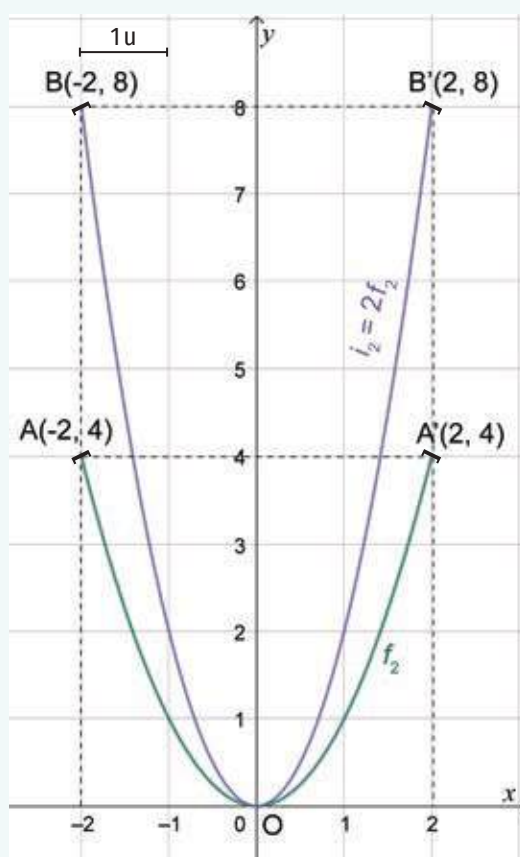


Figura 3

În figura 4 sunt reprezentate grafic funcțiile $f_1 : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = 2x + 1$, și $i_1 : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, i_1(x) = \frac{1}{2}f_1(x)$, iar în figura 5 sunt reprezentate grafic funcțiile $f_2 : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x^2$, și $i_2 : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, i_2(x) = \frac{1}{2}f_2(x)$.

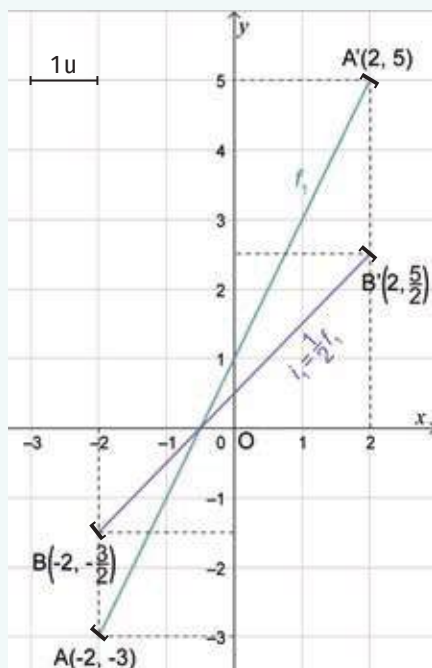


Figura 4

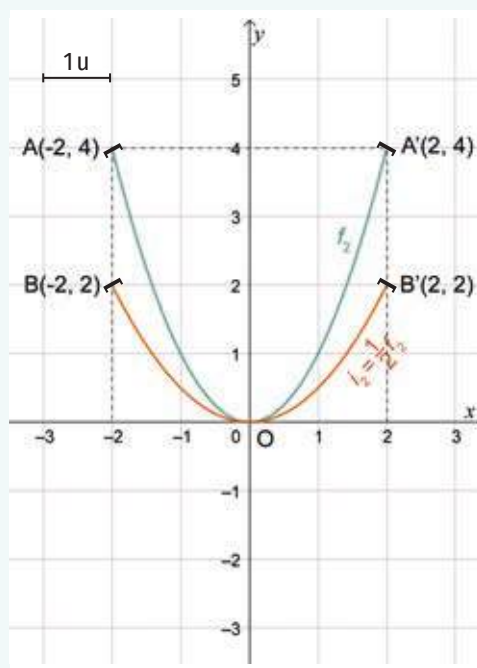


Figura 5

În figura 6 sunt reprezentate grafic funcțiile $f_1 : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = 2x + 1$, și $i_1 : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, i_1(x) = -2f_1(x)$, iar în figura 7 sunt reprezentate grafic funcțiile $f_2 : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x^2$, și $i_2 : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, i_2(x) = -2f_2(x)$.

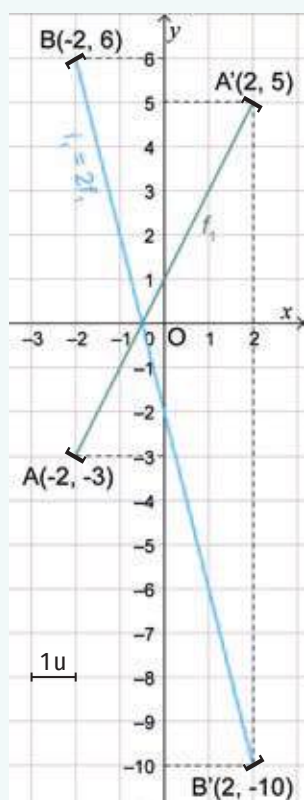


Figura 6

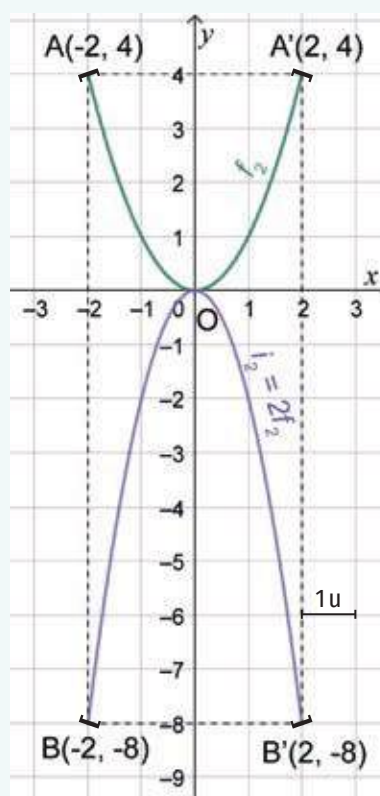


Figura 7

Fie funcțiile numerice $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$). Semnul funcțiilor $f \cdot g: A \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, pentru orice $x \in A$, și $h: B \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, pentru orice $x \in B$, $B = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$, se poate determina în funcție de semnul funcțiilor f și g .

EXEMPLE:

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (3x - 6)(-x + 3)$. Pentru a determina semnul funcției f procedăm astfel:

– Rezolvăm în mulțimea numerelor reale ecuațiile $3x - 6 = 0$ și $-x + 3 = 0$ și obținem:

$$3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2;$$

$$-x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

– Realizăm următorul tabel de semn:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$3x - 6$	-----	0	+++++	+++++
$-x + 3$	+++++	+++++	0	-----
$f(x) = (3x - 6)(-x + 3)$	-----	0	+++++	0

Obținem:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (2, 3);$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty).$$

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x - 4}{5x + 10}$. Pentru a determina semnul funcției f procedăm astfel:

– Rezolvăm în mulțimea numerelor reale ecuațiile $4x - 4 = 0$ și $5x + 10 = 0$ și obținem:

$$4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

$$5x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

– Realizăm următorul tabel de semn:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$4x - 4$	-----	-----	0	+++++
$5x + 10$	-----	0	+++++	+++++
$f(x) = \frac{4x - 4}{5x + 10}$	+++++	/-----	0	+++++

Obținem:

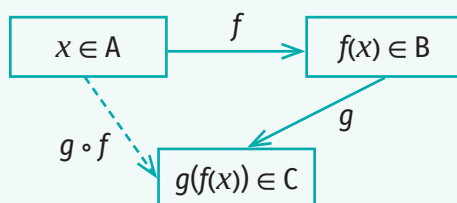
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty);$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 1).$$

Compunerea funcțiilor

Definiție 4. Fie mulțimile nevide A, B, C și funcțiile $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$. Funcția $h: A \rightarrow C$, $h(x) = g(f(x))$, pentru orice $x \in A$, se numește compunerea funcției g cu funcția f . Se notează $h = g \circ f$.

Compunerea a două funcții $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow C$ poate fi ilustrată astfel:



Operația prin care din funcțiile $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow C$ se obține funcția $g \circ f: A \rightarrow C$, cu $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ se numește **operația de compunere a funcțiilor**.

EXEMPLE:

1. Fie mulțimile $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-2, 0, 2, 4\}$, $C = \{1, 3, 5, 7\}$ și funcțiile $f: A \rightarrow B$, $f(x) = 2x$ și $g: B \rightarrow C$, definită cu ajutorul tabelului de mai jos:

x	-2	0	2	4
$g(x)$	1	3	5	5

Avem următoarele corespondențe:

$$-1 \in A \xrightarrow{f} f(-1) = 2 \cdot (-1) = -2 \in B \xrightarrow{g} g(-2) = 1, \text{ deci } g(f(-1)) = 1 \in C;$$

$$0 \in A \xrightarrow{f} f(0) = 2 \cdot 0 = 0 \in B \xrightarrow{g} g(0) = 3, \text{ deci } g(f(0)) = 3 \in C;$$

$$1 \in A \xrightarrow{f} f(1) = 2 \cdot 1 = 2 \in B \xrightarrow{g} g(2) = 5, \text{ deci } g(f(1)) = 5 \in C;$$

$$2 \in A \xrightarrow{f} f(2) = 2 \cdot 2 = 4 \in B \xrightarrow{g} g(4) = 5, \text{ deci } g(f(2)) = 5 \in C.$$

Am arătat astfel că pentru orice $x \in A$, avem $g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in C$. Funcția $g \circ f$ poate fi descrisă cu ajutorul unui tabel astfel:

x	-1	0	1	2
$(g \circ f)(x)$	1	3	5	5

2. Fie $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$, și $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $g(x) = 3x + 2$.

$$g \circ f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) + 2 = \frac{3}{2}x + 3, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{Q}.$$

$$f \circ g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{2} \cdot (3x + 2) + \frac{1}{3} = \frac{3}{2}x + \frac{4}{3}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{Q}.$$

OBSERVAȚII:

1. **Operația de compunere a funcțiilor nu este comutativă.**

2. Fie funcțiile $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ și $h: C \rightarrow D$. Atunci există funcțiile $(h \circ g) \circ f: A \rightarrow D$ și $h \circ (g \circ f): A \rightarrow D$ și $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$, pentru orice $x \in A$ (**operația de compunere a funcțiilor este asociativă**).

3. Fie funcțiile $f: A \rightarrow B$, $1_A: A \rightarrow A$, $1_A(x) = x$ (numită **funcția identică a mulțimii A**) și $1_B: B \rightarrow B$, $1_B(x) = x$, (numită funcția identică a mulțimii B). Atunci $f \circ 1_A: A \rightarrow B$, $1_B \circ f: A \rightarrow B$ și $f \circ 1_A = f$, $1_B \circ f = f$.

Într-adevăr, funcțiile $f \circ 1_A$, $1_B \circ f$ și f au același domeniu de definiție (mulțimea A), același codomeniu (mulțimea B) și

$$(f \circ 1_A)(x) = f(1_A(x)) = f(x), \text{ pentru orice } x \in A;$$

$$(1_B \circ f)(x) = 1_B(f(x)) = f(x), \text{ pentru orice } x \in A.$$

Prin urmare, $f \circ 1_A = f$ și $1_B \circ f = f$.

OBSERVAȚIE.

Proprietatea de asociativitate a operației de compunere a funcțiilor ne permite să notăm:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f.$$

Exerciții rezolvate



1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x-2)(x+6)(x+8)$. Determină semnul funcției f .

Rezolvare:

Rezolvăm în mulțimea numerelor reale ecuațiile $x-2=0$, $x+6=0$ și $x+8=0$ și obținem:

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2; \quad x+6=0 \Leftrightarrow x=-6; \quad x+8=0 \Leftrightarrow x=-8.$$

Realizăm următorul tabel de semn:

x	$-\infty$	-8	-6	2	$+\infty$
$x - 2$	-----			0	+++++
$x + 6$	-----			0	+++++
$x + 8$	-----			0	+++++
$(x - 2)(x + 6)(x + 8)$	-----			0	+++++

Obținem:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-8, -6) \cup (2, +\infty);$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -8) \cup (-6, 2).$$

2. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $\frac{3x-6}{-2x+8} < 0;$ b) $\frac{2x-1}{3x+3} \geq -1.$

Rezolvare:

a) Rezolvăm în mulțimea numerelor reale ecuațiile $3x-6=0$ și $-2x+8=0$ și obținem:

$$3x-6=0 \Leftrightarrow x=2; \quad -2x+8=0 \Leftrightarrow x=4.$$

Realizăm următorul tabel de semn:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$3x - 6$	-----	0	+++++	+
$-2x + 8$	+++++	+	0	-----
$\frac{3x - 6}{-2x + 8}$	-----	0	+++++	/-----

Obținem:

$$\frac{3x-6}{-2x+8} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty).$$

$$b) \frac{2x-1}{3x+3} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{3x+3} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5x+2}{3x+3} \geq 0$$

Rezolvăm în mulțimea numerelor reale ecuațiile $5x+2=0$ și $3x+3=0$ și obținem:

$$5x+2=0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}; \quad 3x+3=0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Realizăm următorul tabel de semn:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{2}{5}$	$+\infty$
$5x+2$	----- 0+++++			
$3x+3$	----- 0+++++			
$\frac{5x+2}{3x+3}$	+++++ /----- 0+++++			

$$\text{Obținem: } \frac{5x+2}{3x+3} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \left[-\frac{2}{5}, +\infty\right).$$

3. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 7 \\ 2x-5, & x \geq 7 \end{cases}$ și $g(x) = \begin{cases} -x, & x < 2 \\ x-4, & x \geq 2 \end{cases}$.

- a) Calculează $(g \circ g)(5)$.
b) Determină funcțiile $f \circ g$ și $g \circ f$.

Rezolvare:

a) $(g \circ g)(5) = g(g(5)) = g(1) = -1$

b) $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g(x) + 2, & g(x) < 7 \\ 2g(x) - 5, & g(x) \geq 7 \end{cases} = \begin{cases} -x + 2, & -x < 7 \text{ și } x < 2 \\ x - 4 + 2, & x - 4 < 7 \text{ și } x \geq 2 \\ 2 \cdot (-x) - 5, & -x \geq 7 \text{ și } x < 2 \\ 2 \cdot (x - 4) - 5, & x - 4 \geq 7 \text{ și } x \geq 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -x + 2, & x \in (-7, 2) \\ x - 2, & x \in [2, 11) \\ -2x - 5, & x \in (-\infty, -7] \\ 2x - 13, & x \in [11, +\infty) \end{cases} = \begin{cases} -2x - 5, & x \in (-\infty, -7] \\ -x + 2, & x \in (-7, 2) \\ x - 2, & x \in [2, 11) \\ 2x - 13, & x \in [11, +\infty) \end{cases}$$

$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} -f(x), & f(x) < 2 \\ f(x) - 4, & f(x) \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} -(x+2), & x+2 < 2 \text{ și } x < 7 \\ -(2x-5), & 2x-5 < 2 \text{ și } x \geq 7 \\ (x+2)-4, & x+2 \geq 2 \text{ și } x < 7 \\ (2x-5)-4, & 2x-5 \geq 2 \text{ și } x \geq 7 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -x-2, & x \in (-\infty, 0) \\ -2x+5, & x \in \emptyset \\ x-2, & x \in [0, 7) \\ 2x-9, & x \in [7, +\infty) \end{cases} = \begin{cases} -x-2, & x \in (-\infty, 0) \\ x-2, & x \in [0, 7) \\ 2x-9, & x \in [7, +\infty) \end{cases}$$

Aplic

1. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Determină funcțiile $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$.
- a) $f(x) = 3x$, $g(x) = x + 4$; g) $f(x) = \sqrt{2}x - 5$, $g(x) = \sqrt{8}x + 7$;
b) $f(x) = 3 - 4x$, $g(x) = x$; h) $f(x) = 2\sqrt{3}x - 5$, $g(x) = \sqrt{3}x + 7$;
c) $f(x) = 5x + 1$, $g(x) = 3x + 3$; i) $f(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x + \frac{1}{6}$, $g(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x - \frac{1}{6}$;
d) $f(x) = \frac{3}{2}x + 1,5$, $g(x) = x + 1$; j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}x + 1$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}x - 1$;
e) $f(x) = x - 5$, $g(x) = -x + 7$; k) $f(x) = 3^m x$, $g(x) = 3^n x$, $m, n \in \mathbb{N}$;
f) $f(x) = (x+1)^2 - (x-2)^2$, $g(x) = x - 2$; l) $f(x) = 2^n x + 1$, $g(x) = 2^{n-1}x - 1$, $n \in \mathbb{N}$.
2. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$, unde a, b, c și d sunt numere reale.
- a) Determină funcțiile $f \circ g$ și $g \circ f$.
b) Determină o relație între numerele reale a, b, c și d , astfel încât $f \circ g = g \circ f$.
c) Determină $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(0)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

POT MAI MULT

1. Se consideră

funcțiile

$$f, g, h, p, q, r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = x,$$

$$g(x) = -f(x),$$

$$h(x) = -f(x) - 4,$$

$$p(x) = f(x) + 5,$$

$$q(x) = 3x,$$

$$r(x) = \frac{1}{5}x.$$

a) Reprezintă grafic, în același reper cartezian xOy , funcțiile f și g , f și h , f și p , f și q , f și r .

b) Explică modul în care se pot obține reprezentările grafice ale funcțiilor g, h, p, q și r din reprezentarea grafică a funcției f .

2. Se consideră

funcțiile

$$f, g, h, p, q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = x^2,$$

$$g(x) = x^2 + 3,$$

$$h(x) = x^2 - 2,$$

$$p(x) = (x - 4)^2,$$

$$q(x) = (x + 1)^2 - 3.$$

a) Reprezintă grafic, în același reper cartezian xOy , funcțiile f și g , f și h , f și p , f și q .

b) Explică modul în care se pot obține reprezentările grafice ale funcțiilor g, h, p și q din reprezentarea grafică a funcției f .

3. Se consideră funcțiile afine $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Determină funcția g , știind că:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1, (2)$ și $(f + g)(x) = 6x - 4, (2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = 5x + \frac{3}{5}$ și $(f - g)(x) = 10, 3x - \frac{2}{0,4}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = \frac{1}{4}x + 1$ și $(f \cdot g)(x) = \frac{x^2}{32} - \frac{1}{2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

d) $f(x) = 2x + 1$ și $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 6 + \frac{60}{2x - 9}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{9}{2}\right\}$;

e) $f(x) = 2x + 1$ și $(f \circ g)(x) = 4x + 3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

4. Se consideră funcțiile afine $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Determină funcția f , știind că:

a) $g(x) = 9x + \frac{1}{3}$ și $(f + g)(x) = \frac{8}{3}x - \frac{0,2}{0,3}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

b) $g(x) = x + 1, (2)$ și $(f - g)(x) = 6x - 4, (2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

c) $g(x) = x + 1$ și $(f \cdot g)(x) = 2x^2 + 5x + 3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

d) $g(x) = 3x - 1$ și $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 1 - \frac{x - 2}{3x - 1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$;

e) $g(x) = 3x - 2$ și $(f \circ g)(x) = 6x - 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5. Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și axele de coordonate. 

a) $f(x) = (x^2 - 4)(x + 4)$;

c) $f(x) = x(x - 5)$;

b) $f(x) = (x - 2)(x^2 + 8)$;

d) $f(x) = (x - 2)(x^2 - 1)$.

6. Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și axele de coordonate.

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x + 1}{x^2 - 1}$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x^2 - x}{2x^2 + 5}$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{-x + 4}{x^2 + 3x + 5}$;

d) $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2 - x^2}{3 - x}$.

7. Determină semnul funcției f .

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (-x + 2)(12 - 4x)$;

c) $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x - 9}{-x - 2}$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (3 + x)(-3x + 1)$;

d) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{5x + 5}{1 - x}$.

8. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele inecuații:

a) $(x + 1)(x + 4) > 0$;

c) $(x - 1)(-x + 5) < 0$;

b) $(4 + 2x)(3x - 2) \leq 0$;

d) $(-x + 2)(-2x - 6) \geq 0$.

9. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele inecuații:

a) $\frac{x - 2}{2x - 3} > 0$;

c) $\frac{4x + 8}{5 - x} \geq 0$;

e) $\frac{6x}{-2x - 3} \geq 2$;

g) $\frac{4x + 1}{-3x + 2} \leq 3$;

b) $\frac{5x + 1}{3 - x} \geq 0$;

d) $\frac{6x - 8}{-2x - 8} < 0$;

f) $\frac{5x + 1}{-2x + 6} < -1$;

h) $\frac{-7x + 2}{x - 6} > -2$.

10. Se dau funcțiile afine $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x + 1$ și $g(x) = 2x - 1$. Determină numărul real a pentru care $(f \circ g)(a) - \frac{1}{2}(g \circ f)(a) = 3$.11. Se consideră funcția afină $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale. Determină numerele reale a și b pentru care $(f \circ f)(x) = 9x + 6$.12. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{a}x + b$, unde a și b sunt numere reale, $a > 0$. Determină numerele reale a și b pentru care $(f \circ f)(x) = 9x + 6$.

13. Fie funcția afină $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Determină numerele reale a și b pentru care:

- $(f \circ f)(x) = 2x - 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
- $(f \circ f)(x) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
- $(f \circ f)(x) = f(x) + 6x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
- $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

14. Calculează $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ și $g \circ g$.

$$a) f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ x - 6, & x \geq 0 \end{cases} \text{ și } g(x) = \begin{cases} -x + 3, & x < 3 \\ -x + 2, & x \geq 3 \end{cases};$$

$$b) f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x < 1 \\ \frac{1}{3}x + 3, & x \geq 1 \end{cases} \text{ și } g(x) = \begin{cases} x + \frac{3}{2}, & x < 1 \\ x + \frac{1}{2}, & x \geq 1 \end{cases};$$

$$c) f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x + 3| \text{ și } g(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < -3 \\ 3x + 2, & x \geq -3 \end{cases};$$

$$d) f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |2x + 1| \text{ și } g(x) = |x - 2|;$$

$$e) f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2} \text{ și } g(x) = \sqrt{(x + 1)^2};$$

$$f) f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3\sqrt{x^2} + 2x + 3 \text{ și } g(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4}.$$

15. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$.

- Calculează $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(10)$.
- Scrive ca un produs de două numere impare suma S_1 :
 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2026)$.
- Determină numărul natural n pentru care $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = 3875$.
- Calculează $(f \circ f)(1) + (f \circ f)(2) + (f \circ f)(3) + \dots + (f \circ f)(10)$.
- Scrive ca un produs de două numere impare numărul natural S_2 :
 $(f \circ f)(1) + (f \circ f)(2) + (f \circ f)(3) + \dots + (f \circ f)(2026)$.

16. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$.

Determină $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)(x)}_{\text{de } n \text{ ori } f}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

17. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 2$.

Determină $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)(x)}_{\text{de } n \text{ ori } f}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

18. Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) două funcții. Stabilește monotonia funcției $f + g: A \rightarrow \mathbb{R}$, știind că:

- funcțiile f și g sunt strict crescătoare;
- funcțiile f și g sunt strict descrescătoare.

19. Fie $f: A \rightarrow (0, +\infty)$ și $g: A \rightarrow (0, +\infty)$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) două funcții. Stabilește monotonia funcției $f \cdot g: A \rightarrow (0, +\infty)$, știind că:

- funcțiile f și g sunt strict crescătoare;
- funcțiile f și g sunt strict descrescătoare.

EXERSEAZĂ!

O companie lansează o aplicație destinată telefoanelor mobile, disponibilă în baza unui abonament. Analiza financiară a proiectului relevă următoarele date:

- Costurile fixe lunare (întreținere servere, chirii și marketing) sunt de 3 000 €.
- Abonamentul lunar plătit de fiecare utilizator este de 10 €.
- Costurile variabile (comisioane de procesare a plăților și suport tehnic) sunt de 2 € pentru fiecare utilizator activ.

a) Determină funcția care exprimă profitul mediu realizat de companie pentru un singur utilizator, în funcție de numărul total de utilizatori activi

(Sugestie: $\text{profitul mediu} = (\text{venit total} - \text{cost total}) / \text{număr utilizatori}$).

b) Câți utilizatori trebuie să aibă aplicația pentru ca profitul mediu să fie egal cu 0?

c) Dacă aplicația atrage 1 000 de utilizatori, care va fi profitul net pe care îl generează în medie, fiecare utilizator?

20. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții. Stabilește monotonia funcției $f \circ g$ știind că:
- funcțiile f și g sunt strict crescătoare;
 - funcțiile f și g sunt strict descrescătoare;
 - funcția f este strict crescătoare, iar funcția g este strict descrescătoare;
 - funcția f este strict descrescătoare, iar funcția g este strict crescătoare.
21. Există funcții strict monotone $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $(f \circ f)(x) = -2x + 3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$? Justifică răspunsul.
22. a) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții, unde g este funcție pară. Demonstrează că funcția $f \circ g$ este pară.
 b) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții impare. Demonstrează că funcția $f \circ g$ este impară.
 c) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții. Demonstrează că, dacă funcția f este pară și funcția g este impară, atunci funcția $f \circ g$ este pară.
23. Într-un laborator se află un recipient care conține 2 litri de soluție dezinfectantă cu o concentrație de alcool de 70%. Pentru a obține o soluție mai puțin iritantă, un asistent decide să adauge treptat apă pură în recipient.
- Determină funcția care exprimă concentrația alcoolului în amestecul final.
 - Ce concentrație va avea soluția dacă se adaugă 1,5 litri de apă?
 - Dacă asistentul are nevoie de o soluție cu o concentrație de 20%, ce cantitate de apă trebuie să adauge în recipient?
24. O firmă de logistică analizează eficiența unui transport între un depozit și un centru de distribuție situat la o distanță de 150 km. Din cauza restricțiilor de greutate și a verificărilor tehnice, un camion parcurge drumul la dus cu o viteză constantă de 60 km/h. La întoarcere, camionul este gol, permițându-i șoferului să circule cu o viteză mai mare.
- Determină funcția care exprimă viteza medie a camionului pe întregul traseu (dus-întors) în funcție de viteza de la întoarcere.
 - Dacă viteza de la întoarcere este de 100 km/h, care este viteza medie pentru tot traseul?
 - Calculează media aritmetică a celor două viteze (60 km/h și 100 km/h) și explică de ce viteza medie reală calculată la punctul anterior este mai mică decât aceasta.
 - Ce viteză de întoarcere ar fi necesară pentru ca viteza medie pe întregul traseu să fie de 80 km/h?



1.5. Funcții injective, surjective, bijective, inversabile: definiție, interpretare geometrică pentru funcții numerice, condiția necesară și suficientă ca o funcție să fie inversabilă; lecturi grafice

Descopăr



Tuturor cetățenilor români, indiferent de domiciliu, li se atribuie un cod numeric personal (CNP) format din 13 cifre. Acesta a fost introdus în anul 1978 și are 7 componente:

Componenta	S	AA	LL	ZZ	JJ	NNN	C
Număr de cifre	1 cifră	2 cifre	2 cifre	2 cifre	2 cifre	3 cifre	1 cifră
Ce reprezintă fiecare cifră/grupă de cifre	sexul și secolul în care s-a născut persoana (de ex. 5/6 pentru bărbații/femeile născuți/născute între 2000-2099)	ultimele 2 cifre ale anului nașterii	luna nașterii	ziua nașterii	județul sau sectorul în care s-a născut persoana	număr secvențial (cuprins între 001 și 999)	cifră de control

Fie A mulțimea tuturor persoanelor care au CNP în România și B mulțimea numerelor naturale care au 13 cifre. Se consideră funcția $f: A \rightarrow B$ care asociază unei persoane CNP-ul său.

- Există două persoane care au aceeași valoare pentru combinația de cifre AA? Dar pentru combinația de cifre LL? Justifică răspunsul.
- Fie $p_1, p_2 \in A$, astfel încât $f(p_1) = f(p_2)$. Ce putem spune despre p_1 și p_2 ?
- Orice combinație de 13 cifre reprezintă un CNP valid în România? Justifică.
- Mulțimea valorilor funcției f este egală cu mulțimea B ? Justifică.

Învăț

Funcții injective



Fie mulțimile $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și funcțiile $f, g: A \rightarrow B$, definite cu ajutorul diagramelor din figurile 1 și 2.

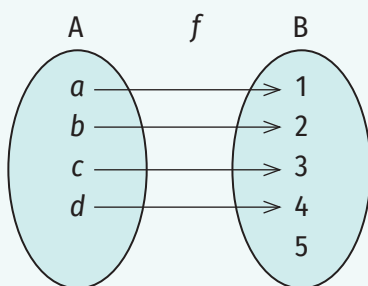


Figura 1

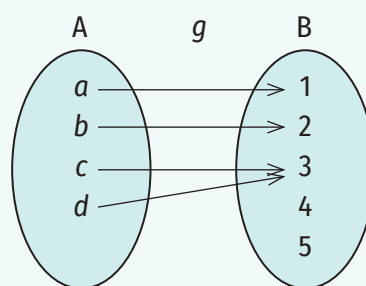


Figura 2

Observăm că imaginile elementelor mulțimii A prin funcția f sunt diferite, adică pentru orice $x_1, x_2 \in A$, cu $x_1 \neq x_2$, avem $f(x_1) \neq f(x_2)$. Vom spune că funcția f este injectivă.

În cazul funcției g , există $x_1 = c$ și $x_2 = d$, $x_1 \neq x_2$, astfel încât $g(x_1) = g(x_2)$. Vom spune că funcția g nu este injectivă.

Definiția 1. Funcția $f: A \rightarrow B$ este funcție injectivă (sau injecție) dacă pentru oricare două elemente $x_1, x_2 \in A$, cu $x_1 \neq x_2$, avem $f(x_1) \neq f(x_2)$.

EXEMPLU:

Orice funcție afină $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, este injectivă.

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$.

$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow ax_1 \neq ax_2 \Leftrightarrow ax_1 + b \neq ax_2 + b \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Teorema 1. Funcția $f: A \rightarrow B$ este o funcție injectivă dacă pentru $x_1, x_2 \in A$, cu proprietatea $f(x_1) = f(x_2)$, rezultă $x_1 = x_2$.

Acest rezultat se folosește de obicei în demonstrarea faptului că o funcție este injectivă, definiția fiind destul de greu de folosit în exerciții.

EXEMPLU:

Funcția $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ este o funcție injectivă.

Într-adevăr, dacă $f(x_1) = f(x_2)$, unde $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, atunci:

$$\begin{aligned} \frac{2x_1+1}{2x_1-1} &= \frac{2x_2+1}{2x_2-1} \Rightarrow (2x_1+1) \cdot (2x_2-1) = (2x_2+1) \cdot (2x_1-1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4x_1x_2 - 2x_1 + 2x_2 - 1 = 4x_2x_1 - 2x_2 + 2x_1 - 1 \Rightarrow 4x_1 = 4x_2 \Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Teorema 2. Dacă funcția numerică $f: A \rightarrow B$ este o funcție strict monotonă pe mulțimea A , atunci funcția f este o funcție injectivă.

Demonstrație:

Funcția f este strict monotonă, deci poate fi strict crescătoare sau strict descrescătoare.

Fie $x_1, x_2 \in A$, cu $x_1 \neq x_2$. Atunci $x_1 < x_2$ sau $x_1 > x_2$.

Presupunem $x_1 < x_2$, cazul în care $x_1 > x_2$ fiind tratat asemănător.

Dacă funcția f este strict crescătoare, atunci $f(x_1) < f(x_2)$, de unde rezultă $f(x_1) \neq f(x_2)$, deci funcția f este injectivă.

Dacă funcția f este strict descrescătoare, atunci $f(x_1) > f(x_2)$, de unde rezultă $f(x_1) \neq f(x_2)$, deci funcția f este injectivă.

OBSERVAȚII.

1. Dacă funcția $f: A \rightarrow B$ este o funcție injectivă, nu rezultă în mod necesar că f este strict monotonă.
2. Dacă funcția $f: A \rightarrow B$ nu este o funcție injectivă, atunci funcția f nu este strict monotonă.

Interpretarea geometrică a injectivității unei funcții numerice

În figura 3 este reprezentată grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1|$, în reperul cartezian xOy .

Observăm că punctele $A(0, 1)$ și $B(2, 1)$ de pe reprezentarea grafică a funcției f au abscisele diferite și ordonatele egale. Există deci $x_1 = 0$ și $x_2 = 2$, $x_1 \neq x_2$, astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$. Prin urmare, funcția f nu este injectivă.

Cum punctele A și B aparțin dreptei de ecuație $y = 1$, care este paralelă cu axa Ox , putem spune că există o dreaptă paralelă cu axa Ox care intersectează reprezentarea grafică a funcției f în două puncte. Reformulând, putem spune că există numere reale y_0 pentru care ecuația $f(x) = y_0$ are două soluții.

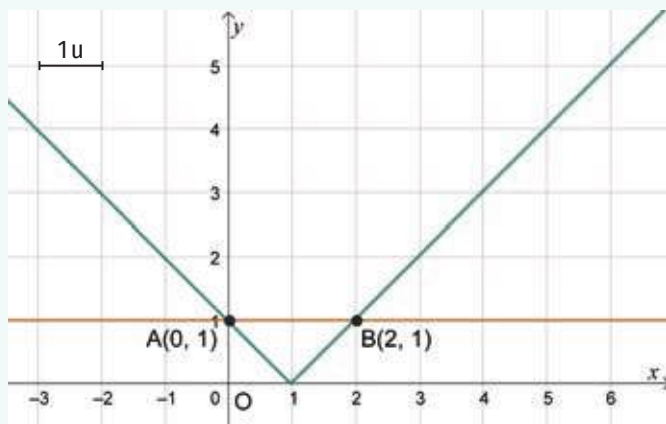


Figura 3

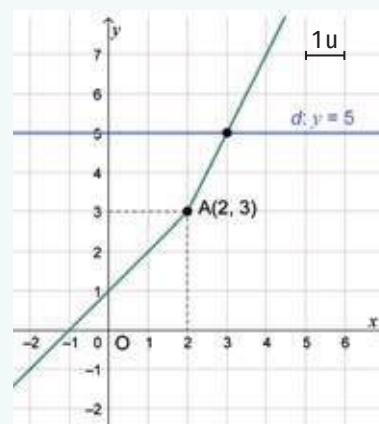


Figura 4

În figura 4 este reprezentată grafic funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \geq 2 \\ x + 1, & x < 2 \end{cases}$, în reperul cartezian xOy .

Observăm că orice dreaptă paralelă cu axa Ox intersectează reprezentarea grafică a funcției g într-un singur punct, ceea ce înseamnă că pentru orice număr real y există un singur număr real x , astfel încât $g(x) = y$.

O funcție numerică $f : A \rightarrow B$ este injectivă dacă orice dreaptă paralelă cu axa Ox , dusă prin punctele din codomeniul funcției, intersectează reprezentarea grafică a funcției f în cel mult un punct.

OBSERVAȚIE.

Teorema 3. Funcția numerică $f : A \rightarrow B$ este injectivă dacă, pentru orice $y \in B$, ecuația $f(x) = y$ are cel mult o soluție în mulțimea A .

Funcții surjective

Fie mulțimile $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$ și funcțiile $f : A \rightarrow B$ și $g : A \rightarrow C$, definite cu ajutorul diagramelor din figurile 5 și 6.

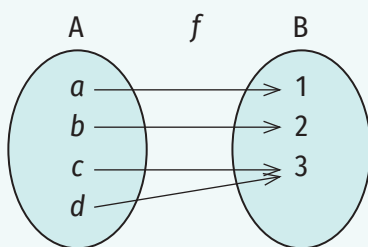


Figura 5

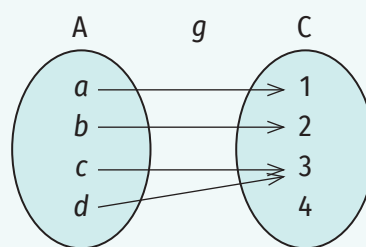


Figura 6

Observăm că orice element din codomeniul funcției f este imaginea unui element din domeniul de definiție al acesteia. Vom spune că funcția f este surjectivă.

În cazul funcției g , există elementul 4 din codomeniul acesteia care nu este imaginea niciunui element din domeniul ei de definiție. Vom spune că funcția g nu este surjectivă.

Definiția 2. Funcția $f : A \rightarrow B$ se numește funcție surjectivă (sau surjecție) dacă pentru orice element $y \in B$, există un element $x \in A$, astfel încât $f(x) = y$.

O funcție $f : A \rightarrow B$ nu este surjectivă dacă există $y_0 \in B$, astfel încât, pentru orice $x \in A$, avem $f(x) \neq y_0$.

Teorema 4. Funcția numerică $f: A \rightarrow B$ este o funcție surjectivă dacă, pentru orice $y \in B$, ecuația $f(x) = y$ are cel puțin o soluție în mulțimea A .

Această teoremă furnizează un mod de a demonstra că o funcție este surjectivă.

EXEMPLE:

1. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ este surjectivă.

Fie $y \in \mathbb{R}$. Ecuația $f(x) = y$ este echivalentă cu ecuația $2x + 3 = y$ care are soluția $x = \frac{y-3}{2} \in \mathbb{R}$. Prin urmare, funcția f este surjectivă.

2. Funcția $f: (2, 3) \rightarrow (7, 10)$, $f(x) = 2x + 3$ nu este surjectivă.

Fie $y \in (7, 10)$. Ecuația $f(x) = y$ are soluția $x = \frac{y-3}{2} \in (2, \frac{7}{2})$.

Dacă $y = 10$ și $f(x) = y$, atunci $x = \frac{7}{2} \notin (2, 3)$.

Prin urmare, funcția f nu este surjectivă.

Orice funcție afină $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, este surjectivă.

Fie $y \in \mathbb{R}$. Ecuația $f(x) = y$ are soluția $x = \frac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$ și, prin urmare, funcția f este surjectivă.

Teorema 5. Funcția $f: A \rightarrow B$ este o funcție surjectivă dacă și numai dacă mulțimea valorilor sale este egală cu codomeniul său.

Demonstrație:

Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție surjectivă și fie $y \in B$. Cum funcția f este surjectivă, rezultă că există $x \in A$, astfel încât $f(x) = y$. Dar $f(x) \in f(A)$, deci $B \subseteq f(A)$. (1)

Din definirea funcției $f: A \rightarrow B$ rezultă că $f(A) \subseteq B$. (2)

Din (1) și (2) obținem că $B = f(A) = \text{Im } f$.

EXEMPLE:

1. Funcția $f: (-3, 3) \rightarrow (-2, 2)$, $f(x) = \frac{2}{3}x$ este surjectivă.

Într-adevăr, pentru $x \in (-3, 3)$, obținem $-2 < \frac{2}{3}x < 2$, de unde rezultă că $\text{Im } f = (-2, 2)$ și, prin urmare, funcția f este surjectivă.

2. Funcția $f: (-3, 3) \rightarrow (-2, 3)$, $f(x) = \frac{2}{3}x$ nu este surjectivă deoarece $\text{Im } f = (-2, 2)$, iar codomeniul funcției este intervalul de numere reale $(-2, 3)$.

Interpretarea geometrică a surjectivității unei funcții numerice

În figura 7 este reprezentată grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x \geq 0 \\ x + 2, & x < 0 \end{cases}, \text{ în reperul cartezian } xOy.$$

Observăm că orice paralelă dusă la axa Ox intersectează reprezentarea grafică a funcției f într-un punct, deci, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, ecuația $f(x) = y$ are o soluție în $\mathbb{R}$. Așadar, funcția f este surjectivă.

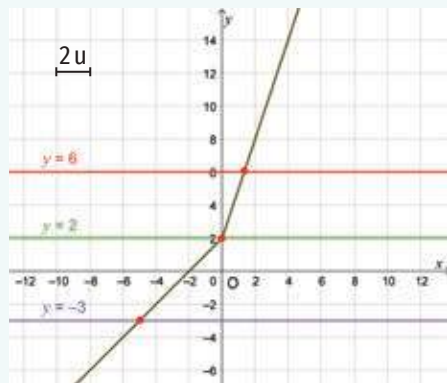


Figura 7

În figura 8 este reprezentată grafic funcția $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = |2x - 3| + 1$, în reperul cartezian xOy .

Observăm că dreapta de ecuație $y = a$ intersectează reprezentarea grafică a funcției h în două puncte pentru $a > 1$, într-un singur punct pentru $a = 1$ și nu o intersectează pentru $a < 1$. Așadar, ecuația $h(x) = a$ are două soluții pentru $a > 1$, o soluție pentru $a = 1$ și nu are soluție pentru $a < 1$, de unde rezultă că funcția h nu este surjectivă.

OBSERVAȚIE.

Schimbând codomeniul funcției h , obținem funcția $i : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$, $i(x) = h(x)$, care este surjectivă deoarece $Im\ i = [1, +\infty)$.

În figura 9 este reprezentată grafic funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x \geq 0 \\ x - 2, & x < 0 \end{cases}, \text{ în reperul cartezian } xOy.$$

Observăm că există cel puțin o paralelă dusă la axa Ox care nu intersectează reprezentarea grafică a funcției g , de exemplu, dreapta de ecuație $y = \frac{3}{5}$. Deci funcția g nu este surjectivă.

OBSERVAȚIE.

Schimbând codomeniul funcției g , obținem funcția $j : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$, $j(x) = g(x)$, care este surjectivă deoarece $Im\ j = (-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$.

O funcție numerică $f : A \rightarrow B$ este surjectivă dacă orice dreaptă paralelă cu axa Ox , dusă prin punctele codomeniului său, intersectează reprezentarea sa grafică în cel puțin un punct.

Funcții bijective

Definiția 3. Funcția $f : A \rightarrow B$ se numește funcție bijectivă (sau bijecție) dacă este o funcție injectivă și surjectivă.

Astfel, pentru a demonstra că o funcție este bijectivă, se va demonstra că aceasta este funcție injectivă și surjectivă.

Interpretarea geometrică a bijectivității unei funcții

Având în vedere interpretările geometrice ale injectivității și surjectivității unei funcții, putem spune că **o funcție numerică $f : A \rightarrow B$ este bijectivă dacă orice paralelă la axa Ox , dusă prin punctele codomeniului său, intersectează reprezentarea sa grafică într-un singur punct.**

EXEMPLE:

1. Orice funcție afină $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, este bijectivă.

2. Funcția $f : [-1, +\infty) \rightarrow [-4, +\infty)$, $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \in [-1, 2) \\ x + 3, & x \in [2, +\infty) \end{cases}$ este bijectivă.

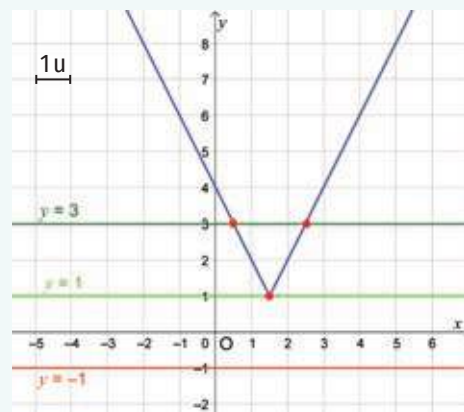


Figura 8

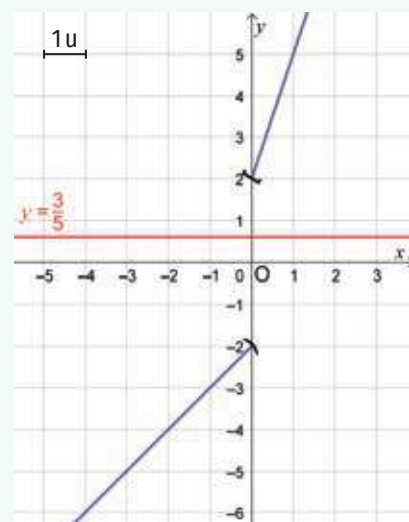


Figura 9

• Demonstrăm că funcția f este injectivă:

– Fie $x_1, x_2 \in [-1, 2)$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci $3x_1 - 1 = 3x_2 - 1$, de unde rezultă $x_1 = x_2$. (1)

– Fie $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci $x_1 + 3 = x_2 + 3$, de unde rezultă $x_1 = x_2$. (2)

Dacă $x_1 \in [-1, 2)$ și $x_2 \in [2, +\infty)$, atunci $f(x_1) = 3x_1 - 1 \in [-4, 5)$ și $f(x_2) = x_2 + 3 \in [5, +\infty)$, deci $f(x_1) \neq f(x_2)$. (3)

Din (1), (2) și (3) rezultă că funcția f este injectivă.

• Demonstrăm că funcția f este surjectivă:

Cum $f(x) \in [-4, 5)$, pentru orice $x \in [-1, 2)$, și $f(x) \in [5, +\infty)$, pentru orice $x \in [2, +\infty)$, rezultă că $\text{Im} f = [-4, 5) \cup [5, +\infty) = [-4, +\infty)$, deci $\text{Im} f$ coincide cu codomeniul funcției f . Așadar, funcția f este o funcție surjectivă.

Cum funcția f este injectivă și surjectivă, rezultă că funcția f este bijectivă.

OBSERVAȚII.

1. Pentru a demonstra că funcția $f: [-1, +\infty) \rightarrow [-4, +\infty)$,

$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \in [-1, 2) \\ x + 3, & x \in [2, +\infty) \end{cases}$, este bijectivă, putem folosi și reprezentarea

sa grafică într-un reper cartezian xOy (figura 10). Observăm că orice dreaptă de ecuație $y = y_1$, unde $y_1 \in [-4, +\infty)$, intersectează reprezentarea grafică a funcției f într-un singur punct.

2. Se consideră funcția $f: A \rightarrow B$, $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 \\ f_2(x), & x \in A_2 \\ \vdots \\ f_n(x), & x \in A_n \end{cases}$,

unde $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$ și $f_i: A_i \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in \mathbb{N}^*$) sunt funcții afine. Funcția f este bijectivă dacă și numai dacă $f(A_1) \cup f(A_2) \cup \dots \cup f(A_n) = B$ și $f(A_1) \cap f(A_2) \cap \dots \cap f(A_n) = \emptyset$.

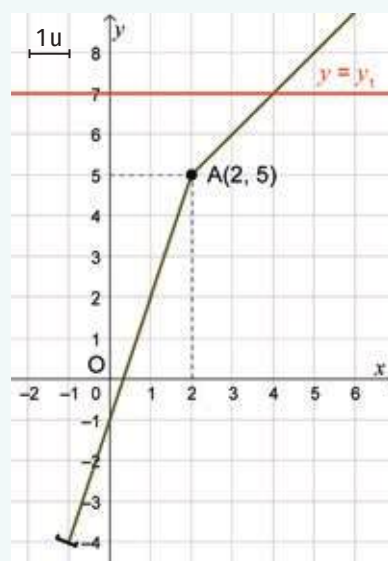


Figura 10

Funcții inversabile



Fie mulțimile $A = \{a, b, c, d\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Se consideră funcțiile $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow A$ definite cu ajutorul diagramelor din figurile 11 și 12.

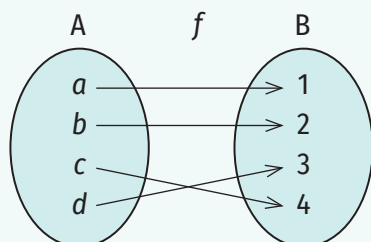


Figura 11

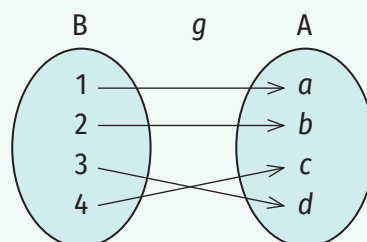


Figura 12

Observăm că:

$$\begin{aligned} f(a) = 1 \text{ și } g(1) = a &\Rightarrow \begin{cases} (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(a) = 1 \\ (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = a \end{cases}; & f(c) = 3 \text{ și } g(3) = c &\Rightarrow \begin{cases} (f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(c) = 3 \\ (g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(3) = c \end{cases}; \\ f(b) = 2 \text{ și } g(2) = b &\Rightarrow \begin{cases} (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(b) = 2 \\ (g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(2) = b \end{cases}; & f(d) = 4 \text{ și } g(4) = d &\Rightarrow \begin{cases} (f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(d) = 4 \\ (g \circ f)(d) = g(f(d)) = g(4) = d \end{cases}. \end{aligned}$$

Astfel, $f \circ g : B \rightarrow B$, $f \circ g = 1_B$ și $g \circ f : A \rightarrow A$, $g \circ f = 1_A$. Putem spune că funcția f este inversabilă, iar funcția g este inversa sa (sau funcția g este inversabilă, iar funcția f este inversa sa).

Definiția 4. O funcție $f : A \rightarrow B$ se numește inversabilă dacă există o funcție $g : B \rightarrow A$, astfel încât $f \circ g = 1_B$ și $g \circ f = 1_A$. Funcția g astfel determinată se numește funcția inversă a funcției f și se notează cu f^{-1} .

OBSERVAȚII.

1. Dacă o funcție este inversabilă, atunci inversa acesteia este unică.

Într-adevăr, dacă funcția inversabilă $f : A \rightarrow B$ ar avea două funcții inverse $g_1, g_2 : B \rightarrow A$, atunci:

$$\begin{aligned} f \circ g_1 &= 1_B, g_1 \circ f = 1_A, f \circ g_2 = 1_B, g_2 \circ f = 1_A \text{ și} \\ g_1 &= 1_A \circ g_1 = (g_2 \circ f) \circ g_1 = g_2 \circ (f \circ g_1) = g_2 \circ 1_B = g_2. \end{aligned}$$

2. Dacă pentru două funcții $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow A$ avem egalitățile $f \circ g = 1_B$ și $g \circ f = 1_A$, atunci funcțiile f și g sunt inverse una alteia, adică funcția f este inversa funcției g și funcția g este inversa funcției f .

Condiția necesară și suficientă pentru ca o funcție să fie inversabilă este dată de teorema următoare.

Teorema 6. O funcție $f : A \rightarrow B$ este inversabilă dacă și numai dacă este bijectivă.

Demonstrație:

- Presupunem că funcția $f : A \rightarrow B$ este inversabilă. Conform definiției, există o funcție $g : B \rightarrow A$, astfel încât $f \circ g = 1_B$ și $g \circ f = 1_A$.

Vom demonstra în continuare că funcția f este bijectivă.

Fie $x_1, x_2 \in A$, astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, de unde rezultă că $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, deci $1_A(x_1) = 1_A(x_2)$, ceea ce implică $x_1 = x_2$. Așadar, funcția f este injectivă.

Fie $y \in B$ și $x = g(y) \in A$. Atunci $f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = 1_B(y) = y$, deci funcția f este surjectivă.

Am demonstrat că funcția f este injectivă și surjectivă, ceea ce înseamnă că este bijectivă.

- Presupunem că funcția $f : A \rightarrow B$ este bijectivă și vom demonstra că aceasta este inversabilă.

Funcția f este bijectivă, de unde rezultă că este surjectivă, deci pentru orice $y \in B$ există $x \in A$, astfel încât $f(x) = y$. Cum funcția f este injectivă, $x \in A$ este unic determinat.

Fie funcția $g : B \rightarrow A$, $g(y) = x$. Atunci:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(y) &= f(g(y)) = f(x) = y = 1_B(y) \Rightarrow f \circ g = 1_B \text{ și} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(y) = x = 1_A(x) \Rightarrow g \circ f = 1_A. \end{aligned}$$

Prin urmare, funcția f este inversabilă.

Teorema 7. Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție numerică inversabilă.

- Dacă funcția f este strict crescătoare, atunci funcția inversă f^{-1} este strict crescătoare.
- Dacă funcția f este strict descrescătoare, atunci funcția inversă f^{-1} este strict descrescătoare.

Demonstrație:

a) Fie $y_1, y_2 \in B, y_1 < y_2$.

Funcția f este surjectivă, deci există $x_1, x_2 \in A$, astfel încât $f(x_1) = y_1$ și $f(x_2) = y_2$. Cum funcția f este inversabilă, obținem $x_1 = f^{-1}(y_1)$ și $x_2 = f^{-1}(y_2)$.

$y_1 < y_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
 Funcția f este strict crescătoare. $\} \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \Rightarrow$ Funcția f^{-1} este o funcție strict crescătoare.

OBSERVAȚIE.

Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție numerică inversabilă. Cum funcția f este injectivă, rezultă că aceasta nu poate fi monoton crescătoare sau monoton descrescătoare, ci strict crescătoare sau strict descrescătoare.

Interpretarea geometrică a inversei unei funcții

Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție numerică inversabilă și $M(x, y)$ un punct care aparține reprezentării grafice a funcției f . Astfel, avem $f(x) = y$.

Funcția f este inversabilă, deci există funcția $f^{-1}: B \rightarrow A$, inversa funcției f . Atunci $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y)$, de unde rezultă că $x = f^{-1}(y)$, deci punctul $N(y, x)$ aparține reprezentării grafice a funcției f^{-1} . Cum punctele M și N sunt simetrice față de prima bisectoare (bisectoarea unghiului xOy), rezultă că **reprezentările grafice ale funcțiilor f și f^{-1} sunt simetrice față de prima bisectoare**.

EXEMPLU:

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$. Funcția f este o funcție afină, de unde rezultă că este o funcție bijectivă, deci inversabilă.

Fie $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$. Atunci $2x - 1 = y$ și $x = \frac{y+1}{2} \in \mathbb{R}$.

Inversa funcției f este funcția $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$.

În figura 13 sunt reprezentate grafic funcțiile f și f^{-1} .

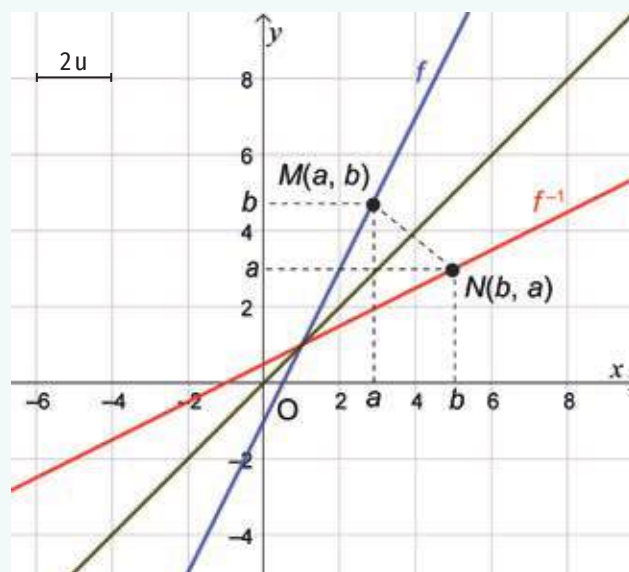


Figura 13

Exercițiu rezolvat

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \in (-\infty, 1) \\ x + 2, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$.

Demonstrează că funcția f este inversabilă și determină inversa acesteia.

Rezolvare:

Funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 1)$ și pe intervalul $[1, +\infty)$. Atunci, $f((-\infty, 1)) = (-\infty, 3)$ și $f([1, +\infty)) = [3, +\infty)$. Cum $f((-\infty, 1)) \cap f([1, +\infty)) = \emptyset$ (funcția f este injectivă) și $f((-\infty, 1)) \cup f([1, +\infty)) = \mathbb{R}$ (funcția f este surjectivă), rezultă că funcția f este bijectivă, deci inversabilă.

Fie $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$.

- Dacă $x \in (-\infty, 1)$, atunci ecuația $f(x) = y$ devine $2x + 1 = y$, de unde rezultă $x = \frac{y-1}{2}$.

$$x \in (-\infty, 1) \Leftrightarrow \frac{y-1}{2} < 1 \Leftrightarrow y-1 < 2 \Leftrightarrow y < 3 \Leftrightarrow y \in (-\infty, 3)$$

- Dacă $x \in [1, +\infty)$, atunci ecuația $f(x) = y$ devine $x + 2 = y$, de unde rezultă $x = y - 2$.

$$x \in [1, +\infty) \Leftrightarrow y - 2 \geq 1 \Leftrightarrow y \geq 3 \Leftrightarrow y \in [3, +\infty)$$

$$\text{Inversa funcției } f \text{ este funcția } f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & x \in (-\infty, 3) \\ x-2, & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

Aplic

1. Determină care din următoarele funcții sunt inversabile și, pentru cele inversabile, determină inversele.

- a) $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = 15x - 1,7$; d) $f_4: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_4(x) = |\sqrt{2}x + \sqrt{3}|$;
 b) $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \sqrt{6}x - \sqrt{3}$; e) $f_5: \left(\frac{1}{3}, \frac{4049}{3}\right) \rightarrow (2, 2026), f_5(x) = \left\lfloor \frac{3}{2}x + 1,5 \right\rfloor$;
 c) $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = \left\lfloor \frac{5}{2}x + 1 \right\rfloor$; f) $f_6: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f_6(x) = x + 2$.

2. Se consideră funcția $f: (1, 56) \rightarrow (a, b), f(x) = 2x + 3$.

- a) Determină numerele reale a și b pentru care funcția f este bijectivă.
 b) Determină inversa funcției f pentru numerele reale a și b determinate la punctul a).

3. Se consideră funcția $f: [a, b] \rightarrow [2026, 2028], f(x) = \frac{2x+1}{0,5}$.

- a) Determină numerele reale a și b pentru care funcția f este bijectivă.
 b) Determină inversa funcției f pentru numerele reale a și b determinate la punctul a).

4. Fie funcția $f: (\sqrt{8}, \sqrt{18}) \rightarrow (a, b), f(x) = 8 - \frac{1}{\sqrt{2}}x$.

- a) Determină numerele reale a și b pentru care funcția f este inversabilă.
 b) Determină inversa funcției f pentru numerele reale a și b determinate la punctul a).

EXERSEAZĂ!

Precizează care dintre funcțiile definite cu ajutorul diagramelor din figurile 14, 15 și 16 sunt injective, care sunt surjective și care este bijectivă. Justifică răspunsurile.

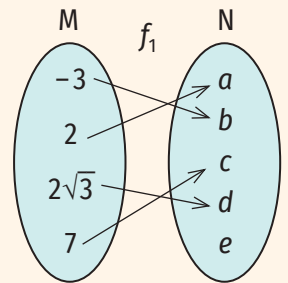


Figura 14

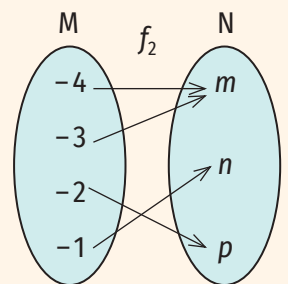


Figura 15

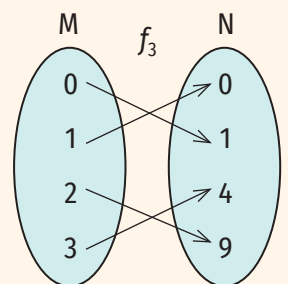


Figura 16

EXERSEAZĂ!

Precizează care dintre funcțiile următoare sunt injective, care sunt surjective și care sunt bijective. Justifică răspunsurile.

- a) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = n^2$;
 b) $g: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$,
 $g(n)$ = ultima cifră a numărului n^2 ;
 c) $h: \mathbb{N} \rightarrow \{1, 3, 7, 9\}$,
 $h(n)$ = ultima cifră a numărului 3^n ;
 d) $i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$,
 $i(x) = |x - 1|$;
 e) $j: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$,
 $j(x) = \frac{1}{3}x + 2$;
 f) $k: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $k(x) = \frac{1}{3}x + \sqrt{2}$.



5. Fie funcția $f: [a, b] \rightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], f(x) = -\frac{1}{\sqrt{6}}x$.

- a) Determină numerele reale a și b pentru care funcția f este inversabilă.
 b) Determină inversa funcției f pentru numerele reale a și b determinate la punctul a).

6. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x + 2$ și $g(x) = mx + n$, unde m și n sunt numere reale, $m \neq 0$. Determină numerele reale m și n pentru care $f^{-1} = g$.

7. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 7mx + 3$ și $g(x) = x + \frac{1}{2}n$, unde m și n sunt numere reale, $m \neq 0$. Determină numerele reale m și n pentru care $g^{-1} = f$.

8. Demonstrează că funcția f nu este injectivă.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^2 - 4x + 7$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4$;

b) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 5$;

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 3 \\ x + 1, & x > 3 \end{cases}$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{2001}$;

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x < -1 \\ -x + 3, & x \geq -1 \end{cases}$

9. Demonstrează că funcția f nu este surjectivă.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |3x - 2|$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - \frac{7}{2}x + 7,9$;

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x - 1, & x < 2 \\ x - 4, & x \geq 2 \end{cases}$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1, (4)x^2 - \frac{1}{9}x + 3$;

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 2| + |x + 1|$.

10. Demonstrează că funcția f este bijectivă și determină inversa acesteia.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x \leq 3 \\ x + 8, & x > 3 \end{cases}$;

g) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}, & x \leq -1 \\ \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}, & -1 < x < 3 \\ 2x - 5, & x \geq 3 \end{cases}$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -2x + 4, & x < 1 \\ -3x + 5, & x \geq 1 \end{cases}$;

h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \max(3x - 1, 2x + 1)$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x - 3, & x \leq 4 \\ 2x - 7, & x > 4 \end{cases}$;

i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \min(-x + 4, -3x + 2)$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -10x + 5, & x \leq \frac{2}{5} \\ -20x + 9, & x > \frac{2}{5} \end{cases}$;

j) $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}, f(x) = \frac{3x - 5}{2x + 4}$;

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}x, & x \leq \sqrt{2} \\ \sqrt{18}x - 4, & x > \sqrt{2} \end{cases}$;

k) $f: (-\infty, -3) \rightarrow (-\infty, -2), f(x) = \frac{-2x + 7}{x + 3}$;

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x + 4, & x \leq 1 \\ -3x + 6, & 1 < x \leq 2 \\ -x + 2, & x > 2 \end{cases}$;

l) $f: (2, +\infty) \rightarrow \left(\frac{5}{4}, +\infty\right), f(x) = \frac{5x + 1}{4x - 8}$.

11. Se consideră funcțiile injective $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Studiază dacă funcțiile $h, i, j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $h(x) = f(x) + g(x)$, $i(x) = f(x) - g(x)$, $j(x) = f(x) \cdot g(x)$ sunt injective.

12. Există funcții injective $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $(f \circ f)(x) = |x|$?

13. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \leq 2 \\ mx - 7, & x > 2 \end{cases}$, unde m este număr real.

- Determină valorile numărului real m pentru care funcția f este injectivă.
- Determină valorile numărului real m pentru care funcția f este surjectivă.
- Determină numărul real m pentru care funcția f este bijectivă.
- Determină inversa funcției f pentru numărul real m calculat la punctul c).

14. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -3x + 1, & x < -2 \\ mx + 3, & x \geq -2 \end{cases}$, unde m este număr real.

- Determină valorile numărului real m pentru care funcția f este injectivă.
- Determină valorile numărului real m pentru care funcția f este surjectivă.
- Determină numărul real m pentru care funcția f este bijectivă.
- Determină inversa funcției f pentru numărul real m calculat la punctul c).

15. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x - 3m + 4, & x < -1 \\ mx - 4, & x \geq -1 \end{cases}$, unde m este număr real.

- Determină valorile numărului real m pentru care funcția f este injectivă.
- Determină valorile numărului real m pentru care funcția f este surjectivă.
- Determină numărul real m pentru care funcția f este bijectivă.
- Determină inversa funcției f pentru numărul real m calculat la punctul c).

16. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x + m - 2, & x < 1 \\ (2m - 1)x - 2, & x \geq 1 \end{cases}$, unde m este număr real.

- Determină valorile numărului real m pentru care funcția f este injectivă.
- Determină valorile numărului real m pentru care funcția f este surjectivă.
- Determină numărul real m pentru care funcția f este bijectivă.
- Determină inversa funcției f pentru numărul real m calculat la punctul c).

17. a) Se consideră funcțiile injective $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow C$ ($A, B, C \subseteq \mathbb{R}$).

Demonstrează că funcția $g \circ f$ este injectivă.

b) Se consideră funcțiile surjective $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow C$ ($A, B, C \subseteq \mathbb{R}$).

Demonstrează că funcția $g \circ f$ este surjectivă.

c) Se consideră funcțiile bijective $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow C$ ($A, B, C \subseteq \mathbb{R}$).

Demonstrează că funcția $g \circ f$ este bijectivă.

18. a) Se consideră funcțiile $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow C$ ($A, B, C \subseteq \mathbb{R}$), astfel încât funcția $g \circ f$ este injectivă. Demonstrează că funcția f este injectivă.

b) Se consideră funcțiile $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow C$ ($A, B, C \subseteq \mathbb{R}$), astfel încât funcția $g \circ f$ este surjectivă. Demonstrează că funcția g este surjectivă.

c) Se consideră funcțiile $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow C$ ($A, B, C \subseteq \mathbb{R}$), astfel încât funcția $g \circ f$ este bijectivă. Demonstrează că funcția f este injectivă și funcția g este surjectivă.

EXERSEAZĂ!

Pentru fiecare dintre funcțiile reprezentate grafic în figurile 17, 18 și 19, precizează care și dacă este injectivă, surjectivă sau bijectivă, justificând de fiecare dată răspunsul dat.

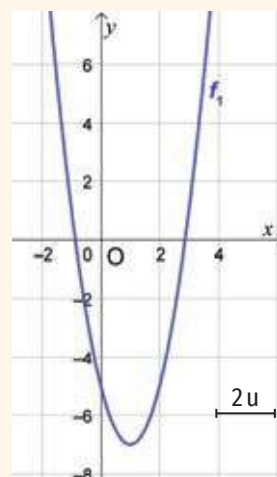


Figura 17

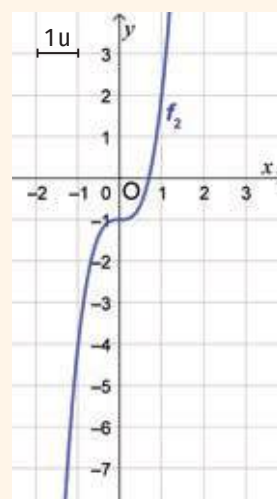


Figura 18

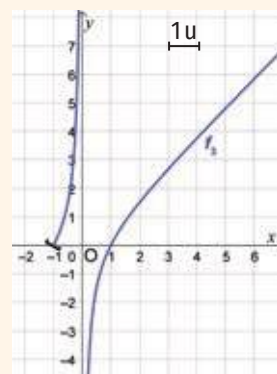


Figura 19

Exerciții recapitulative

1. Calculează:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} [2,3] + [-1,3]; & \text{c)} [\sqrt{2}] - [-3\sqrt{5}]; & \text{e)} \{-2,4\} + \left\{\frac{10}{3}\right\}; & \text{g)} \{-\sqrt{6}\} + \{3\sqrt{6}\}; \\ \text{b)} \left[\frac{7}{3}\right] - \left[-1\frac{9}{4}\right]; & \text{d)} [2 + 2\sqrt{2}] - [1 - 2\sqrt{3}]; & \text{f)} \{1,75\} + \left\{-\frac{15}{4}\right\}; & \text{h)} \{10 - 3\sqrt{2}\} + \left\{\frac{\sqrt{5} - \sqrt{15}}{2}\right\}. \end{array}$$

2. Fie numerele reale $x = 2 \cdot \left[5 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\right) - 1,6\right] + 1,9$ și $y = 8,3 - 7 \cdot (9,2 - 1,2 \cdot 2,55)$. Calculează partea întreagă și partea fracționară pentru numerele: $x, y, x + y, x - y, 2x$.

3. Determină numerele reale a și b pentru care funcțiile f și g sunt egale.

$$\begin{array}{l} \text{a)} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3\left(\frac{a}{2} - 1\right)x + 5b, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 21x + 3a + 1; \\ \text{b)} f: \left[\frac{1}{7}, b\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2ax + 1, g: \left[\frac{1}{7}, b\right) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 3x + \frac{8b - 1 + a}{2}. \end{array}$$

4. Se consideră funcția parte întreagă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x]$. Determină $f([-1, 2]), f((-\infty, -2)), f((2, 3)), f([-3, 2]), f(\mathbb{Q}), f(\mathbb{R})$.

5. Se consideră funcția parte fracționară $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x\}$. Determină $f([-5, 2]), f((-\infty, -1)), f((4, 5)), f(\mathbb{Q})$.

6. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$. Determină $f([-3, 3]), f((-\infty, -5)), f((2, 4)), f(\mathbb{Z})$.

7. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 6x + 2$.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \text{ Calculează } f(7), f(1, 2), f(1,5)), f\left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right), \frac{f(\sqrt{2}) - f(\sqrt{3})}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}, \frac{2f(1 + 2 + 3 + \dots + 30) + 58}{f(30)}. \\ \text{b)} \text{ Determină imaginea prin funcția } f \text{ a intervalului } [-a, b), \text{ unde } a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \text{ și } b = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}. \\ \text{c)} \text{ Determină preimaginea prin funcția } f \text{ a mulțimilor: } \{2^2, 2^3, 2^4\}, \mathbb{R} \setminus (-3, 14), \mathbb{N}. \end{array}$$

8. Se consideră funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (2a + 1)x + b$, unde a și b sunt numere reale.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \text{ Determină numerele reale } a \text{ și } b \text{ pentru care } g\left(\left[\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)\right) = [1, 6). \\ \text{b)} \text{ Determină numerele reale } a \text{ și } b \text{ pentru care preimaginea mulțimii } A = [3, 11] \text{ prin funcția } g \text{ este mulțimea } B = [1, 3]. \end{array}$$

9. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left|\frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{8}\right| = \sqrt{2}; & \text{d)} [x] = -3; & \text{g)} \{x\} = 0,2; \\ \text{b)} \left|\frac{6x-1}{2}\right| = \frac{4x+3}{4}; & \text{e)} [-4x+3] = 5; & \text{h)} \left\{x - \frac{1}{3}\right\} = 0,4; \\ \text{c)} |(3x+1)^2 - (3x-1)^2| = 6; & \text{f)} \left[x + \frac{5}{6}\right] = \frac{2x+1}{3}; & \text{i)} \left\{x + \frac{1}{5}\right\} = x - 0,8. \end{array}$$

10. Determină semnul funcției f .

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |3x + 1| - 2; & \text{c)} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (2x - 1)(4 - x); \\ \text{b)} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x + 3| - |2x - 1|; & \text{d)} f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{7 - 2x}{x + 2}. \end{array}$$

11. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} |x - 2| + |x + 5| = 9; & \text{b)} |2x - 4| + |x + 3| = 2x + 8. \end{array}$$

12. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele inecuații:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} |-1,3x + 4| \leq 5; & \text{c)} 11 - 2|3x + 1| < 9; & \text{e)} |x - 2| + |x + 5| > 9; \\ \text{b)} \sqrt{\left(\frac{1}{4}x - 1\right)^2} \leq 0; & \text{d)} |1, (1)x - 3| \geq \frac{1}{27}; & \text{f)} |x + 2| - |x| + |x - 3| \leq 6. \end{array}$$

13. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele inecuații:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} (x + 3)(-x + 4) > 0; & \text{b)} \frac{x - 3}{-2x + 8} > 0; & \text{c)} \frac{4x - 6}{-2x - 5} \geq 2; & \text{d)} \frac{2x + 1}{-3x + 6} \leq 3. \end{array}$$

14. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4(a+1)x + b - 2$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2ax - 2(b+4)$, unde a și b sunt numere reale. Determină numerele reale a și b pentru care:

a) $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{3}\right) = 1$;

b) Punctele $A(0, -7)$ și $B\left(\frac{1}{3}, -1\right)$ aparțin reprezentării grafice a funcției f în reperul cartezian xOy .

c) Punctele $C\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ și $D(0, \sqrt{2})$ aparțin reprezentării grafice a funcției g în reperul cartezian xOy .

15. Stabilește dacă funcția f este pară sau impară:

a) $f: \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x^{2027}}{4|x+1|-1}$;

c) $f: (-3, 3) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{18-2x^2}}$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5(-x)^6 + x^{2026}$;

d) $f: (-8, 8) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^3 - 20$.

16. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+5, & x < -3 \\ 4x+11, & -3 \leq x < -1 \\ 7x+14, & x \geq -1 \end{cases}$.

a) Reprezintă grafic funcția f în reperul cartezian xOy .

b) Studiază monotonia funcției f .

c) Determină $f(-6, -4)$, $f[-3, -2]$, $f([0, +\infty))$, $f(-2, 0]$.

d) Demonstrează că funcția f este inversabilă și determină inversa acesteia.

e) Este funcția f o funcție pară? Justifică.

17. Stabilește dacă funcția f este mărginită sau nemărginită:

a) $f: \left[\frac{1}{5}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{10}{x+1}$;

b) $f: [-\sqrt{10}, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{40}x + 2$;

c) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = |2n - 4|$.

18. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(x) = (a+1)x + b - 1$, unde a și b sunt numere reale. Punctele $A(-1, -2)$ și $B(-3, -9)$ aparțin reprezentării grafice a funcției f în reperul cartezian xOy .

a) Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și axele de coordonate Ox și Oy .

b) Determină aria triunghiului format de reprezentarea grafică a funcției f și axele de coordonate Ox și Oy .

c) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x+1) = x+3$.

d) Rezolvă în mulțimea numerelor naturale inecuația $|f(x+3) - f(2x+1)| \leq 4$.

e) Studiază monotonia funcției f .

f) Demonstrează că funcția f este inversabilă și determină inversa acesteia.

g) Funcția f este o funcție pară?

19. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(x) = (2a-3)x - 6$, unde a este număr real.

a) Studiază monotonia funcției f .

b) Funcția f este injectivă?

c) Determină valorile numărului real a pentru care funcția f este inversabilă.

d) Pentru $a = -1$, determină inversa funcției f .

20. Determină funcțiile $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ și $g \circ g$.

a) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 0 \\ x+3, & x \geq 0 \end{cases}$ și $g(x) = 2x+1$;

b) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x-2, & x < 1 \\ 2x+3, & x \geq 1 \end{cases}$ și $g(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ -3x+5, & x \geq -1 \end{cases}$;

c) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |-2x+1|$ și $g(x) = |x-2|$.

21. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 4$, $g(x) = -3x + 6$. Determină intervalele de monotonie ale funcțiilor $h, i, j, k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $i(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, $j(x) = |f(x) + g(x)|$, $k(x) = |f(x) - g(x)|$.

22. Se consideră funcția $f: [a, b] \rightarrow \left[\frac{1}{5}, \frac{10}{3}\right]$, $f(x) = -1,2x + 5$, unde a și b sunt numere reale.

a) Determină numerele reale a și b pentru care funcția f este bijectivă.

b) Pentru numerele reale a și b determinate la punctul a), determină inversa funcției f .

23. Determină intervalele de monotonie și imaginea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x + 5, & x < 2 \\ -2x + 11, & x \geq 2 \end{cases}; \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 2x + 6, & x \in (-\infty, -1) \\ -x + 3, & x \in [-1, 4] \\ 3x - 13, & x \in (4, +\infty) \end{cases}.$$

24. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax - 3, & x \leq 2 \\ 3x + 1, & x > 2 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Determină numărul real a pentru care $f(-3) = 5$.

b) Determină valorile numărului real a pentru care funcția f este crescătoare.

c) Determină valorile numărului real a pentru care $\text{Im } f = \mathbb{R}$.

25. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -4x + 2, & x < 1 \\ ax + 6, & x \geq 1 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Determină numărul real a pentru care punctul $A(1, 5)$ aparține reprezentării grafice a funcției f în reperul cartezian xOy .

b) Determină valorile numărului real a pentru care funcția f este strict descrescătoare.

c) Determină valorile numărului real a pentru care $\text{Im } f = \mathbb{R}$.

26. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & x \in (-\infty, -1) \\ 4a + 2, & x \in [-1, 3) \\ x + 4, & x \in [3, +\infty) \end{cases}$, unde a este număr real.

Determină valorile numărului real a pentru care funcția f este crescătoare.

27. Demonstrează că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 15, & x \leq -7 \\ 2x + 22, & x > -7 \end{cases}$ este inversabilă și determină inversa acesteia.

28. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (m + 2)x - 1, & x < 2 \\ 4x + 3m - 5, & x \geq 2 \end{cases}$, unde m este număr real.

a) Determină valorile numărului real m pentru care $f(-2) \cdot f(3) = 0$.

b) Determină valorile numărului real m pentru care funcția f este injectivă.

c) Determină valorile numărului real m pentru care funcția f este surjectivă.

d) Determină numărul real m pentru care funcția f este bijectivă.

29. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x + 2m, & x \leq 0 \\ (m - 3)x + m + 1, & x > 0 \end{cases}$, unde m este număr real.

a) Determină numărul real m pentru care $f(-3) - f(2) = 7$.

b) Determină numărul real m pentru care punctul $A(2, -5)$ aparține reprezentării grafice a funcției f în reperul cartezian xOy .

c) Determină valorile numărului real m pentru care funcția f este injectivă.

d) Determină valorile numărului real m pentru care funcția f este surjectivă.

e) Determină numărul real m pentru care funcția f este bijectivă.

Timp de lucru: 45 de minute

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I

30 de puncte

30 de puncte

1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.

(10 p.)

A. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 16x + 2,5$. Imaginea numărului 1,5 prin funcția f este:

- a) 26; b) 242,5; c) 26,5; d) 30.

(10 p.)

B. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3(2a - 1)x + b$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 21x + 3a + 1$, unde a și b sunt numere reale. Dacă $f = g$, atunci:

- a) $a = 1$ și $b = 2$; b) $a = -1$ și $b = 13$; c) $a = 4$ și $b = 13$; d) $a = 2$ și $b = 2$.

(10 p.)

C. Imaginea funcției $f: [-1, 3) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x , este mulțimea:

- a) $\{-1, 0, 1, 2\}$; b) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$; c) $\{0, 1, 2\}$; d) $\{0, 1, 2, 3\}$.

Subiectul al II-lea

60 de puncte

Scrie rezolvările complete.

10 puncte

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(x) = (5a - 3)x + 2b + 5$, unde a și b sunt numere reale. Determină numerele reale a și b pentru care punctele $A(0, 3b + 2)$ și $B(1, 23)$ aparțin reprezentării grafice a funcției f în reperul cartezian xOy .

10 puncte

2. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (8m + 1)x + 1$ și $g(x) = 2x + \frac{1}{3}n$, unde m și n sunt numere reale, $m \neq -\frac{1}{8}$. Determină numerele reale m și n pentru care $g^{-1} = f$.

40 de puncte

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x + 6, & \text{dacă } x \leq 2 \\ -2x + 8, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$

(10 p.)

a) Determină imaginea intervalului $(-1, 4]$ prin funcția f .

(10 p.)

b) Demonstrează că funcția f este bijectivă.

(10 p.)

c) Determină inversa funcției f .

(10 p.)

d) Determină funcția $f \circ f$.

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din aceste lecții.

LA SFÂRȘITUL ACESTOR LECȚII:	5 foarte bine	4 bine	3 mediu	2 slab	1 foarte slab
Mi-a fost ușor să rezolv exercițiile.					
Am înțeles criteriile de rezolvare.					
Mi-am amintit conținuturile învățate.					

2.1. Funcția de gradul al doilea: definiție, reprezentare grafică, intersecțiile reprezentării grafice cu axele de coordonate, axa de simetrie

Descopăr



În figura 1 este reprezentată grafic funcția f care descrie traiectoria unei mingi de baschet lansate de un jucător.

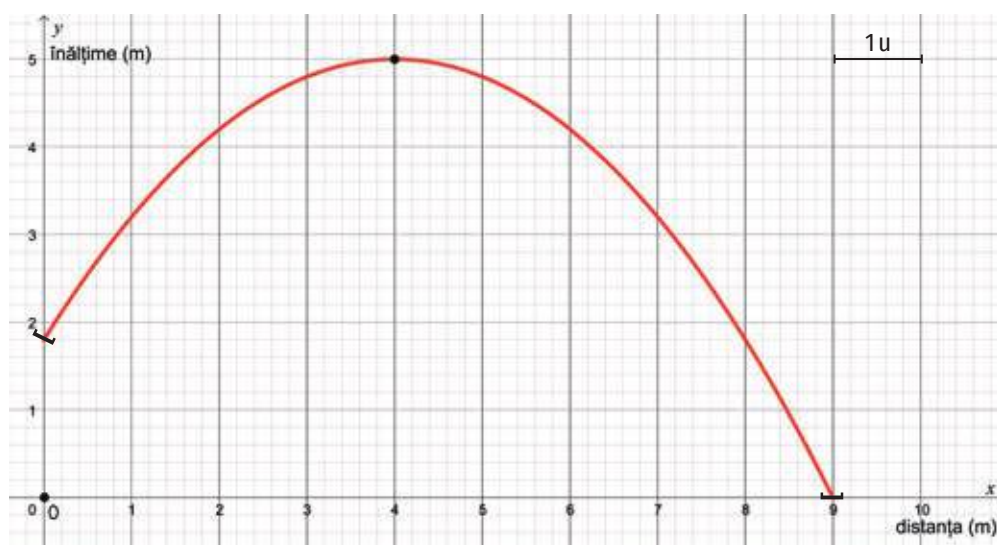


Figura 1

- Care este înălțimea de la care jucătorul a lansat mingea?
- Determină coordonatele punctului de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy și explică semnificația acestuia în contextul problemei.
- Determină coordonatele punctului de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox și explică semnificația acestuia în contextul problemei.
- Care este înălțimea maximă la care ajunge mingea? Identifică punctul corespunzător și precizează coordonatele acestuia.
- De câte ori s-a aflat mingea la înălțimea de 4,2 m deasupra solului?
- Identifică pe reprezentarea grafică punctele care au ordonata egală cu 3. Explică de ce sunt două astfel de puncte. Care sunt abscisele acestor puncte?
- Identifică pe reprezentarea grafică punctul care are abscisa egală cu 5. Care este ordonata acestui punct? Explică de ce există un singur punct cu abscisa egală cu 5.



Învăț

Definiție. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, unde a, b și c sunt numere reale și $a \neq 0$, se numește funcție de gradul al doilea.

EXEMPLE:

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - x + 2;$

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 4\sqrt{5}x;$

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + \frac{2}{5}x - 1;$

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^2 - 5.$

Forma canonică a funcției de gradul al doilea

Considerăm funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, unde a, b și c sunt numere reale și $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}\right) = a\left\{\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}, \text{ unde } \Delta = b^2 - 4ac \text{ este discriminantul} \\ &\text{ecuației } ax^2 + bx + c = 0. \end{aligned}$$

Așadar, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$, pentru orice număr real x (egalitatea se numește **forma canonică a funcției de gradul al doilea**).

Rezolvarea ecuației $ax^2 + bx + c = 0, x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

a) Dacă $\Delta < 0$, atunci $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ și ecuația $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ nu are soluție (deoarece $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$).

b) Dacă $\Delta = 0$, atunci $\frac{\Delta}{4a^2} = 0$ și ecuația $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ are soluția dublă $x = -\frac{b}{2a}$.

c) Dacă $\Delta > 0$, atunci $\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ și

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ sau } x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ sau } x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ sau } x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

Reprezentarea grafică a funcției de gradul al doilea



Vom construi graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, unde a, b și c sunt numere reale și $a \neq 0$, în mai multe etape:

- Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Vom reprezenta grafic funcția f cu ajutorul tabelului de valori de mai jos:

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

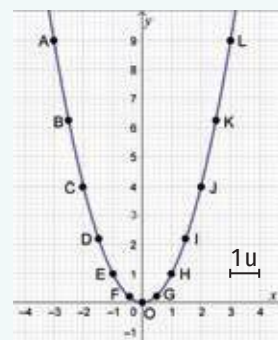
Reprezentăm în reperul cartezian xOy punctele $A(-3, 9)$, $B(-2,5; 6,25)$, $C(-2, 4)$, $D(-1,5; 2,25)$, $E(-1, 1)$, $F(-0,5; 0,25)$, $G(0,5; 0,25)$, $H(1, 1)$, $I(1,5; 2,25)$, $J(2, 4)$, $K(2,5; 6,25)$, $L(3, 9)$ și apoi le unim printr-o linie continuă (figura 2). Curba obținută se numește **parabolă**, iar punctul $O(0, 0)$ se numește **vârful parabolei**. Axa Oy este **axa de simetrie** a acestei parabole, adică, dacă punctul $P(\alpha, \alpha^2)$ aparține parabolei, atunci și simetricul acestuia în raport cu axa Oy , $P'(-\alpha, \alpha^2)$, aparține parabolei.

- Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$. Vom reprezenta grafic funcția f cu ajutorul tabelului de valori de mai jos:

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	-9	-6,25	-4	-2,25	-1	-0,25	0	-0,25	-1	-2,25	-4	-6,25	-9

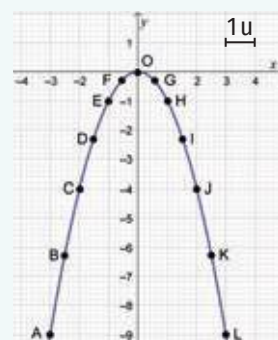
Reprezentăm în reperul cartezian xOy punctele $A(-3, -9)$, $B(-2,5; -6,25)$, $C(-2, -4)$, $D(-1,5; -2,25)$, $E(-1, -1)$, $F(-0,5; -0,25)$, $G(0,5; -0,25)$, $H(1, -1)$, $I(1,5; -2,25)$, $J(2, -4)$, $K(2,5; -6,25)$, $L(3, -9)$ și apoi le unim printr-o linie continuă (figura 3). Curba obținută se numește, de asemenea, parabolă, iar punctul O se numește vârful parabolei. Axa Oy este axa de simetrie a acestei parabole.

- Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$). Reprezentarea grafică a acestei funcții se construiește tot prin puncte. Curba obținută este o parabolă simetrică față de axa Oy , iar punctul O este vârful acesteia. Dacă $a > 0$, parabola va avea aspectul din figura 4, iar dacă $a < 0$, parabola va avea aspectul din figura 5.
- Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + c$ ($a \neq 0$). Reprezentarea grafică a acestei funcții se obține prin deplasarea pe verticală (de-a lungul axei Oy) a reprezentării grafice a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2$, $a \neq 0$, cu $|c|$ unități în sus (dacă $c > 0$) sau în jos (dacă $c < 0$) (figura 6). Curba obținută este o parabolă simetrică față de axa Oy , iar punctul $V(0, c)$ este vârful acesteia.



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

Figura 2



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2$$

Figura 3

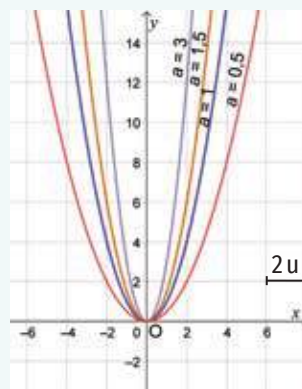


Figura 4

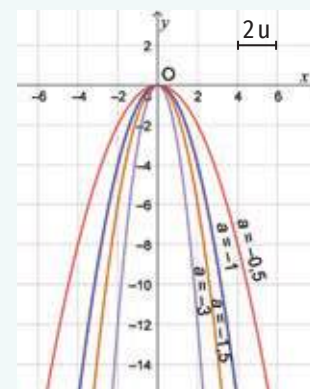
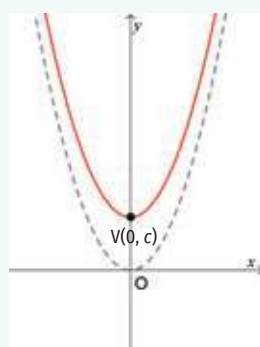
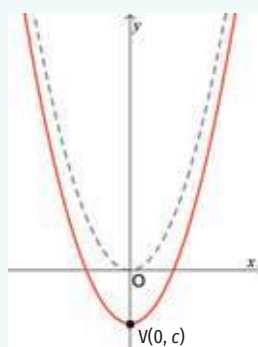


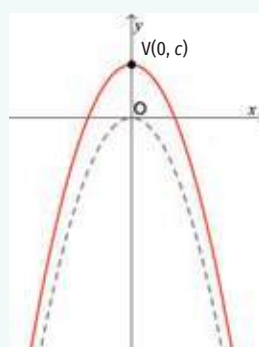
Figura 5



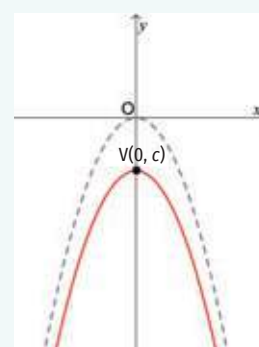
$$a > 0, c > 0$$



$$a > 0, c < 0$$



$$a < 0, c > 0$$



$$a < 0, c < 0$$

Figura 6

- Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a(x + m)^2$ ($a, m \in \mathbb{R}^*$). Reprezentarea grafică a acestei funcții se obține prin deplasarea pe orizontală a reprezentării grafice a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = ax^2, a \in \mathbb{R}^*,$ cu $|m|$ unități spre stânga (dacă $m > 0$) sau spre dreapta (dacă $m < 0$) (figura 7). Curba obținută este o parabolă simetrică față de dreapta de ecuație $x = -m$, iar punctul $V(-m, 0)$ este vârful acesteia.

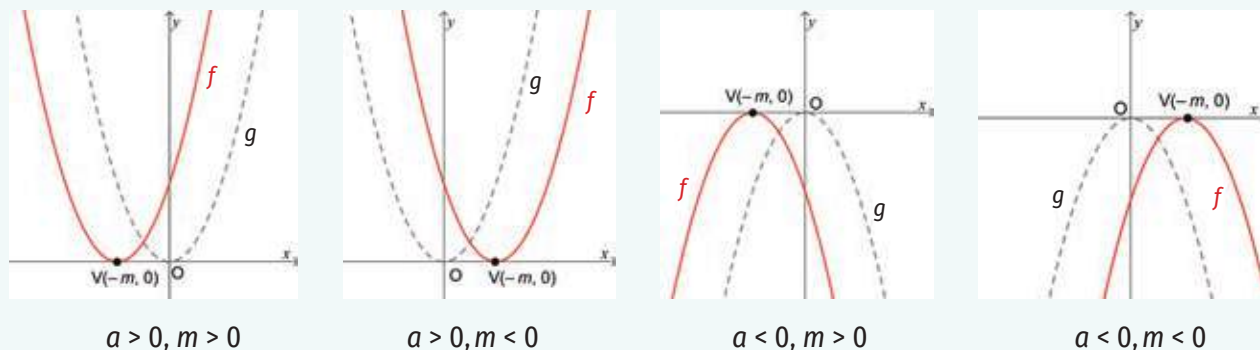


Figura 7

- Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$). În acest caz, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$, pentru orice număr real x . Reprezentarea grafică a acestei funcții se obține prin deplasarea pe verticală a reprezentării grafice a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2, a \in \mathbb{R}^*,$ cu $\left|\frac{-\Delta}{4a}\right|$ unități în sus (dacă $\frac{-\Delta}{4a} > 0$) sau în jos (dacă $\frac{-\Delta}{4a} < 0$) (figurile 8 și 9). Curba obținută este o parabolă simetrică față de dreapta de ecuație $x = -\frac{b}{2a}$, iar punctul $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ este vârful parabolei.

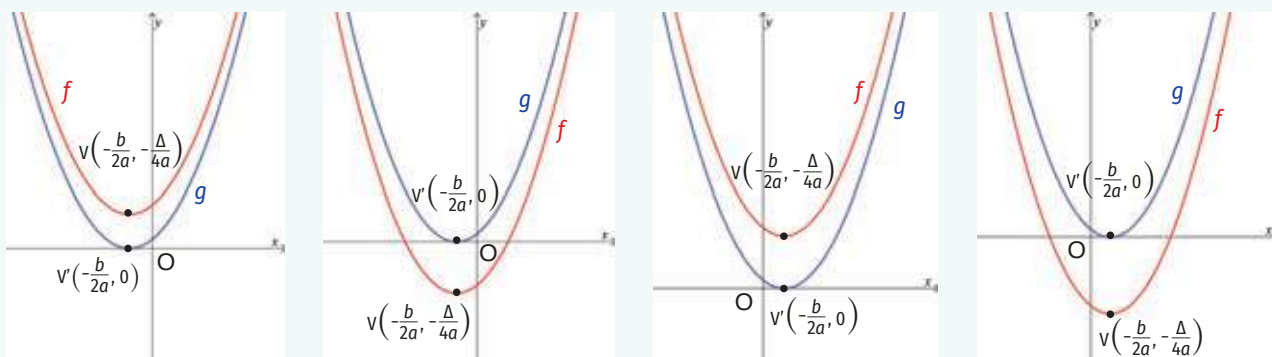


Figura 8 ($a > 0$)

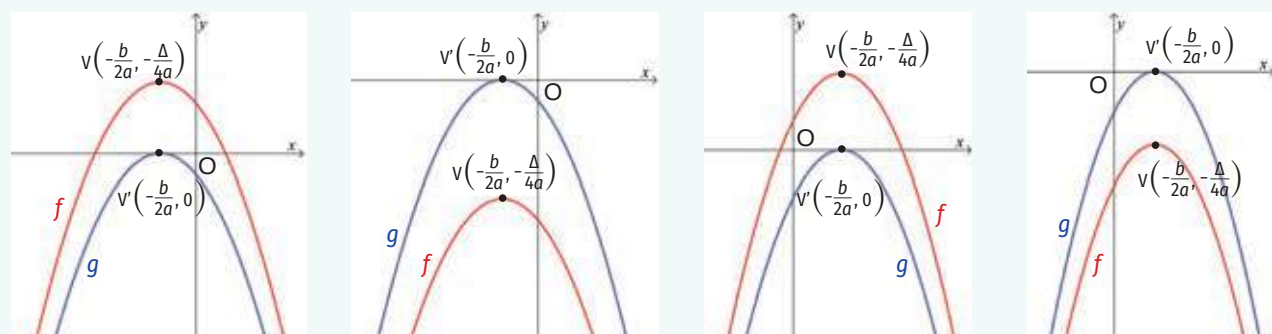


Figura 9 ($a < 0$)

OBSERVAȚIE.

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, unde a, b, c sunt numere reale și $a \neq 0$, este **convexă** dacă $a > 0$ și **concavă** dacă $a < 0$.

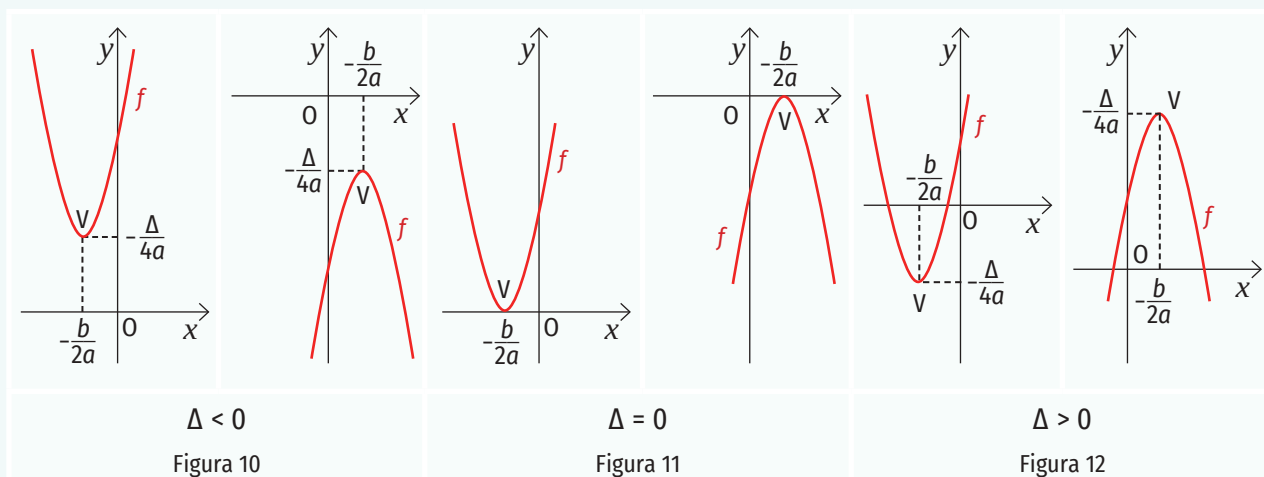
Intersecțiile reprezentării grafice cu axele de coordonate

Considerăm funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, unde a, b, c sunt numere reale și $a \neq 0$.

Intersecția reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox

Pentru a determina abscisa punctului/abscisele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox , rezolvăm ecuația $f(x) = 0$.

Pot apărea următoarele cazuri:



- Dacă $\Delta < 0$, atunci ecuația $f(x) = 0$ nu are soluție și reprezentarea grafică a funcției f nu intersectează axa Ox (figura 10).
- Dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are o soluție dublă, $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ și reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Ox într-un singur punct care are coordonatele $(-\frac{b}{2a}, 0)$ (figura 11).
- Dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are două soluții distincte, $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ și $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ și reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Ox în două puncte, care au coordonatele $(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, 0)$ și $(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, 0)$ (figura 12).

Intersecția reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy

Coordonatele punctului de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy sunt $(0, f(0))$.

Pentru a realiza corect reprezentarea grafică a unei funcții de gradul al doilea într-un sistem de axe ortogonale, procedăm astfel:

- determinăm coordonatele vârfului parabolei $V(-\frac{b}{2a}, \frac{\Delta}{4a})$;
- determinăm coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției cu axele de coordonate;
- dacă punctele obținute la pasul anterior nu sunt suficiente pentru o reprezentare exactă ($\Delta \leq 0$), alegem valori suplimentare pentru x și calculăm valorile corespunzătoare ale funcției, astfel încât să obținem cel puțin un punct a cărui abscisă este mai mică decât abscisa vârfului și cel puțin un punct a cărui abscisă este mai mare decât abscisa vârfului;
- trasăm parabola, respectând faptul că ramurile acesteia sunt orientate în sus, pentru $a > 0$, sau în jos, pentru $a < 0$.

EXEMPLE:

1. Să reprezentăm grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

- Vârful parabolei este $V(-2, -1)$ ($-\frac{b}{2a} = -2$ și $-\frac{\Delta}{4a} = -1$).
- Determinăm coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 + 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\ x_2 = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 - 2}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Ox în două puncte: $A(-1, 0)$ și $B(-3, 0)$.

- Punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy este $C(0, 3)$, deoarece $f(0) = 0^2 + 4 \cdot 0 + 3 = 3$.
- Trasăm parabola (figura 13).

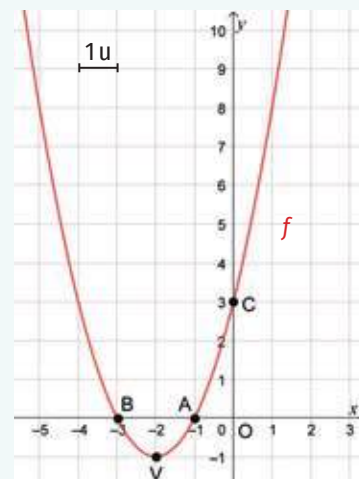


Figura 13

2. Să reprezentăm grafic funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 2x - 3$.

- Vârful parabolei este $V(1, -2)$ ($-\frac{b}{2a} = 1$ și $-\frac{\Delta}{4a} = -2$).
- Determinăm coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției g cu axa Ox :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 3 = 0$$

$\Delta = -8 \Rightarrow$ Ecuația nu are soluție. $\Rightarrow$ Reprezentarea grafică a funcției g nu intersectează axa Ox .

- Punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției g cu axa Oy este $A(0, -3)$, deoarece $g(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$.
- Observăm că avem un punct a cărui abscisă este mai mică decât abscisa vârfului parabolei, dar nu avem niciun punct a cărui abscisă este mai mare decât abscisa vârfului parabolei. Calculăm $g(2) = -2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = -3$ și obținem punctul $B(2, -3)$, care aparține reprezentării grafice a funcției g .
- Trasăm parabola (figura 14).

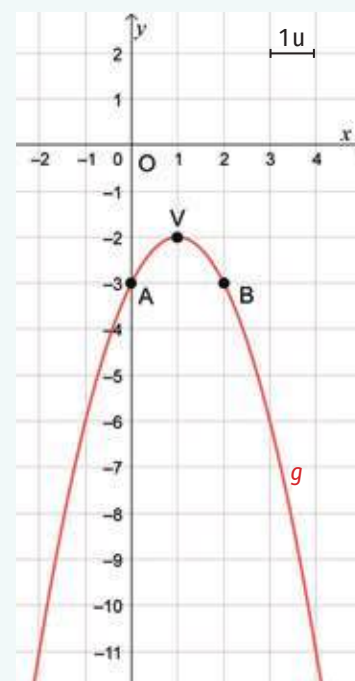


Figura 14

OBSERVAȚIE.

Dreapta de ecuație $x = -\frac{b}{2a}$ este axă de simetrie a reprezentării grafice a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde a, b și c sunt numere reale și $a \neq 0$.

Exerciții rezolvate

1. Determină valorile numărului real m pentru care punctul $A(m+1, -m^2+2m+6)$ aparține reprezentării grafice a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Rezolvare:

Punctul $A(m+1, -m^2+2m+6)$ aparține reprezentării grafice a funcției f dacă și numai dacă $f(m+1) = -m^2+2m+6$.

$$f(m+1) = -m^2+2m+6 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 2(m+1) + 3 = -m^2+2m+6 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow m \in \{-1, 2\}$$

2. Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentările grafice ale funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 4x + 9$.

Rezolvare:

Dacă punctul $A(x_A, y_A)$ aparține intersecției reprezentărilor grafice ale funcțiilor f și g , atunci $f(x_A) = y_A$ și $g(x_A) = y_A$, de unde rezultă $f(x_A) = g(x_A)$. Așadar, abscisa punctului A este soluție a ecuației $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = x^2 - 4x + 9 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 3\}$$

Reprezentările grafice ale funcțiilor f și g se intersectează în două puncte ale căror abscise sunt $x = -2$ și $x = 3$. Pentru a determina ordonatele celor două puncte trebuie să calculăm $f(-2)$ sau $g(-2)$ și $f(3)$ sau $g(3)$.

Cum $g(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 9 = 21$ și $g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 9 = 6$, coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentările grafice ale funcțiilor f și g sunt $(-2, 21)$ și $(3, 6)$.

3. Determină valorile numărului real m pentru care ecuația $x^2 - 4x + 2m - 2 = 0$ are două soluții distincte.

Rezolvare:

$$x^2 - 4x + 2m - 2 = 0 \text{ are două soluții distincte} \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m - 2) > 0 \\ \Leftrightarrow 3 - m > 0 \Leftrightarrow m < 3 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 3)$$

Ecuația $x^2 - 4x + 2m - 2 = 0$ are două soluții distincte pentru orice $m \in (-\infty, 3)$.

4. Determină valorile numărului real m pentru care reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x^2 + 2x - 3m + 1$, nu intersectează axa Ox .

Rezolvare:

Reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x^2 + 2x - 3m + 1$, nu intersectează axa Ox dacă și numai dacă ecuația $-2x^2 + 2x - 3m + 1 = 0$ nu are soluție, ceea ce este echivalent cu $\Delta < 0$.

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 2^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3m + 1) < 0 \Leftrightarrow 1 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Reprezentarea grafică a funcției f nu intersectează axa Ox pentru $m \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

5. Determină valorile numărului real m pentru care vârful parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 2$, se află sub axa Ox .

Rezolvare:

Vârful parabolei asociate funcției f are coordonatele $(m, -2m + 2)$. Acesta se află sub axa Ox dacă și numai dacă $-2m + 2 < 0$, adică $m \in (1, +\infty)$.

6. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \\ 3x - 2, & x \geq 0 \end{cases}$. 

a) Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și axele de coordonate Ox și Oy .

b) Reprezintă grafic funcția f .

Rezolvare:

a) Pentru a determina coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și axa Ox , rezolvăm ecuația $f(x) = 0$.

Dacă $x < 0$, ecuația $f(x) = 0$ devine $1 - x^2 = 0$, care are soluția $x = -1$.

Dacă $x \geq 0$, ecuația $f(x) = 0$ devine $3x - 2 = 0$, care are soluția $x = \frac{2}{3}$.

Așadar, coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și axa Ox sunt $(-1, 0)$ și $(\frac{2}{3}, 0)$.

Pentru a determina coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și axa Oy calculăm $f(0)$ și obținem $f(0) = -2$. Așadar, coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și axa Oy sunt $(0, -2)$.

b) Reprezentăm grafic, în același reper cartezian, funcțiile $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 1 - x^2$, și $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 3x - 2$ (figura 15).

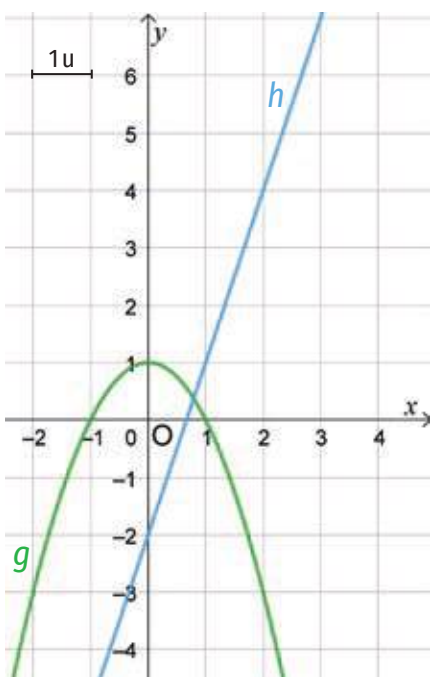


Figura 15

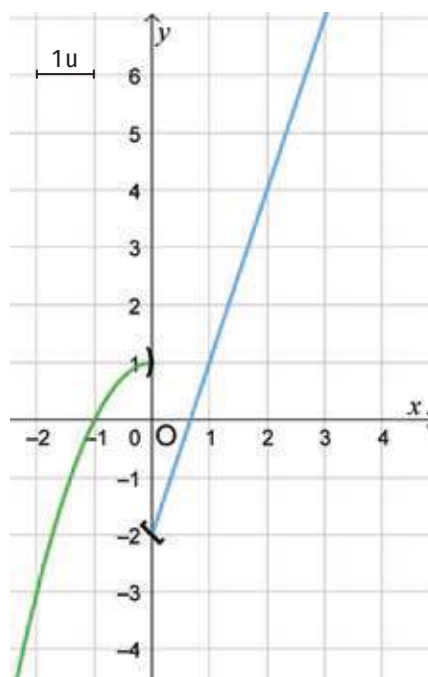


Figura 16

Pentru a obține reprezentarea grafică a funcției f selectăm din cele două reprezentări grafice numai anumite porțiuni: din parabolă păstrăm ramura aflată la stânga axei Oy , iar din dreaptă păstrăm porțiunea aflată în dreapta axei Oy , inclusiv punctul de coordonate $(0, -2)$ (figura 16).

Aplic

- Determină coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - $f(x) = -x^2 - 4x + 2$;
 - $f(x) = 2x^2 + 6x$;
 - $f(x) = x^2 - x + 3$;
 - $f(x) = 4x^2 + 3$;
 - $f(x) = -x^2 + x + 1$;
 - $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$.
- Determină axa de simetrie a reprezentării grafice a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - $f(x) = -2x^2 + x - 2$;
 - $f(x) = x^2 + 2x$;
 - $f(x) = -3x^2 + 5$.
- Determină forma canonică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - $f(x) = x^2 - x + 10$;
 - $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$;
 - $f(x) = 3x^2 - 2x$;
 - $f(x) = x^2 - 3$;
 - $f(x) = x^2 + x - 5$;
 - $f(x) = -2x^2 + 7x - 2$.
- Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și axele de coordonate.
 - $f(x) = x^2 - 4x + 4$;
 - $f(x) = -2x^2 + 8$;
 - $f(x) = x^2 - 5x$;
 - $f(x) = x^2 - 1$;
 - $f(x) = -x^2 + x - 1$;
 - $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$.
- Determină distanța dintre punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu axa Ox .
 - $f(x) = -x^2 + 3x - 2$;
 - $f(x) = x^2 + x$;
 - $f(x) = -3x^2 + 12$.
- Reprezintă grafic, în reperul cartezian xOy , funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - $f(x) = -x^2 + 2x - 1$;
 - $f(x) = -x^2 + 9$;
 - $f(x) = x^2 + 2x$;
 - $f(x) = x^2 - 3x + 2$;
 - $f(x) = x^2 + 2x + 4$;
 - $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$.
- Determină coordonatele punctului/punctelor de intersecție (dacă există) dintre reprezentările grafice ale funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, $g(x) = x^2 - 3x + 6$;
 - $f(x) = -x^2 + 4x + 1$, $g(x) = x^2 - 2x - 7$;
 - $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $g(x) = x^2 + 2x - 7$;
 - $f(x) = x^2 - 3x - 4$, $g(x) = x + 1$.
- Determină funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, știind că:
 - $f(0) = -1$, $f(2) = 3$, $f(-2) = 3$;
 - $f(0) = 4$, $f(1) = 2$, $f(2) = -1$.
- Determină funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a cărei reprezentare grafică conține punctele A, B și C.
 - A(-1, 0), B(0, 2), C(3, 0);
 - A(1, -2), B(0, 1), C(-3, 0);
 - A(-1, 1), B(0, -1), C(2, 0).
- Determină funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a cărei reprezentare grafică intersectează axele de coordonate în punctele A(0, -2), B(1, 0) și C(-2, 0).
- Determină funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a cărei reprezentare grafică are vârful V(1, 1) și intersectează axa Oy în punctul A(0, -2).
- Se consideră funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a cărei reprezentare grafică are vârful V(-3, -16) și intersectează axa Oy în punctul A(0, -7). Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și axa Ox .
- În figura 17 este reprezentată grafic funcția de gradul al doilea f .
 - Identifică vârful parabolei și punctul de intersecție a parabolei cu axa Oy și scrie coordonatele acestora.
 - Determină funcția f .

c) Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și axa Ox .

d) Verifică, folosind reprezentarea grafică a funcției f , dacă numerele reale -4 , -3 , 0 și 5 aparțin imaginii funcției f .

e) Determină numărul de soluții ale ecuației $f(x) = -3$.

f) Determină numărul de soluții ale ecuației $f(x) = 7$.

g) Determină numărul de soluții ale ecuației $f(x) = -10$.

h) Încadrează între două numere întregi consecutive fiecare dintre soluțiile ecuației $f(x) = 8$.

14. Determină numărul real m pentru care punctul $A(2, 9)$ aparține reprezentării grafice a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x^2 + mx - 1$.

15. Determină valorile numărului real m pentru care punctul $A(1, m^2)$ aparține reprezentării grafice a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 5m - 5$.

16. Determină valorile numărului real m pentru care punctul $A(m, m^2 + 2)$ aparține reprezentării grafice a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 3x - 8$.

17. Determină valorile numărului real m pentru care ecuația $x^2 - (2m^2 + 1)x + 5m - 5 = 0$ are soluția $x = -1$.

18. Determină valorile numărului real nenul m pentru care ecuația $mx^2 + (m - 1)x + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, are două soluții egale.

19. Determină valorile numărului real nenul m pentru care ecuația $mx^2 - 2x + 3 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, are două soluții distincte.

20. Determină valorile numărului real $m \neq \frac{1}{2}$ pentru care ecuația $(2m - 1)x^2 - x + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, nu are soluție.

21. Determină numărul real m pentru care reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intersectează axa Ox într-un singur punct.

a) $f(x) = x^2 - (m + 1)x + m$; b) $f(x) = (m - 1)x^2 - mx + 1, m \neq 1$.

22. Determină valorile numărului real m pentru care reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.

a) $f(x) = x^2 + 3x - 2m - 1$; b) $f(x) = (m - 1)x^2 + 2x - 3$.

23. Determină valorile numărului real m pentru care reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nu intersectează axa Ox .

a) $f(x) = x^2 - 4x - 2m + 3$; b) $f(x) = -2x^2 + x - 3m + 2$.

24. Demonstrează că reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intersectează axa Ox în două puncte distincte, pentru orice număr real nenul m .

a) $f(x) = x^2 - (2m + 4)x + 3m + 1$; b) $f(x) = mx^2 + 2(m - 3)x + m - 6$.

25. Demonstrează că reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = m^2x^2 - 2mx + 1$, intersectează axa Ox într-un singur punct, pentru orice număr real nenul m .

26. Demonstrează că, oricare ar fi numărul real m , reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nu intersectează axa Ox .

a) $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 + 1$; b) $f(x) = x^2 + (m + 1)x + m^2 + m + 1$.

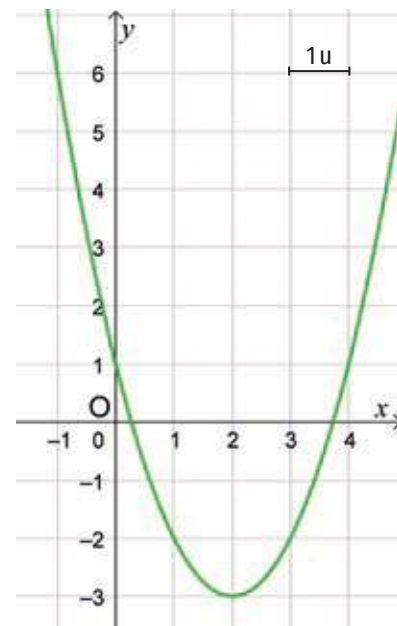


Figura 17





27. Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și axele de coordonate Ox și Oy .

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, & x < 2 \\ x - 10, & x \geq 2 \end{cases}; \quad c) f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 5x - 2, & x \leq -1 \\ x^2 - x - 2, & x > -1 \end{cases}.$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x < 3 \\ x^2 - 5x + 6, & x \geq 3 \end{cases};$$

28. Reprezintă grafic, în reperul cartezian xOy , funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$a) f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x < 1 \\ 2 - x, & x \geq 1 \end{cases}; \quad b) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 0 \\ x^2 + x, & x \geq 0 \end{cases}; \quad c) f(x) = \begin{cases} -2x^2 + x + 1, & x \leq -1 \\ x^2 - x - 2, & x > -1 \end{cases}.$$

29. Determină valorile numărului real m pentru care vârful parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se află sub axa Ox .

$$a) f(x) = -x^2 + 2mx - m^2 + m + 1; \quad b) f(x) = x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m.$$

30. Determină valorile numărului real m pentru care vârful parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se află deasupra axei Ox .

$$a) f(x) = 2x^2 - 4mx + 2m^2 - m - 2; \quad b) f(x) = -x^2 - 2(m + 1)x - m^2 - m + 3.$$

31. Numărul de studenți (exprimat în zeci) care accesează zilnic o platformă de cursuri online pentru pregătirea unui examen, începând de la prima accesare până în ziua examenului, este modelat de funcția $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 16x + 20$.

- Reprezintă grafic funcția f .
- Determină coordonatele vârfului parabolei asociate funcției f .
- Câți utilizatori are platforma la sfârșitul celei de-a treia zile?
- În a câta zi are platforma 840 de utilizatori?

32. Într-un experiment realizat la ora de chimie, temperatura unui amestec (măsurată în grade Celsius) variază în funcție de timpul scurs de la începutul monitorizării (măsurat în minute), conform funcției $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 6x + 20$.

- Reprezintă grafic funcția f .
- Determină coordonatele vârfului parabolei asociate funcției f .
- Ce temperatură are amestecul după 2 minute de la începutul monitorizării?
- După câte minute are amestecul o temperatură de 25°C ?

33. În figura 18 este reprezentată grafic funcția f , care modelează cantitatea de apă dintr-un rezervor (măsurată în m^3) în funcție de timpul (măsurat în ore) de la momentul în care acesta începe să fie alimentat. Când rezervorul este plin, alimentarea cu apă se oprește, iar apa începe să fie consumată.

- Determină funcția f și imaginea funcției f .
- Determină cantitatea de apă care se află în rezervor după o oră de la momentul începerii alimentării acestuia.
- Determină cantitatea de apă care se află în rezervor după 6 ore de la momentul începerii alimentării acestuia.
- La cât timp de la momentul începerii alimentării rezervorului cantitatea de apă din rezervor este de 4 m^3 ?

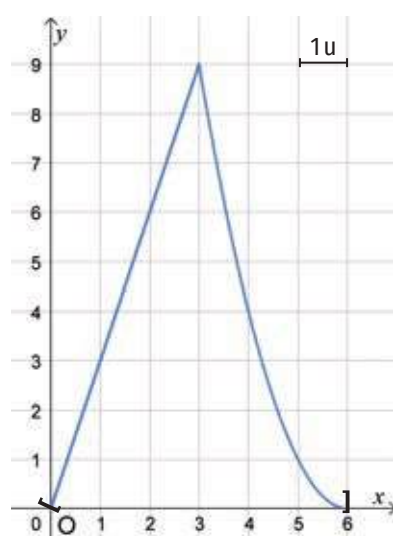


Figura 18

2.2. Monotonia funcției de gradul al doilea; punctul de extrem

Descopăr



1. În figura 1 este reprezentată grafic funcția $f : [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = -t^2 + 8t$, care descrie concentrația unui medicament (măsurată în mg/l) în sângele unui pacient, în funcție de timpul scurs de la administrare (măsurat în ore).

a) Ce se întâmplă cu concentrația medicamentului în sânge dacă timpul scurs de la administrare crește de la 1 oră la 3 ore? Dar dacă timpul crește de la 5 ore la 7 ore?

b) Identifică pe reprezentarea grafică punctul în care concentrația medicamentului în sânge este maximă. După câte ore de la administrare se atinge acest maxim și care este valoarea concentrației medicamentului în sânge în acel moment?

c) Care este intervalul de timp în care concentrația medicamentului în sânge este în creștere? Dar intervalul în care aceasta scade până la eliminarea completă din organism?

2. În figura 2 este reprezentată grafic funcția $f : [40, 140] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(v) = 0,0015v^2 - 0,27v + 17,15$, care descrie dependența cantității de combustibil consumată de un autovehicul (exprimată în litri la 100 km) de viteza medie de deplasare (exprimată în km/h).

a) Ce se întâmplă cu consumul de combustibil dacă viteza medie crește de la 50 km/h la 70 km/h? Dar dacă viteza crește de la 110 km/h la 130 km/h?

b) Identifică pe reprezentarea grafică punctul în care consumul de combustibil este minim. Ce viteză trebuie să aibă autovehiculul pentru a atinge acest minim?

c) Precizează intervalul de viteze pentru care consumul de combustibil scade și intervalul de viteze pentru care consumul de combustibil crește.

d) Dacă un autovehicul circulă cu viteza maximă admisă pe autostradă (130 km/h), consumul de combustibil este mai mic sau mai mare decât 5 l/100 km?

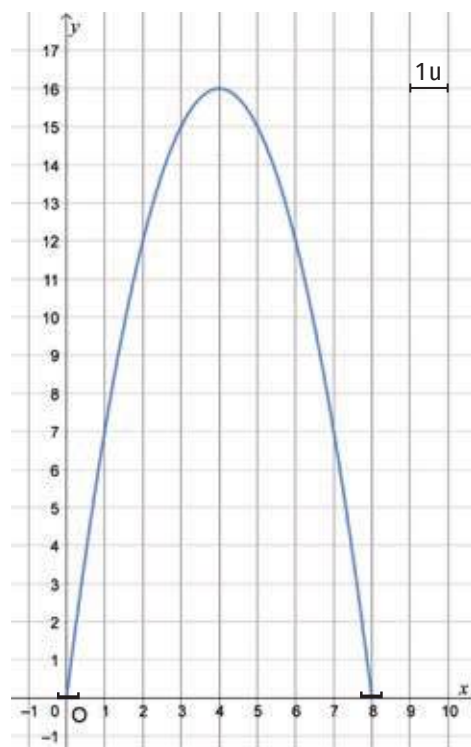


Figura 1

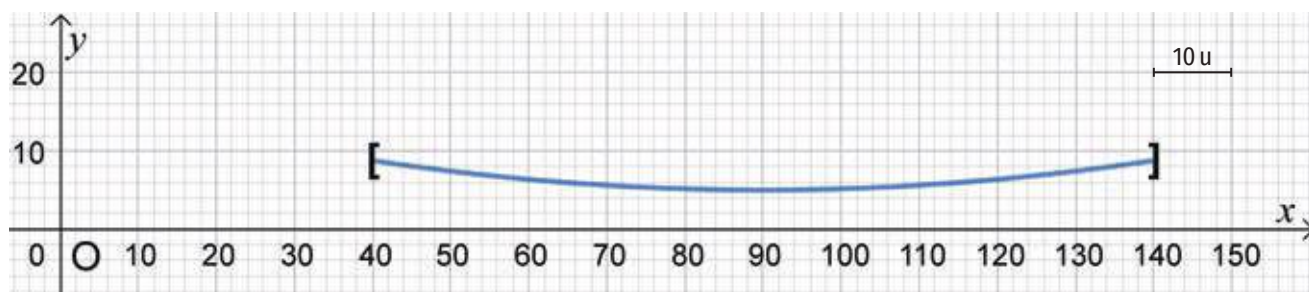


Figura 2

Învăț

Considerăm funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde a, b, c sunt numere reale și $a \neq 0$. Am demonstrat în lecția anterioară că $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$, pentru orice număr real x .

- Dacă $a > 0$, atunci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, pentru orice număr real x .

$$a > 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0, (\forall)x \in \mathbb{R} \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \geq \frac{-\Delta}{4a}, (\forall)x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq \frac{-\Delta}{4a}, (\forall)x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Din inegalitatea (1) rezultă că $\frac{-\Delta}{4a}$ reprezintă cea mai mică valoare a funcției f , valoare numită și minimul funcției f . Cum $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$, $-\frac{b}{2a}$ este valoarea argumentului funcției f în care se realizează acest minim. În acest caz, mulțimea valorilor funcției f este $\left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty\right)$.

- Dacă $a < 0$, atunci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$, pentru orice număr real x .

$$a < 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \leq \frac{-\Delta}{4a}, (\forall)x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \leq \frac{-\Delta}{4a}, (\forall)x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Din inegalitatea (2) rezultă că $\frac{-\Delta}{4a}$ reprezintă cea mai mare valoare a funcției f , valoare numită și maximul funcției f . Cum $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$, $-\frac{b}{2a}$ este valoarea argumentului funcției f în care se realizează acest maxim. În acest caz, mulțimea valorilor funcției f este $\left(-\infty, \frac{-\Delta}{4a}\right]$.

OBSERVAȚII.

1. Valoarea minimă (maximă) a funcției f se numește **valoare extremă** sau **extremul funcției**, iar punctul $x = -\frac{b}{2a}$ pentru care se realizează extremul se numește **punct de extrem al funcției f** .

2. Punctul $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ se numește **punct de extrem al graficului funcției**.

Proprietate. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$.

a) Dacă $a > 0$, atunci funcția f are valoarea minimă $y_{\min} = \frac{-\Delta}{4a}$, care se obține pentru $x = -\frac{b}{2a}$ (punctul de minim al funcției). Mulțimea valorilor funcției f este $\left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty\right)$ (figura 3).

b) Dacă $a < 0$, atunci funcția f are valoarea maximă $y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a}$, care se obține pentru $x = -\frac{b}{2a}$ (punctul de maxim al funcției). Mulțimea valorilor funcției f este $\left(-\infty, \frac{-\Delta}{4a}\right]$ (figura 4).

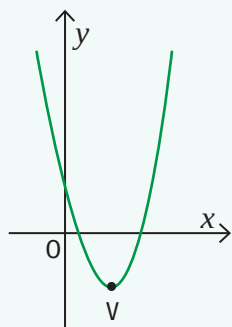


Figura 3

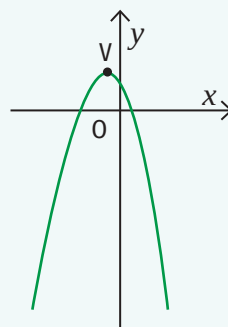


Figura 4

EXEMPLE:

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x + 3$.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4 \cdot 1} = -1$$

Cum $a > 0$, funcția f are un minim egal cu -1 , care se realizează pentru $x = -2$, și $\text{Im } f = [-1, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x^2 + 8x - 1$.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = 2$$

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1) = 64 - 8 = 56 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{56}{4 \cdot (-2)} = 7$$

Cum $a < 0$, funcția f are un maxim egal cu 7 , care se realizează pentru $x = 2$, și $\text{Im } f = (-\infty, 7]$.

Monotonia funcției de gradul al doilea

Considerăm funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, unde a, b, c sunt numere reale și $a \neq 0$. În continuare vom calcula rata creșterii/descrășterii funcției f .

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$.

$$R(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(ax_1^2 + bx_1 + c) - (ax_2^2 + bx_2 + c)}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = a(x_1 + x_2) + b$$

• $a > 0$

Dacă $x_1, x_2 \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$, atunci $x_1 + x_2 \leq -\frac{b}{a}$, de unde rezultă că $a(x_1 + x_2) + b \leq 0$, deci $R(x_1, x_2) \leq 0$.

Așadar, funcția f este descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$.

Dacă $x_1, x_2 \in \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$, atunci $x_1 + x_2 \geq -\frac{b}{a}$, de unde rezultă că $a(x_1 + x_2) + b \geq 0$, deci $R(x_1, x_2) \geq 0$.

Așadar, funcția f este crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

• $a < 0$

Dacă $x_1, x_2 \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$, atunci $x_1 + x_2 \leq -\frac{b}{a}$, de unde rezultă că $a(x_1 + x_2) + b \geq 0$, deci $R(x_1, x_2) \geq 0$.

Așadar, funcția f este crescătoare pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$.

Dacă $x_1, x_2 \in \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$, atunci $x_1 + x_2 \geq -\frac{b}{a}$, de unde rezultă că $a(x_1 + x_2) + b \leq 0$, deci $R(x_1, x_2) \leq 0$.

Așadar, funcția f este descrescătoare pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

Aceste rezultate sunt sintetizate în următoarea teoremă:

Teoremă. Fie funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, unde a, b, c sunt numere reale și $a \neq 0$.

• Dacă $a > 0$, funcția f este descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

• Dacă $a < 0$, funcția f este crescătoare pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și descrescătoare pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

OBSERVAȚII.

1. Intervalele $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ se numesc intervale de monotonie ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$).

2. Informațiile din pagina anterioară se pot transpune în tabele astfel:

$$a > 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$

$$a < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$

EXEMPLE:

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 4x$. Cum $a = 2$ și $-\frac{b}{2a} = 1$, rezultă că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 1]$ și crescătoare pe intervalul $[1, +\infty)$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 8$. Cum $a = -1$ și $-\frac{b}{2a} = 0$, rezultă că funcția f este crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și descrescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.

Exerciții rezolvate

1. Se consideră funcția $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. Determină imaginea funcției f .

Rezolvare:

Considerăm funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 4x - 3$, care este crescătoare pe intervalul $(-\infty, 2]$ și descrescătoare pe intervalul $[2, +\infty)$. Cum funcția f este restricția funcției g la intervalul $[-1, 3]$, rezultă că funcția f este crescătoare pe intervalul $[-1, 2]$ și descrescătoare pe intervalul $[2, 3]$.

$$\left. \begin{array}{l} x \in [-1, 2] \Rightarrow -1 \leq x \leq 2 \\ f \text{ este crescătoare pe intervalul } [-1, 2] \end{array} \right\} \Rightarrow f(-1) \leq f(x) \leq f(2), (\forall)x \in [-1, 2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8 \leq f(x) \leq 1, (\forall)x \in [-1, 2]$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in [2, 3] \Rightarrow 2 \leq x \leq 3 \\ f \text{ este descrescătoare pe intervalul } [2, 3] \end{array} \right\} \Rightarrow f(2) \geq f(x) \geq f(3), (\forall)x \in [2, 3] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \geq f(x) \geq 0, (\forall)x \in [2, 3]$$

Obținem $Im f = [-8, 1] \cup [0, 1] = [-8, 1]$.

2. Determină intervalele de monotonie ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 1, & x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 8, & x > 3 \end{cases}$$

Rezolvare:

Considerăm funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 4x + 1$, care este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 2]$ și crescătoare pe intervalul $[2, +\infty)$. Cum $f(x) = x^2 - 4x + 1$, pentru orice număr real $x \leq 3$, rezultă că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 2]$ și crescătoare pe intervalul $[2, 3]$.

Considerăm funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = -x^2 + 8x - 8$, care este crescătoare pe intervalul $(-\infty, 4]$ și descrescătoare pe intervalul $[4, +\infty)$. Cum $f(x) = -x^2 + 8x - 8$, pentru orice număr real $x > 3$, rezultă că funcția f este crescătoare pe intervalul $(3, 4]$ și descrescătoare pe intervalul $[4, +\infty)$.

Așadar, funcția f este crescătoare pe intervalele $[2, 3]$ și $(3, 4]$ și descrescătoare pe intervalele $(-\infty, 2]$ și $[4, +\infty)$.



3. Determină valorile numărului real $m > \frac{1}{2}$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2m - 1)x^2 - (m + 1)x + 5$, este crescătoare pe $[-1, +\infty)$.

Rezolvare:

Funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, \frac{m+1}{2(2m-1)})$ și crescătoare pe intervalul $[\frac{m+1}{2(2m-1)}, +\infty)$.

Funcția f este crescătoare pe $[-1, +\infty)$ dacă și numai dacă $\frac{m+1}{2(2m-1)} \leq -1$.

$$\frac{m+1}{2(2m-1)} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{m+1}{2(2m-1)} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5m-1}{2(2m-1)} \leq 0$$

Realizăm următorul tabel de semn:

m	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$5m - 1$	-----	0	+++++	+++++
$2(2m - 1)$	-----	-----	0	+++++
$\frac{5m - 1}{2(2m - 1)}$	+++++	0	-----	+++++

Obținem: $\frac{5m-1}{2(2m-1)} \leq 0 \Leftrightarrow m \in [\frac{1}{5}, \frac{1}{2})$.

Aplic

- Determină valoarea minimă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
a) $f(x) = x^2 - 5x + 3$; b) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$; c) $f(x) = x^2 + 2x$.
- Determină valoarea maximă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
a) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$; b) $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$; c) $f(x) = -3x^2 + x$.
- Determină valoarea extremă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
a) $f(x) = -x^2 + 5x - 4$; b) $f(x) = x^2 - 1$; c) $f(x) = -x^2 + x - 1$.
- Determină intervalele de monotonie ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$; b) $f(x) = -x^2 + 3x$; c) $f(x) = x^2 - 2$.
- Determină imaginea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$; b) $f(x) = 2x^2 - 8$; c) $f(x) = -x^2 + 4x$.
- Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Determină punctele de extrem, intervalele de monotonie și imaginea pentru fiecare dintre funcțiile f , $f \circ g$ și $g \circ f$.
a) $f(x) = 2 - x^2$, $g(x) = 2 + x$; c) $f(x) = -x^2 - 4x + 1$, $g(x) = x - 2$;
b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = 3 + 2x$; d) $f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = 2x + 1$.
- Determină intervalele de monotonie ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & x \leq 1 \\ -x^2 + x, & x > 1 \end{cases}$;
b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 9, & x < 0 \\ x^2 - 4x + 3, & x \geq 0 \end{cases}$;
c) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & x \leq -1 \\ -x^2 + 2x, & x > -1 \end{cases}$.



EXERSEAZĂ!

Pentru a proteja cuiburile de broaște-țestoase care se află pe o plajă sălbatică, o echipă de biologi izolează o zonă dreptunghiulară cu aria maximă, folosind 80 de metri de bandă ecologică de avertizare.

- Determină lungimea și lățimea zonei izolate.
- Determină aria suprafeței izolate.

POT MAI MULT

Stabilește care dintre următoarele funcții sunt injective, care sunt surjective și care sunt bijective.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow [4, +\infty)$,
 $f(x) = x^2 - 4x + 8$;

b) $g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $g(x) = 2x^2 - 8x + 3$;

c) $h: (-\infty, 2] \rightarrow (-\infty, -17]$,
 $h(x) = -x^2 + 8x + 1$;

d) $i: [3, +\infty) \rightarrow (-\infty, 4]$,
 $i(x) = -3x^2 + 9x + 4$;

e) $j: [-2, 2] \rightarrow [-4, 0]$,
 $j(x) = x^2 - 4$;

f) $k: (-\infty, 2) \rightarrow (-\infty, 1]$,
 $k(x) = -x^2 + 2x$;

g) $l: (1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$,
 $l(x) = x^2 - 2x + 1$.

8. Determină imaginea funcției f .

a) $f: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 4$;

b) $f: [2, 5) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 2x$;

c) $f: (-\infty, -2) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x - 3$;

d) $f: [3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 4x - 4$;

e) $f: [-3, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 4x + 5$;

f) $f: (-2, 0) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x^2 - 5x + 4$;

g) $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x^2 - 5x + 4$;

h) $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x - 4$;

i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x \leq 3 \\ -x^2 + 4x - 5, & x > 3 \end{cases}$;

j) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \in (-\infty, -1) \\ x^2 + 1, & x \in [-1, 1] \\ x^2 - 6x + 10, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$;

k) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & x \in (-\infty, -1] \\ x^2, & x \in (-1, 1] \\ -x^2 + 4x - 2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$.

9. Determină mulțimea valorilor numărului real m pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2(m+2)x + 4m - 1$, este crescătoare pe intervalul $[2, +\infty)$.

10. Determină valorile numărului real m pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + (3m - 5)x + 2m$, este descrescătoare pe intervalul $[1, +\infty)$.

11. Înălțimea la care se află o minge față de sol (exprimată în metri), depinde de timpul t de la lansare (exprimat în secunde), conform funcției $h: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(t) = -5t^2 + 9t + 2$.

a) De la ce înălțime a fost lansată mingea?

b) La câte secunde de la lansare atinge mingea solul?

c) Care este înălțimea maximă la care ajunge mingea?

d) La câte secunde de la lansare atinge mingea înălțimea maximă?

e) Determină intervalele de monotonie ale funcției h .

12. Evoluția profitului lunar al unei mici afaceri cu accesorii lucrate manual în funcție de prețul de vânzare x (exprimat în lei) stabilit pentru un produs este descrisă de funcția $P: [10, 50] \rightarrow \mathbb{R}$, $P(x) = -2x^2 + 120x - 1\,000$.

a) Reprezintă grafic funcția P cu ajutorul unui instrument digital.

b) Determină prețul de vânzare al unui produs pentru care profitul este maxim. Calculează valoarea acestui profit.

c) Compară profitul obținut în cazul în care prețul de vânzare al unui produs este 25 de lei cu cel obținut atunci când prețul de vânzare al unui produs este 28 de lei. Justifică răspunsul.

d) Ce se întâmplă cu profitul dacă prețul crește de la 35 de lei la 40 de lei?

e) Care este profitul dacă prețul de vânzare al unui produs este 20 de lei?

f) Este posibil ca afacerea să obțină un profit de 1 000 de lei pe lună? Justifică.

g) Determină intervalele de monotonie ale funcției f .

h) Care este mulțimea valorilor profitului înregistrat de firmă?

2.3. Semnul funcției de gradul al doilea; interpretare geometrică (poziția unei parabole în raport cu axa Ox); inecuații de gradul al doilea studiate pe mulțimea $\mathbb{R}$ sau pe intervale de numere reale; interpretare geometrică (proiecții ale unor porțiuni de parabolă pe axe)

Descopăr



Funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 7x - 6$, descrie dependența dintre profitul lunar (exprimat în mii de euro) al unei firme și numărul de unități vândute (exprimat în sute de unități).

- Reprezintă grafic funcția f .
- Determină numărul de unități vândute pentru care firma are profit 0.
- Pentru ce volum de vânzări firma înregistrează profit?
- Explică ce se întâmplă dacă firma vinde mai puțin de 100 de unități sau mai mult de 600 de unități.
- Câte unități trebuie să vândă firma pentru a înregistra un profit lunar de cel puțin 4 000 de euro?



Învăț

Semnul funcției de gradul al doilea; interpretare geometrică (poziția unei parabole în raport cu axa Ox)

A studia semnul funcției de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) înseamnă a determina valorile lui x pentru care $f(x) > 0$ și valorile lui x pentru care $f(x) < 0$. Avem următoarele cazuri:

• $\Delta < 0$

a) Dacă $a > 0$, atunci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, pentru orice număr real x . Cum $-\frac{\Delta}{4a} > 0$, rezultă că $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} > 0$, pentru orice număr real x , deci $f(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $a < 0$, atunci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$, pentru orice număr real x . Cum $-\frac{\Delta}{4a} < 0$, rezultă că $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} < 0$, pentru orice număr real x , deci $f(x) < 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Așadar, dacă $a > 0$, atunci $f(x) > 0$, pentru orice număr real x , iar dacă $a < 0$, atunci $f(x) < 0$, pentru orice număr real x .

Putem enunța regula astfel:

Dacă $\Delta < 0$, atunci $f(x)$ are semnul lui a , oricare ar fi numărul real x .

În tabelul următor este sintetizat acest rezultat:

$\Delta < 0$	x	$-\infty$	$+\infty$
	$f(x)$	semnul lui a	

Interpretarea geometrică a semnelui funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) cu $\Delta < 0$, este ilustrată în figurile 1 și 2. În acest caz, parabola este situată deasupra axei Ox pentru $a > 0$ și $\Delta < 0$ (figura 1) și sub axa Ox pentru $a < 0$ și $\Delta < 0$ (figura 2).

• $\Delta = 0$

a) Dacă $a > 0$, atunci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$, pentru orice număr real $x, x \neq -\frac{b}{2a}$. Cum $-\frac{\Delta}{4a} = 0$, rezultă că

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} > 0$, pentru orice număr real $x, x \neq -\frac{b}{2a}$. Așadar, $f(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

b) Dacă $a < 0$, atunci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$, pentru orice număr real $x, x \neq -\frac{b}{2a}$. Cum $-\frac{\Delta}{4a} = 0$, rezultă că $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} < 0$, pentru orice număr real $x, x \neq -\frac{b}{2a}$. Așadar, $f(x) < 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

Așadar, dacă $a > 0$, atunci $f(x) > 0$, pentru orice număr real $x \neq -\frac{b}{2a}$, iar dacă $a < 0$, atunci $f(x) < 0$, pentru orice număr real $x \neq -\frac{b}{2a}$.

Putem enunța regula astfel:

Dacă $\Delta = 0$, atunci $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$ și $f(x)$ are semnul lui a , oricare ar fi numărul real $x, x \neq -\frac{b}{2a}$.

În tabelul următor este sintetizat acest rezultat:

$\Delta = 0$	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
	$f(x)$	semnul lui a	0	semnul lui a

Interpretarea geometrică a semnelui funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) cu $\Delta = 0$, este ilustrată în figurile 3 și 4. În acest caz, parabola este tangentă la axa Ox .

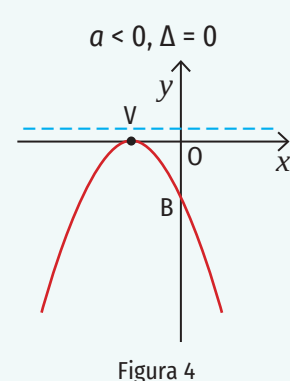
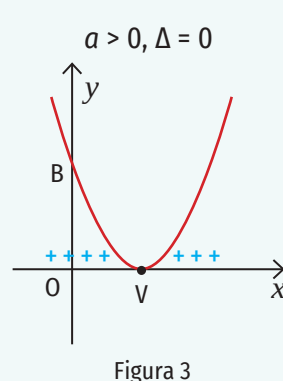
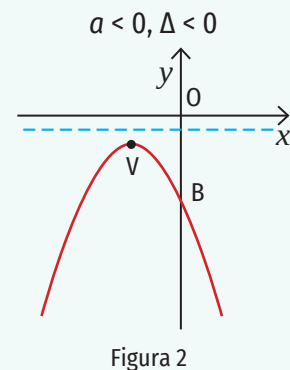
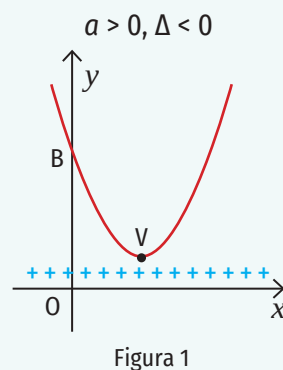
• $\Delta > 0$

Dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are două soluții distincte, x_1 și x_2 . În plus,

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Presupunem $x_1 < x_2$.

Folosind semnul funcției de gradul întâi și semnul unei funcții obținute ca produs a două funcții, putem realiza următorul tabel:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x - x_1$	-----	0	+++++	+++++
$x - x_2$	-----	-----	0	+++++
$(x - x_1)(x - x_2)$	+++++	0	-----	+++++



a) Dacă $a > 0$, atunci $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$, pentru orice număr real $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ și $a(x - x_1)(x - x_2) < 0$, pentru orice număr real $x \in (x_1, x_2)$.

b) Dacă $a < 0$, atunci $a(x - x_1)(x - x_2) < 0$, pentru orice număr real $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ și $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$, pentru orice număr real $x \in (x_1, x_2)$.

Așadar, dacă $a > 0$, atunci $f(x) > 0$, pentru orice număr real $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ și $f(x) < 0$, pentru orice număr real $x \in (x_1, x_2)$, iar dacă $a < 0$, atunci $f(x) < 0$, pentru orice număr real $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ și $f(x) > 0$, pentru orice număr real $x \in (x_1, x_2)$.

Putem enunța regula astfel: **Dacă $\Delta > 0$ și $x_1 < x_2$, atunci $f(x)$ are semnul lui a pe intervalele $(-\infty, x_1)$ și $(x_2, +\infty)$ și semn contrar semnului lui a pe intervalul (x_1, x_2) .**

În tabelul următor este sintetizat acest rezultat:

$\Delta > 0$	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
	$f(x)$	semnul lui a	0	semn contrar semnului lui a	0

Interpretarea geometrică a semnului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) cu $\Delta > 0$, este ilustrată în figurile 5 și 6. În acest caz, parabola intersectează axa Ox în două puncte.

OBSERVAȚIE.

Semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) poate fi interpretat geometric observând poziția parabolei față de axa Ox :

- dacă parabola se află deasupra axei Ox , atunci $f(x) > 0$, pentru orice număr real x ;

- dacă parabola se află sub axa Ox , atunci $f(x) < 0$, pentru orice număr real x .

EXEMPLE:

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 \Rightarrow$ Ecuația $x^2 - 2x + 2 = 0$ nu are soluții.

Tabelul semnului funcției f este următorul:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+++++	+++++

Studiind tabelul semnului funcției f , observăm că $f(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Această informație se deduce și din reprezentarea grafică a funcției f (figura 7), unde observăm că parabola este situată deasupra axei Ox .

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x - 4$.

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 0 \Rightarrow$ Ecuația $-x^2 + 4x - 4 = 0$ are soluția dublă $x_1 = x_2 = 2$.

Tabelul semnului funcției f este următorul:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	-----	0	-----

Studiind tabelul semnului funcției f , observăm că $f(x) < 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

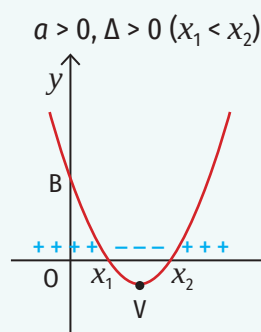


Figura 5

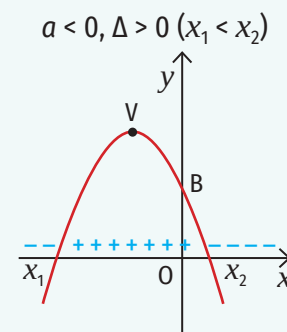


Figura 6

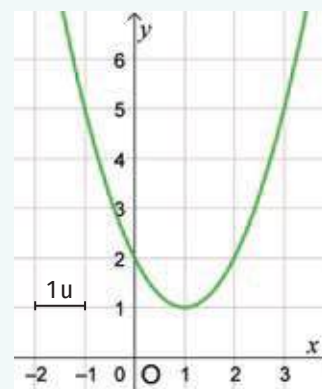


Figura 7

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 \Rightarrow$ Ecuația $2x^2 - 5x + 2 = 0$ are soluțiile $x_1 = \frac{1}{2}$ și $x_2 = 2$.

Tabelul semnelui funcției f este următorul:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$f(x)$	++++	0	-----	0	++++

Studiind tabelul semnelui funcției f , observăm că $f(x) < 0$, pentru orice $x \in (\frac{1}{2}, 1)$, și $f(x) > 0$, pentru orice $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$.

Inecuații de gradul al doilea studiate pe mulțimea $\mathbb{R}$ sau pe intervale de numere reale; interpretare geometrică (proiecții ale unor porțiuni de parabolă pe axe)

Inecuațiile de forma $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, unde a, b, c sunt numere reale și $a \neq 0$, se numesc **inecuații de gradul al doilea**. Rezolvarea acestora presupune studierea semnelui funcției de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Soluțiile inecuației $ax^2 + bx + c < 0$ se obțin proiectând pe axa Ox punctele de pe porțiunea din reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$), care se află sub axa Ox (figura 8).

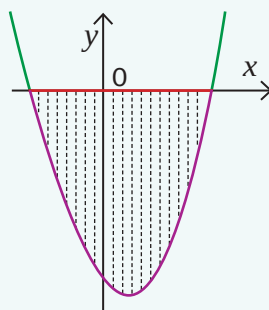


Figura 8

Soluțiile inecuației $ax^2 + bx + c > 0$ se obțin proiectând pe axa Ox punctele de pe porțiunea din reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$), care se află deasupra axei Ox (figura 9).

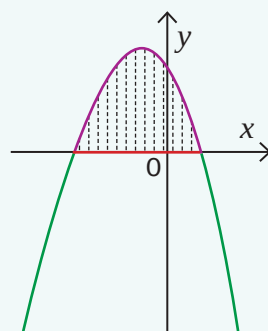


Figura 9

EXEMPLE:

1. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $x^2 - x - 2 < 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 \Rightarrow$ Ecuația $x^2 - x - 2 = 0$ are soluțiile $x_1 = -1$ și $x_2 = 2$.

Tabelul semnelui funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x - 2$, este următorul:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f(x)$	++++	0	-----	0	++++

Studiind tabelul semnelui funcției f , observăm că mulțimea soluțiilor inecuației $x^2 - x - 2 < 0$ este $(-1, 2)$.

Acest rezultat se observă și pe reprezentarea grafică a funcției f (figura 10).

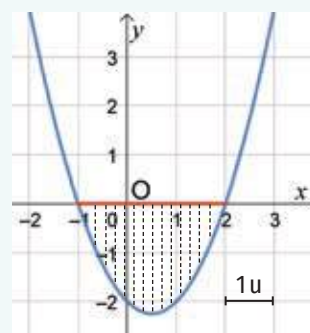


Figura 10

2. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $-x^2 + x - 4 \leq 0$.

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = -15 \Rightarrow$ Ecuația $-x^2 + x - 4 = 0$ nu are soluții.

Tabelul semnelui funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + x - 4$, este următorul:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	-----	-----

Studiind tabelul semnelui funcției f , observăm că mulțimea soluțiilor inecuației $-x^2 + x - 4 \leq 0$ este $\mathbb{R}$.

3. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $4x^2 - 4x + 1 < 0$.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Ecuația $4x^2 - 4x + 1 = 0$ are soluția dublă $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.

Tabelul semnelui funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^2 - 4x + 1$, este următorul:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	++++	0	++++

Studiind tabelul semnelui funcției f , observăm că inecuația $4x^2 - 4x + 1 < 0$ nu are soluții, deci mulțimea soluțiilor este $\emptyset$.

Exerciții rezolvate



1. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $\frac{x^2 - 2x - 8}{-x^2 - 3x + 4} \leq 0$; b) $\frac{4x^2 - 9x + 3}{x^2 - 2x + 1} > 3$.

Rezolvare:

a) Rezolvăm în mulțimea numerelor reale ecuațiile $x^2 - 2x - 8 = 0$ și $-x^2 - 3x + 4 = 0$ și obținem:

$x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 4\}$;

$-x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-4, 1\}$.

Realizăm următorul tabel de semn:

x	$-\infty$	-4	-2	1	4	$+\infty$
$x^2 - 2x - 8$	+++++	0	-----	0	+++++	
$-x^2 - 3x + 4$	-----	0	+++++	0	-----	
$\frac{x^2 - 2x - 8}{-x^2 - 3x + 4}$	-----	/++++	0	-----	/++++	0

Obținem: $\frac{x^2 - 2x - 8}{-x^2 - 3x + 4} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4) \cup [-2, 1) \cup [4, +\infty)$.

b) $\frac{4x^2 - 9x + 3}{x^2 - 2x + 1} > 3 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 9x + 3}{x^2 - 2x + 1} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} > 0$

Rezolvăm în mulțimea numerelor reale ecuațiile $x^2 - 3x = 0$ și $x^2 - 2x + 1 = 0$ și obținem:

$x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 3\}$;

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Realizăm următorul tabel de semn:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$x^2 - 3x$	+++++	0	-----	0	+++++
$x^2 - 2x + 1$	+++++	0	+++++	+++++	
$\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1}$	+++++	0	-----	0	+++++

Obținem: $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

Așadar, soluția inecuației $\frac{4x^2 - 9x + 3}{x^2 - 2x + 1} > 3$ este $x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - (m - 2)x - m + 2$, unde m este număr real. Determină valorile numărului real m pentru care reprezentarea grafică a funcției f este situată deasupra axei Ox .

Rezolvare:

Reprezentarea grafică a funcției f este situată deasupra axei Ox dacă și numai dacă $\Delta < 0$ și $a > 0$.

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow [-(m-2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m+2) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0$$

Rezolvăm ecuația $m^2 - 4 = 0$ și obținem $m \in \{-2, 2\}$.

Realizăm următorul tabel de semn:

m	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$m^2 - 4$	+++++	0	-----0	+++++

Obtinem: $m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow m \in (-2, 2)$.

- 3.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + (a+2)x + a + 1$, unde a este număr real. Determină numărul real a pentru care $f(x) > 0$, pentru orice număr real x .

Rezolvare:

Cum $a > 0$, $f(x) > 0$ pentru orice număr real x dacă și numai dacă $\Delta < 0$.

$$\Delta = (a + 2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a + 1) = a^2 + 4a + 4 - 8a - 8 = a^2 - 4a - 4$$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a - 4 < 0$$

Rezolvăm ecuația $a^2 - 4a - 4 = 0$ și obținem $a \in \{2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}\}$.

Realizăm următorul tabel de semn:

a	$-\infty$	$2-2\sqrt{2}$	$2+2\sqrt{2}$	$+\infty$
a^2-4a-4	++++++	0	-----0	++++++

Obtinem: $a^2 - 4a - 4 < 0 \Leftrightarrow a \in (2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$.

Aplic

- 1.** Determină semnul funcției f .

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 4;$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 2x + 1$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^2 - 5x + 1$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x^2 + 3x$;

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x$;

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 4$.

2. Determină semnul funcției f .

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - x + 2)(-x^2 - 4x)$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + x)(x^2 - 3x + 2);$

c) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 2};$

$$\text{d) } f: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - x}.$$

- 3.** Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele inecuații:

a) $x^2 - 5x + 6 > 0$;

b) $-x^2 + 4x - 3 \leq 0$;

c) $x^2 + 2x + 5 > 0$;

d) $-x^2 + 4x - 4 \leq 0$;

e) $x^2 \geq 9$;

f) $-x^2 + 4x \leq x$;

g) $x^2 + 3x + 6 \geq x - 1$;

h) $-x^2 + 2x < x - 2$;

i) $x^2 + 1 \geq 2x^2 - 3x$.

4. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele inecuații:

- a) $(x^2 + 1)(x + 4) > 0$; c) $(x - 1)(x^2 - x + 1) < 0$;
b) $(x^2 + 2x)(x^2 - 1) \leq 0$; d) $(x^2 - x - 2)(x^2 + x - 6) \geq 0$.

5. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele inecuații:

- a) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 4x - 3} > 0$; c) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x + 1} \leq 0$; e) $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x - 3} \geq 2$; g) $\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 - 3x + 2} \leq 3$;
b) $\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1} \geq 0$; d) $\frac{x^2 + 6x - 8}{x^2 - 2x - 8} < 0$; f) $\frac{-x^2 + 5x + 1}{x^2 - 2x + 3} < -1$; h) $\frac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 + x - 6} > -2$.

6. Determină valorile numărului real m pentru care ecuația $mx^2 - (2m + 1)x + 2m + 3 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, are două soluții distincte.

7. Determină valorile numărului real $a \neq -1$ pentru care ecuația $(a + 1)x^2 - (a + 1)x + 2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, nu are soluție.

8. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (m - 1)x^2 - (m - 2)x + m$, unde m este număr real, $m \neq 1$. Determină valorile numărului real m pentru care reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte.

9. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (m + 2)x^2 + 2(m + 1)x + m + 1$, unde m este număr real, $m \neq -2$. Determină valorile numărului real m pentru care reprezentarea grafică a funcției f nu intersectează axa Ox în două puncte distincte.

10. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2(m - 2)x - 4m + 5$, unde m este număr real. Determină valorile numărului real m pentru care $f(x) \geq 0$, pentru orice număr real x .

11. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2(m - 2)x + 1$, unde m este număr real. Determină valorile numărului real m pentru care $f(x) > 0$, pentru orice număr real x .

12. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + (m + 2)x + m - 1$, unde m este număr real. Determină valorile numărului real m pentru care $f(x) < 0$, pentru orice număr real x .

13. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 - (m + 1)x - m - 2$, unde m este număr real. Determină valorile numărului real m pentru care $f(x) \leq 0$, pentru orice număr real x .

14. Determină valorile numărului real m pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (m^2 + 1)x + m$, este crescătoare pe intervalul $[1, +\infty)$.

15. Determină valorile numărului real m pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + (2m^2 - 5m + 6)x + 4m - 2$ este descrescătoare pe intervalul $[2, +\infty)$.

16. Determină valorile numărului real nenul m pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 + (m^2 - 2m - 1)x + 1$, este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 1]$.

17. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + (m - 1)x - m - 2$, unde m este număr real. Determină valorile numărului real m pentru care reprezentarea grafică a funcției f este situată sub axa Ox .

18. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (m - 3)x^2 + 2mx + m - 2$, unde m este număr real, $m \neq 3$. Determină valorile numărului real m pentru care reprezentarea grafică a funcției f este situată sub axa Ox .

19. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 5$, unde m este număr real. Determină valorile numărului real m pentru care reprezentarea grafică a funcției f este situată deasupra axei Ox .

20. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - 2(m-1)x + m - 1$, unde m este număr real nenul. Determină valorile numărului real m pentru care reprezentarea grafică a funcției f este situată deasupra axei Ox .
21. Înălțimea la care se află o minge față de sol (exprimată în metri) în funcție de timpul de la lansare (exprimat în secunde) este descrisă de funcția $h: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(t) = -5t^2 + 20t$.
- Determină intervalul de timp dintre lansare și revenirea mingii la sol.
 - Determină intervalul de timp în care mingea se află în aer la o înălțime mai mare de 15 metri.
 - Determină intervalul de timp în care mingea urcă și intervalul în care aceasta coboară.
 - Care este înălțimea maximă atinsă de minge?
 - Precizează valorile înălțimii mingii de la lansare până la momentul revenirii la sol.
 - Determină momentul de timp în care mingea revine la sol după lansare. Ce semnifică acest punct pe reprezentarea grafică a funcției?
22. Dependența dintre profitul lunar al unei companii A care produce tablete (exprimat în mii de euro) și prețul de vânzare al unei tablete (exprimat în sute de euro) este descrisă de funcția $P: [2, 8] \rightarrow \mathbb{R}$, $P(x) = -2x^2 + 20x - 32$.
- Determină valorile prețului unei tablete pentru care afacerea este profitabilă.
 - Determină valorile prețului unei tablete pentru care profitul este mai mare de 10 000 de euro.
 - Determină valorile prețului unei tablete pentru care profitul este mai mic de 1 600 de euro.
 - Până la ce preț de vânzare profitul este în creștere și de la ce punct creșterea prețului începe să scadă profitul?
 - Determină prețul de vânzare care maximizează profitul și precizează valoarea acestui profit maxim.
 - Profitul unei alte companii B (exprimat în mii de euro), care produce tablete, depinde de prețul de vânzare al unei tablete (exprimat în sute de euro), conform funcției $Q: [2, 8] \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = -x^2 + 10x - 8$. Determină valorile prețului pentru care compania A are profit mai mare decât compania B.



2.4. Relațiile lui Viète

Descopăr



Se consideră ecuațiile: $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x^2 - 6x + 7 = 0$, $-2x^2 + 7x - 3 = 0$, $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

- Rezolvă ecuațiile în mulțimea numerelor reale.
- Pentru fiecare dintre cele patru ecuații, calculează suma și produsul soluțiilor și apoi determină o relație între acestea și coeficienții ecuației.
- Verifică dacă relația găsită la punctul b) este adevărată pentru orice ecuație de gradul al doilea care are soluții.



Învăț

Fie ecuația de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$).

- Dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația are două soluții distincte: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ și $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Calculăm suma și produsul acestora:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

- Dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația are două soluții egale, $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Calculăm suma și produsul acestora:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a} + -\frac{b}{2a} = -\frac{b-b}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{b}{2a} \cdot -\frac{b}{2a} = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Relațiile $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ și $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ se numesc **relațiile lui Viète**.

Formarea ecuației de gradul al doilea când se cunosc soluțiile acesteia

Fie ecuația de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) cu $\Delta \geq 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

Așadar, o ecuație de gradul al doilea cu soluțiile x_1 și x_2 este:

$$x^2 - Sx + P = 0, \text{ unde } S = x_1 + x_2 \text{ și } P = x_1 \cdot x_2.$$

EXEMPLU:

Pentru a scrie o ecuație de gradul al doilea care are soluțiile $x_1 = 5 - 3\sqrt{2}$ și $x_2 = 5 + 3\sqrt{2}$, calculăm suma și produsul soluțiilor acesteia:

$$\left. \begin{aligned} S &= x_1 + x_2 = 5 - 3\sqrt{2} + 5 + 3\sqrt{2} = 10, \\ P &= x_1 \cdot x_2 = (5 - 3\sqrt{2})(5 + 3\sqrt{2}) = 25 - 18 = 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{O ecuație de gradul al doilea care are soluțiile } x_1 = 5 - 3\sqrt{2} \text{ și } x_2 = 5 + 3\sqrt{2} \text{ este } x^2 - 10x + 7 = 0.$$

OBSERVAȚIE.

Cu ajutorul relațiilor lui Viète se poate preciza semnul soluțiilor unei ecuații de gradul al doilea (cu $\Delta \geq 0$):

$P > 0$	$S > 0$
$x_1 > 0, x_2 > 0$	
$P > 0$	$S < 0$
$x_1 < 0, x_2 < 0$	
$P < 0$	$S > 0$
$x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 < x_2 $	
$P < 0$	$S < 0$
$x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 > x_2 $	
$P < 0$	$S = 0$
$x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 = x_2 $	
$P = 0$	$S > 0$
$x_1 = 0, x_2 > 0$	
$P = 0$	$S < 0$
$x_1 = 0, x_2 < 0$	
$P = 0$	$S = 0$
$x_1 = x_2 = 0$	

Exerciții rezolvate

1. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 2x - 5 = 0$. Calculează:

a) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$;

d) $x_1^4 + x_2^4$;

b) $\frac{x_1 + 3x_2}{3x_1 + x_2} + \frac{x_2 + 3x_1}{3x_2 + x_1}$;

e) $\frac{2x_1^3 + x_1^2 - 2x_1 + 3}{3x_1^2 + 2x_1 + 3} + \frac{2x_2^3 + x_2^2 - 2x_2 + 3}{3x_2^2 + 2x_2 + 3}$.

c) $x_1^3 + x_2^3$;

Rezolvare:

Scriem relațiile lui Viète: $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 \cdot x_2 = -5$.

a) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{2^2 - 2 \cdot (-5)}{-5} = -\frac{14}{5}$;

b) $\frac{x_1 + 3x_2}{3x_1 + x_2} + \frac{x_2 + 3x_1}{3x_2 + x_1} = \frac{x_1 + x_2 + 2x_2}{2x_1 + x_1 + x_2} + \frac{x_2 + x_1 + 2x_1}{2x_2 + x_2 + x_1} = \frac{2 + 2x_2}{2x_1 + 2} + \frac{2 + 2x_1}{2x_2 + 2} =$
 $= \frac{1 + x_2}{x_1 + 1} + \frac{1 + x_1}{x_2 + 1} = \frac{(1 + x_2)^2 + (1 + x_1)^2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \frac{(x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1 + x_2) + 2}{x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1} = \frac{14 + 2 \cdot 2 + 2}{-5 + 2 + 1} = -10$;

c) Metoda 1:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = 2(14 + 5) = 38.$$

Metoda 2:

Cum x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 2x - 5 = 0$ rezultă că $x_1^2 - 2x_1 - 5 = 0$ (1) și $x_2^2 - 2x_2 - 5 = 0$ (2). Înmulțind ambii membri ai egalității (1) cu x_1 și ambii membri ai egalității (2) cu x_2 , obținem:

$$x_1^3 - 2x_1^2 - 5x_1 = 0 \Rightarrow x_1^3 = 2x_1^2 + 5x_1 \quad (3)$$

$$x_2^3 - 2x_2^2 - 5x_2 = 0 \Rightarrow x_2^3 = 2x_2^2 + 5x_2 \quad (4)$$

Prin adunarea membrilor egalităților (3) și (4) obținem:

$$x_1^3 + x_2^3 = 2x_1^2 + 5x_1 + 2x_2^2 + 5x_2 \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 = 2(x_1^2 + x_2^2) + 5(x_1 + x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 = 2 \cdot 14 + 5 \cdot 2 = 38.$$

d) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = 14^2 - 2(-5)^2 = 146$;

e) Din relația (1) rezultă că $x_1^2 = 2x_1 + 5$. (5)

Folosind relațiile (3) și (5) obținem:

$$2x_1^3 + x_1^2 - 2x_1 + 3 = 2(2x_1^2 + 5x_1) + 2x_1 + 5 - 2x_1 + 3 = 4x_1^2 + 10x_1 + 8 =$$

$$= 4(2x_1 + 5) + 10x_1 + 8 = 18x_1 + 28;$$

$$3x_1^2 + 2x_1 + 3 = 3(2x_1 + 5) + 2x_1 + 3 = 8x_1 + 18;$$

$$\frac{2x_1^3 + x_1^2 - 2x_1 + 3}{3x_1^2 + 2x_1 + 3} = \frac{18x_1 + 28}{8x_1 + 18} = \frac{9x_1 + 14}{4x_1 + 9}.$$

În mod asemănător, obținem $\frac{2x_2^3 + x_2^2 - 2x_2 + 3}{3x_2^2 + 2x_2 + 3} = \frac{9x_2 + 14}{4x_2 + 9}$. Atunci:

$$\frac{2x_1^3 + x_1^2 - 2x_1 + 3}{3x_1^2 + 2x_1 + 3} + \frac{2x_2^3 + x_2^2 - 2x_2 + 3}{3x_2^2 + 2x_2 + 3} = \frac{9x_1 + 14}{4x_1 + 9} + \frac{9x_2 + 14}{4x_2 + 9} =$$

$$= \frac{72x_1 x_2 + 137(x_1 + x_2) + 252}{16x_1 x_2 + 36(x_1 + x_2) + 81} = \frac{72 \cdot (-5) + 137 \cdot 2 + 252}{16 \cdot (-5) + 36 \cdot 2 + 81} = \frac{166}{73}.$$

2. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $2x^2 - 4x + 1 = 0$ și $S_n = x_1^n + x_2^n$, unde n este număr natural nenul.

- a) Demonstrează că $2S_3 - 4S_2 + S_1 = 0$.
 b) Demonstrează că $2S_n - 4S_{n-1} + S_{n-2} = 0$, pentru orice număr natural $n \geq 3$.
 c) Scrie o ecuație de gradul al doilea care are soluțiile $y_1 = x_1^5$ și $y_2 = x_2^5$.

Rezolvare:

a) Cum x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $2x^2 - 4x + 1 = 0$, rezultă că:

$$2x_1^2 - 4x_1 + 1 = 0 \mid \cdot x_1 \Rightarrow 2x_1^3 - 4x_1^2 + x_1 = 0; (6)$$

$$2x_2^2 - 4x_2 + 1 = 0 \mid \cdot x_2 \Rightarrow 2x_2^3 - 4x_2^2 + x_2 = 0. (7)$$

Prin adunarea egalităților (6) și (7) obținem $2(x_1^3 + x_2^3) - 4(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2) = 0$, de unde rezultă $2S_3 - 4S_2 + S_1 = 0$.

b) Cum x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $2x^2 - 4x + 1 = 0$, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, obținem:

$$2x_1^2 - 4x_1 + 1 = 0 \mid \cdot x_1^{n-2} \Rightarrow 2x_1^n - 4x_1^{n-1} + x_1^{n-2} = 0; (8)$$

$$2x_2^2 - 4x_2 + 1 = 0 \mid \cdot x_2^{n-2} \Rightarrow 2x_2^n - 4x_2^{n-1} + x_2^{n-2} = 0. (9)$$

Prin adunarea egalităților (8) și (9) obținem

$$2(x_1^n + x_2^n) - 4(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) + (x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) = 0, \text{ de unde rezultă } 2S_n - 4S_{n-1} + S_{n-2} = 0 \text{ pentru } n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

c) O ecuație de gradul al doilea care are soluțiile $y_1 = x_1^5$ și $y_2 = x_2^5$ este $y^2 - Sy + P = 0$, unde $S = y_1 + y_2$ și $P = y_1 \cdot y_2$. Observăm că $S = y_1 + y_2 = x_1^5 + x_2^5 = S_5$. Pentru a calcula S_5 , vom determina S_1 și S_2 , iar apoi vom determina S_3 și S_4 folosind relația $2S_n - 4S_{n-1} + S_{n-2} = 0$, pentru orice număr natural $n \geq 3$.

Relațiile lui Viète pentru ecuația $2x^2 - 4x + 1 = 0$ sunt: $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$, deci $S_1 = 2$.

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3$$

$$2S_3 - 4S_2 + S_1 = 0 \Rightarrow S_3 = 2S_2 - \frac{1}{2}S_1 = 6 - 1 = 5$$

$$2S_4 - 4S_3 + S_2 = 0 \Rightarrow S_4 = 2S_3 - \frac{1}{2}S_2 = \frac{17}{2}$$

$$2S_5 - 4S_4 + S_3 = 0 \Rightarrow S_5 = 2S_4 - \frac{1}{2}S_3 = \frac{29}{2}$$

$$P = y_1 y_2 = x_1^5 x_2^5 = (x_1 x_2)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

O ecuație de gradul al doilea care are soluțiile $y_1 = x_1^5$ și $y_2 = x_2^5$ este $y^2 - \frac{29}{2}y + \frac{1}{32} = 0$, care este echivalentă cu ecuația $32y^2 - 464y + 1 = 0$.

Aplic

1. Scrie relațiile lui Viète pentru următoarele ecuații:

- a) $x^2 - 5x + 1 = 0$; c) $(x + 1)^2 - 2(x - 1) = 2$;
 b) $x^2 - 3x = 0$; d) $(2x - 1)^2 - (x - 2)(2x + 1) - 3 = x + 4$.

2. Scrie o ecuație de gradul al doilea care are soluțiile x_1 și x_2 .

- a) $x_1 = -2$, $x_2 = 3$; c) $x_1 = \sqrt{5} - 2$, $x_2 = \sqrt{5} + 2$; e) $x_1 = 0$, $x_2 = -5$;
 b) $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$; d) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -4$; f) $x_1 = x_2 = -\frac{2}{3}$.

3. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 2x - 1 = 0$. Calculează fără a rezolva ecuația:

- a) $x_1 + x_2 - x_1x_2$; d) $\frac{3}{x_1 - 2} + \frac{3}{x_2 - 2}$; g) $\frac{x_1 - 1}{x_2 + 2} + \frac{x_2 - 1}{x_1 + 2}$;
 b) $2x_1 + 3x_1x_2 + 2x_2$; e) $x_1^2 + x_2^2$; h) $x_1^3 + x_2^3$;
 c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; f) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; i) $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$.

4. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $2x^2 - 4x + 1 = 0$. Calculează:

- a) $\frac{x_1 + x_2}{2x_1x_2}$; c) $\frac{2x_1}{x_2} + \frac{2x_2}{x_1}$; e) $\frac{x_1 + 1}{x_2 + 1} + \frac{x_2 + 1}{x_1 + 1}$;
 b) $\frac{4x_1x_2}{-3x_1 - 3x_2}$; d) $\frac{4}{2x_1 + 3} + \frac{4}{2x_2 + 3}$; f) $\frac{x_1 + 3x_2}{3x_1 + x_2} + \frac{x_2 + 3x_1}{3x_2 + x_1}$.

5. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 8x + 4 = 0$. Calculează:

- a) $x_1^2 + x_2^2$; b) $x_1^3 + x_2^3$; c) $x_1^4 + x_2^4$; d) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$.

6. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 3x + a = 0$, unde a este număr real, $a < \frac{9}{4}$.
 Determină valorile numărului real a pentru care:

- a) $x_1^2 + x_2^2 = 3$; d) $x_1^3 + x_2^3 = 3$; g) $\frac{3}{x_1 + 2} + \frac{3}{x_2 + 2} = 6$;
 b) $x_1 + x_2 < x_1x_2$; e) $x_1^4 + x_2^4 = 161$; h) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$;
 c) $\frac{x_1x_2}{-2x_1 - 2x_2} < 1$; f) $x_1^2 - x_2^2 = 12$; i) $\frac{x_1 + 2x_2}{2x_1 + x_2} + \frac{x_2 + 2x_1}{2x_2 + x_1} = 4$.

7. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $2x^2 - (m + 1)x - 3 = 0$, unde m este număr real.
 Determină numărul real m pentru care:

- a) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -2$; c) $(x_1 + 2x_2)^2 + (x_2 + 2x_1)^2 = 8$.
 b) $(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 2)^2 = 11$;

8. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 4x + 2 = 0$. Calculează:

- a) $\frac{1}{x_1^2 + x_1 + 1} + \frac{1}{x_2^2 + x_2 + 1}$; d) $\frac{x_1^3 + x_1^2 + 2x_1 - 1}{x_1 - 1} + \frac{x_2^3 + x_2^2 + 2x_2 - 1}{x_2 - 1}$;
 b) $\frac{x_1^2 + 2x_1}{x_1 - 2} + \frac{x_2^2 + 2x_2}{x_2 - 2}$; e) $\frac{3x_1^3 + x_1^2 - 4x_1 + 3}{2x_1^2 + x_1 + 4} + \frac{3x_2^3 + x_2^2 - 4x_2 + 3}{2x_2^2 + x_2 + 4}$;
 c) $\frac{x_1^2 + 3x_1 + 4}{x_1^2 - 3x_1 + 2} + \frac{x_2^2 + 3x_2 + 4}{x_2^2 - 3x_2 + 2}$; f) $\frac{x_1^4 + x_1^3 - x_1 + 2}{x_1^3 + 2x_1 + 1} + \frac{x_2^4 + x_2^3 - x_2 + 2}{x_2^3 + 2x_2 + 1}$.

9. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $2x^2 - 5x + 3 = 0$ și $S_n = x_1^n + x_2^n$, unde n este număr natural nenul.

- a) Calculează S_1, S_2, S_3, S_4 și S_5 .
 b) Demonstrează că $2S_n - 5S_{n-1} + 3S_{n-2} = 0$, pentru orice număr natural $n \geq 3$.

10. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $-x^2 + 3x + 3 = 0$. Scrie o ecuație de gradul al doilea care are soluțiile y_1 și y_2 , știind că:

- a) $y_1 = x_1 + 2x_2, y_2 = x_2 + 2x_1$; d) $y_1 = \frac{x_2 + 3}{2x_1 + 1}, y_2 = \frac{x_1 + 3}{2x_2 + 1}$;
 b) $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$; e) $y_1 = x_1^3 + \frac{1}{x_1^3}, y_2 = x_2^3 + \frac{1}{x_2^3}$;
 c) $y_1 = \frac{x_1}{2 + x_2}, y_2 = \frac{x_2}{2 + x_1}$; f) $y_1 = x_1^3 + x_1^4, y_2 = x_2^3 + x_2^4$.

2.5. Sisteme care conțin ecuații de gradul al doilea; interpretare geometrică

Descoperă

Un designer dorește să creeze un panou publicitar dreptunghiular a cărui suprafață are aria egală cu 12 m^2 . Pentru a putea fi montat pe un suport metalic existent, pătratul distanței dintre colțurile opuse ale panoului trebuie să fie 25 m^2 . Determină dimensiunile panoului.



Învăță

- Sisteme de ecuații forma (S) $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ y = a_2x^2 + b_2x + c_2 \end{cases}, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$

Evident că a_1 și b_1 nu sunt ambele nule.

Rezolvarea acestui tip de sisteme se face prin metoda substituției.

Dacă $b_1 = 0$, atunci prima ecuație a sistemului este $a_1x + c_1 = 0$, de unde rezultă $x = -\frac{c_1}{a_1}$. Înlocuind pe x în cea de-a doua ecuație, obținem y . Deci sistemul are o singură soluție.

Dacă $b_1 \neq 0$, atunci, din prima ecuație a sistemului obținem $y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}$. Înlocuind pe y în cea de-a doua

ecuație, obținem sistemul echivalent $\begin{cases} y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1} \\ a_2x^2 + \left(b_2 + \frac{a_1}{b_1}\right)x + \left(\frac{c_1}{b_1} + c_2\right) = 0 \end{cases}$, iar numărul de soluții ale

sistemului (S) este dat de numărul de soluții ale ecuației $a_2x^2 + \left(b_2 + \frac{a_1}{b_1}\right)x + \left(\frac{c_1}{b_1} + c_2\right) = 0$.

Cum, într-un sistem de axe ortogonale, reprezentarea grafică a mulțimii soluțiilor ecuației $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ($a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$) este o dreaptă d , iar reprezentarea grafică a mulțimii soluțiilor ecuației $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ ($a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$) este o parabolă $\mathcal{P}$, reprezentarea grafică a mulțimii soluțiilor sistemului (S) este formată din punctele de intersecție dintre dreapta d și parabola $\mathcal{P}$. Avem următoarele situații:

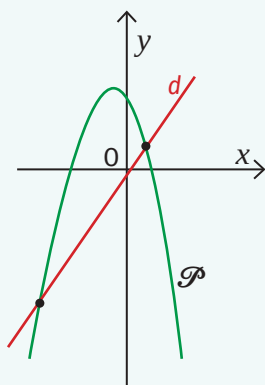


Figura 1

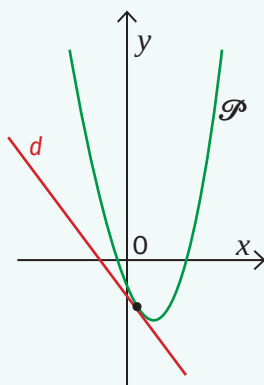


Figura 2

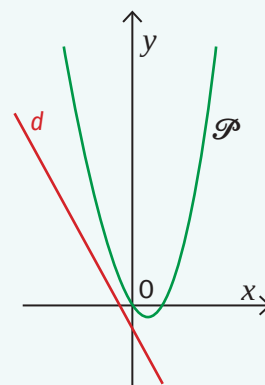


Figura 3

1. Dreapta d intersectează parabola $\mathcal{P}$ în două puncte distincte (dreapta d este secanta parabolei $\mathcal{P}$) dacă și numai dacă sistemul (S) are două soluții distincte (figura 1).

2. Dreapta d intersectează parabola $\mathcal{P}$ într-un singur punct (dreapta d este tangentă la parabola $\mathcal{P}$) dacă și numai dacă sistemul (S) are o singură soluție (figura 2 de la pagina anterioară).

3. Dreapta d nu intersectează parabola $\mathcal{P}$ (dreapta d este exterioră parabolei $\mathcal{P}$) dacă și numai dacă sistemul (S) nu are o nicio soluție (figura 3 de la pagina anterioară).

EXEMPLE:

1. Să rezolvăm și să interpretăm geometric sistemul de ecuații $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ y = x^2 + x - 1 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ y = x^2 + x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ x + 3 = x^2 + x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Ecuația $x^2 - 4 = 0$ are soluțiile $x_1 = -2$ și $x_2 = 2$. Atunci avem $y_1 = 1$ și $y_2 = 5$.

Mulțimea soluțiilor sistemului de ecuații este $\{(-2, 1), (2, 5)\}$.

Interpretare geometrică: Dreapta d din figura 4 este reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$, iar parabola $\mathcal{P}$ este reprezentarea grafică a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x - 1$. Dreapta d intersectează parabola $\mathcal{P}$ în punctele de coordonate $(-2, 1)$ și $(2, 5)$.

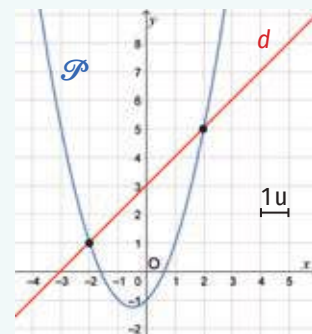


Figura 4

2. Să rezolvăm și să interpretăm geometric sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x - 1 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

Ecuația $x^2 - 2x + 1 = 0$ are soluția dublă $x_1 = x_2 = 1$. Atunci avem $y_1 = y_2 = 1$.

Mulțimea soluțiilor sistemului de ecuații este $\{(1, 1)\}$.

Interpretare geometrică: Dreapta d din figura 5 este reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, iar parabola $\mathcal{P}$ este reprezentarea grafică a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$. Dreapta d intersectează parabola $\mathcal{P}$ în punctul de coordonate $(1, 1)$.

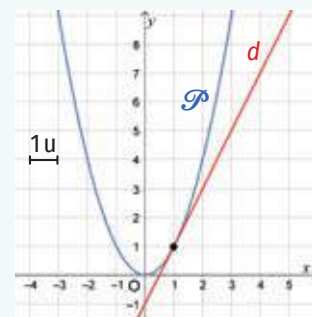


Figura 5

3. Să rezolvăm și să interpretăm geometric sistemul de ecuații $\begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ y = x^2 + 4 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ y = x^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 5 \\ x - 5 = x^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 5 \\ x^2 - x + 9 = 0 \end{cases}$$

Ecuația $x^2 - x + 9 = 0$ nu are soluție, deci mulțimea soluțiilor sistemului de ecuații este $\emptyset$.

Interpretare geometrică: Dreapta d din figura 6 este reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 5$, iar parabola $\mathcal{P}$ este reprezentarea grafică a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 4$. Dreapta d nu intersectează parabola $\mathcal{P}$.

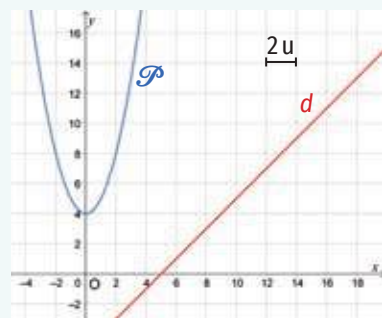


Figura 6

• Sisteme simetrice

Definiția 1. O ecuație cu necunoscutele x și y se numește simetrică dacă nu se modifică prin înlocuirea lui x cu y și a lui y cu x .

OBSERVAȚIE.

Dacă o ecuație simetrică admite soluția (x_0, y_0) , atunci admite și soluția (y_0, x_0) .

Definiția 2. Un sistem format din ecuații simetrice se numește sistem simetric.

În continuare vom prezenta rezolvarea unor tipuri speciale de sisteme simetrice.

- **Sisteme de ecuații de tipul**
$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$$

Rezolvarea sistemelor de tipul $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ se face prin rezolvarea ecuației de gradul al doilea $t^2 - St + P = 0$.

EXEMPLU:

Să rezolvăm sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -10 \end{cases}$.

Scriem ecuația $t^2 - St + P = 0$, adică $t^2 + 3t - 10 = 0$.

Rezolvăm ecuația $t^2 + 3t - 10 = 0$ și obținem $t_1 = -5$ și $t_2 = 2$, de unde rezultă că sistemul are soluțiile $(-5, 2)$ și $(2, -5)$.

- **Sisteme de ecuații de tipul**
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ xy = b \end{cases}, a, b \in \mathbb{R}$$

Pentru rezolvarea sistemelor de tipul $\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ xy = b \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$, se introduc două necunoscute noi, $S = x + y$ și

$P = xy$, și se exprimă ecuațiile sistemului în funcție de aceste necunoscute. Sistemul devine $\begin{cases} S^2 - 2P = a \\ P = b \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

EXEMPLU: 

Să rezolvăm sistemul de ecuații $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}$.

Notăm $S = x + y$ și $P = xy$. Sistemul devine $\begin{cases} S^2 - 2P = 5 \\ P = -2 \end{cases}$, de unde rezultă $S = -1$ și $P = -2$ sau $S = 1$ și $P = -2$.

Pentru $S = 1$ și $P = -2$, rezolvăm sistemul $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$. În acest sens, scriem și rezolvăm ecuația $t^2 + t - 2 = 0$. Obținem $t_1 = -2$ și $t_2 = 1$, de unde rezultă că sistemul are soluțiile $(-2, 1)$ și $(1, -2)$.

Pentru $S = 1$ și $P = -2$, rezolvăm sistemul $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$. În acest sens, scriem și rezolvăm ecuația $t^2 - t - 2 = 0$. Obținem $t_1 = 2$ și $t_2 = -1$, de unde rezultă că sistemul are soluțiile $(2, -1)$ și $(-1, 2)$.

Așadar, soluțiile sistemului de ecuații $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}$ sunt: $(-2, 1)$, $(1, -2)$, $(2, -1)$ și $(-1, 2)$.

Pentru **rezolvarea unui sistem simetric** se introduc două necunoscute noi, $S = x + y$ și $P = xy$, și se exprimă ecuațiile sistemului în funcție de aceste necunoscute.

EXEMPLU:

Să rezolvăm sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$.

Prin introducerea necunoscutelor noi, $S = x + y$ și $P = xy$, sistemul devine $\begin{cases} S + P = 11 \\ S^2 - 2P = 13 \end{cases}$.

$$\begin{cases} S + P = 11 \\ S^2 - 2P = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 11 - S \\ S^2 - 2(11 - S) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 11 - S \\ S^2 + 2S - 22 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 11 - S \\ S^2 + 2S - 35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 11 - S \\ S \in \{-7, 5\} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} P = 18 \\ S = -7 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} P = 6 \\ S = 5 \end{cases}.$$

Dacă $S = -7$ și $P = 18$, rezolvăm sistemul $\begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 18 \end{cases}$. În acest sens, scriem și rezolvăm ecuația $t^2 + 7t + 18 = 0$, care nu are soluție.

Dacă $S = 5$ și $P = 6$, rezolvăm sistemul $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$. În acest sens, scriem și rezolvăm ecuația $t^2 - 5t + 6 = 0$.

Obținem $t_1 = 2$ și $t_2 = 3$, de unde rezultă că sistemul are soluțiile $(2, 3)$ și $(3, 2)$.

Așadar, sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$ are soluțiile $(2, 3)$ și $(3, 2)$.

• **Sisteme omogene de forma** $\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ mx^2 + nxy + py^2 = q \end{cases}$, $a, b, c, d, m, n, p, q \in \mathbb{R}^*$

Pentru rezolvarea acestui tip de sisteme, se disting mai multe metode, în funcție de natura termenilor liberi (d și q).

I. Dacă $d = 0$ și $q = 0$, atunci sistemul admite soluția $(0, 0)$. Dacă $x \neq 0$, împărțim ambii membri ai uneia dintre ecuații la x^2 și, notând $\frac{y}{x} = t$, obținem o ecuație de gradul al doilea. Dacă aceasta are soluțiile t_1 și t_2 , în cealaltă ecuație a sistemului înlocuim y , pe rând, cu t_1x și t_2x și determinăm y în fiecare caz.

EXEMPLU:

Să rezolvăm sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x^2 - 4xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + xy - 2y^2 = 0 \end{cases}$.

Sistemul admite soluția $(0, 0)$. Fie $x \neq 0$. Împărțim ambii membri ai primei ecuații la x^2 și obținem $2 - 4 \cdot \frac{y}{x} + 2 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$. Notând $\frac{y}{x} = t$, obținem ecuația $2 - 4t + 2t^2 = 0$, care are soluția $t = 1$.

Dacă $\frac{y}{x} = 1$, atunci $y = x$. Înlocuind în a doua ecuație a sistemului, obținem ecuația $x^2 + x^2 - 2x^2 = 0$, care are ca soluție orice număr real. În acest caz, sistemul are soluții de forma (k, k) , unde $k \in \mathbb{R}$.

II. Dacă $d \neq 0$ și $q = 0$, sistemul nu are soluția $(0, 0)$. Împărțim ambii membri ai primei ecuații la x^2 și, notând $\frac{y}{x} = t$ obținem o ecuație de gradul al doilea. Dacă aceasta are soluțiile t_1 și t_2 , în cealaltă ecuație a sistemului înlocuim y , pe rând, cu t_1x și t_2x și determinăm y .

EXEMPLU:

Să rezolvăm sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$.

Sistemul nu admite soluția $(0, 0)$. Împărțim ambii membri ai primei ecuații la x^2 și obținem $3 - 4 \cdot \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$. Notând $\frac{y}{x} = t$, obținem ecuația $3 - 4t + t^2 = 0$, care are soluțiile $t_1 = 1$ și $t_2 = 3$.

Dacă $\frac{y}{x} = 1$, atunci $y = x$. Înlocuind în a doua ecuație a sistemului obținem ecuația $x^2 + 2x^2 = 12$, care are soluțiile $x_1 = -2$ și $x_2 = 2$. Pentru $x_1 = -2$ obținem $y_1 = -2$, iar pentru $x_2 = 2$ obținem $y_2 = 2$. În acest caz, sistemul are soluțiile $(-2, -2)$ și $(2, 2)$.

Dacă $\frac{y}{x} = 3$, atunci $y = 3x$. Înlocuind în a doua ecuație a sistemului, obținem ecuația $x^2 + 18x^2 = 12$, care are soluțiile $x_1 = -\frac{2\sqrt{57}}{19}$ și $x_2 = \frac{2\sqrt{57}}{19}$. Pentru $x_1 = -\frac{2\sqrt{57}}{19}$ obținem $y_1 = -\frac{6\sqrt{57}}{19}$, iar pentru $x_2 = \frac{2\sqrt{57}}{19}$ obținem $y_2 = \frac{6\sqrt{57}}{19}$. În acest caz, sistemul de ecuații are soluțiile $\left(-\frac{2\sqrt{57}}{19}, -\frac{6\sqrt{57}}{19}\right)$ și $\left(\frac{2\sqrt{57}}{19}, \frac{6\sqrt{57}}{19}\right)$.

Așadar, sistemul de ecuații are soluțiile: $(-2, -2)$, $(2, 2)$, $\left(-\frac{2\sqrt{57}}{19}, -\frac{6\sqrt{57}}{19}\right)$ și $\left(\frac{2\sqrt{57}}{19}, \frac{6\sqrt{57}}{19}\right)$.

OBSERVAȚIE.

Dacă $q \neq 0$ și $d = 0$, sistemul de ecuații se rezolvă asemănător cazului II.

III. Dacă $d \neq 0$ și $q \neq 0$, facem transformări ale celor două ecuații astfel încât, prin adunare să obținem termenul liber egal cu 0. Scriem un nou sistem format din ecuația nou obținută și una dintre ecuațiile sistemului inițial și îl rezolvăm conform cazului II.

EXEMPLU:

Să rezolvăm sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ x^2 - 4xy + 5y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \quad | \cdot 5 \\ x^2 - 4xy + 5y^2 = 5 \quad | \cdot (-9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 10xy + 15y^2 = 45 \\ -9x^2 + 36xy - 45y^2 = -45 \end{cases}$$

$$-4x^2 + 26xy - 30y^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 13xy + 15y^2 = 0$$

Rezolvăm sistemul de ecuații
$$\begin{cases} 2x^2 - 13xy + 15y^2 = 0 \\ x^2 - 4xy + 5y^2 = 5 \end{cases}$$

Împărțim ambii membri ai primei ecuații la x^2 și obținem $2 - 13 \cdot \frac{y}{x} + 15 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$. Notând $\frac{y}{x} = t$, obținem ecuația $2 - 13t + 15t^2 = 0$, care are soluțiile $t_1 = \frac{2}{3}$ și $t_2 = \frac{1}{5}$.

Dacă $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$, atunci $y = \frac{2}{3}x$. Înlocuind în a doua ecuație a sistemului obținem ecuația $x^2 = 9$, care are soluțiile $x_1 = -3$ și $x_2 = 3$. Pentru $x_1 = -3$ obținem $y_1 = -2$, iar pentru $x_2 = 3$ obținem $y_2 = 2$. În acest caz, sistemul are soluțiile $(-3, -2)$ și $(3, 2)$.

Dacă $\frac{y}{x} = \frac{1}{5}$, atunci $y = \frac{1}{5}x$. Înlocuind în a doua ecuație a sistemului, obținem ecuația $2x^2 = 25$, care are soluțiile $x_1 = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$ și $x_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Pentru $x_1 = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$ obținem $y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, iar pentru $x_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ obținem $y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. În acest caz, sistemul are soluțiile $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ și $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Așadar, sistemul are soluțiile: $(-3, -2)$, $(3, 2)$, $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ și $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.



Aplic

1. Rezolvă și interpretează geometric următoarele sisteme de ecuații:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 4x - y - 1 = 0 \\ y = x^2 - 2x + 8 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2x + y + 5 = 0 \\ y = -x^2 + 4x - 14 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ y = x^2 - 3x + 1 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 3x + 3y + 1 = 0 \\ y = -x^2 - 2x - 1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 3x - 2y + 7 = 0 \\ y = x^2 - x - 1 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 5x - 2y + 1 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 5 \end{cases} \end{array}$$

2. Rezolvă următoarele sisteme de ecuații:

$$\begin{array}{lll} \text{A. a)} \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 4 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 1 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -12 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 7 \end{cases} & \\ \\ \text{B. a)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ xy = 4 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ xy = 1 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{13}{4} \\ xy = \frac{3}{2} \end{cases} & \\ \\ \text{C. a)} \begin{cases} x + y + xy = 19 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 11 \end{cases} & \\ \text{b)} \begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x + y = 3 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2x^2 - xy + 2y^2 = 15 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases} & \\ \\ \text{D. a)} \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 - 4xy + 3y^2 = 0 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \end{cases} \\ \text{E. a)} \begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 - 3y^2 = 5 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \\ \text{F. a)} \begin{cases} 2x^2 + 3xy + 4y^2 = 18 \\ 3x^2 - 2xy + 5y^2 = 13 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x^2 + 4xy + 2y^2 = 23 \\ 5x^2 - 3xy + y^2 = 37 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 3x^2 + 2xy + 5y^2 = 27 \\ 4x^2 - xy + 3y^2 = 14 \end{cases} \end{array}$$

3. Un grădinar dorește să amenajeze un strat de flori de formă dreptunghiulară. El știe că are nevoie de un gard cu lungimea totală de 10 m pentru a înconjura stratul și că aria suprafeței destinate florilor trebuie să fie egală cu 6 m². Determină lungimea și lățimea stratului de flori.



Investigație: „Secunda care salvează vieți”

Într-un scenariu de urgență din trafic, în care timpul de reacție a conducătorului auto este considerat neglijabil, distanța de oprire depinde exclusiv de capacitatea mecanică a vehiculului de a disipa energia cinetică. Distanța de oprire (în metri) este modelată de funcția $d : [0, 70) \rightarrow [0, +\infty)$, $d(v) = \frac{v^2}{4}$, unde v reprezintă viteza vehiculului (exprimată în m/s).

Extragerea datelor și studiul proprietăților

- Utilizează un instrument digital (GeoGebra sau Desmos) pentru a trasa graficul funcției d .
- Care este domeniul de definiție al funcției d ? Ce reprezintă acesta?
- Determină numărul de soluții ale ecuației $d(x) = 0$. Interpretează semnificația rezultatului.
- Precizează monotonia funcției d . Ce se întâmplă cu distanța de oprire pe măsură ce viteza crește?
- Care este ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f care are abscisa egală cu 20?
- Care este ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f care are abscisa egală cu 40?
- De câte ori a crescut distanța dacă viteza s-a dublat?
- Dacă viteza este $v = 2$ m/s, care este distanța necesară pentru oprire?
- Dacă viteza este $v = 16$ m/s, care este distanța necesară pentru oprire?

Analiză critică și Optimizare

- Un obstacol apare la 4 m distanță. Folosind reprezentarea grafică, determină viteza cu care se poate deplasa o mașină pentru a opri în siguranță exact în fața obstacolului și a evita impactul.
- Un obstacol apare la 25 m distanță. Care este viteza maximă cu care se poate deplasa o mașină pentru a opri în siguranță?
- Un obstacol apare la 300 de metri distanță. Poate evita obstacolul o mașină care se deplasează cu 144 km/h?
- Compară distanța de oprire pentru $v = 10$ m/s (36 km/h) și $v = 20$ m/s (72 km/h). Deși viteza doar s-a dublat, cu câți metri a crescut distanța de oprire?
- De ce este mult mai periculos să crești viteza de la 108 km/h la 144 km/h decât de la 36 km/h la 72 km/h, deși în ambele cazuri diferența dintre viteze este de 36 km/h?



Exerciții recapitulative

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 6x - 8$.
 - a) Determină forma canonică a funcției f .
 - b) Determină axa de simetrie a reprezentării grafice a funcției f .
 - c) Determină valoarea minimă a funcției f .
 - d) Precizează monotonia funcției f .
 - e) Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și axele de coordonate Ox și Oy .
 - f) Reprezintă grafic funcția f .
 - g) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = -17$.
 - h) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) \leq 32$.
 - i) Determină valorile numărului real m pentru care ecuația $f(x) = mx - 9$ nu are soluții.
2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 - 2x + 3$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 3x$.
 - a) Determină distanța dintre punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox .
 - b) Verifică dacă punctul $A(-1, 6)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .
 - c) Determină valorile numărului real m pentru care punctul $A(1, -2m^2)$ aparține reprezentării grafice a funcției g .
 - d) Determină imaginea funcției g .
 - e) Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentările grafice ale funcțiilor f și g .
 - f) Determină valorile numărului real m pentru care ecuația $f(x) - 2mx - 5 = 0$ are două soluții distincte.
 - g) Determină semnul funcției g .
3. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $x^2 - 3x - 4 > 0$;	c) $x^2 + 5x - 3 \geq -x + 5$;	e) $\frac{x^2 - 2x - 8}{-x^2 - 3x + 4} \leq 0$;
b) $-x^2 + 6x - 9 \leq 0$;	d) $(x^2 + 2x)(x^2 - 1) < 0$;	f) $\frac{4x^2 - 9x + 3}{x^2 - 2x + 1} > 3$.
4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - (m + 3)x - m + 1$, unde m este număr real. Determină valorile numărului real m pentru care reprezentarea grafică a funcției f este situată deasupra axei Ox .
5. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (m - 3)x^2 - (m - 4)x + m - 2$, unde m este număr real, $m \neq 3$. Determină valorile numărului real m pentru care reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte.
6. Determină valorile numărului real nenul m pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = mx^2 + (m^2 - 3m - 2)x + 1$, este descrescătoare pe $(-\infty, 1]$.
7. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 + 3x - 3 = 0$. Calculează fără a rezolva ecuația:

a) $-2x_1 + 5x_1x_2 - 2x_2$;	c) $\frac{2}{x_1 - 1} + \frac{2}{x_2 - 1}$;	e) $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$;
b) $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$;	d) $\frac{x_1 + 1}{2x_2 - 3} + \frac{x_2 + 1}{2x_1 - 3}$;	f) $\frac{3x_1^3 + x_1^2 - 4x_1 + 3}{2x_1^2 + x_1 + 4} + \frac{3x_2^3 + x_2^2 - 4x_2 + 3}{2x_2^2 + x_2 + 4}$.
8. Rezolvă și interpretează geometric următoarele sisteme de ecuații:

a) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y = x^2 - x - 2 \end{cases}$;	b) $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ y = x^2 + 4x + 8 \end{cases}$.
---	---

9. Rezolvă următoarele sisteme de ecuații:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -12 \end{cases};$

c) $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases};$

e) $\begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 = 0 \\ 2x^2 - y^2 = 7 \end{cases};$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ xy = 5 \end{cases};$

d) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \end{cases};$

f) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ 3x^2 - xy + y^2 = 11 \end{cases}.$

10. Într-un studiu sociologic, s-a urmărit numărul de menționări zilnice pe platformele sociale pentru două curente de opinie A și B. Studiul s-a desfășurat pe parcursul a 10 zile. Evoluția numărului zilnic de menționări pe platformele sociale asociate opiniilor A și B este modelată prin funcțiile f și g . Reprezentările grafice ale celor două funcții sunt redată în figura 1. Pe axa Ox este reprezentat timpul (exprimat în zile), iar pe axa Oy este reprezentat numărul de menționări zilnice (exprimat în sute).

a) Care este domeniul de definiție al funcțiilor f și g ? Ce reprezintă acesta?

b) Determină funcțiile f și g .

c) Determină coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox . Ce semnifică aceste puncte?

d) Identifică punctele de extrem ale reprezentărilor grafice ale funcțiilor f și g și precizează coordonatele acestora. Ce semnificație au aceste puncte?

e) Care este mulțimea valorilor funcției f ? Ce semnificație are această mulțime?

f) Care este mulțimea valorilor funcției g ? Ce semnificație are această mulțime?

g) Determină intervalele de monotonie ale funcției f . Interpretează aceste intervale din punctul de vedere al interesului publicului.

h) Determină intervalele de monotonie ale funcției g . Interpretează aceste intervale din punctul de vedere al interesului publicului.

i) Determină în ce zile numărul de menționări zilnice pentru opinia B a fost de 800.

j) Determină în ce interval de timp numărul de menționări zilnice pentru opinia A a fost de cel puțin 1 600.

k) Identifică punctul de intersecție a celor două curbe, precizează coordonatele acestuia și explică semnificația acestuia.

l) Rezolvă inecuația $f(x) < g(x)$. Ce concluzie poate trage un sociolog despre dominanța uneia dintre cele două opinii în acea perioadă?

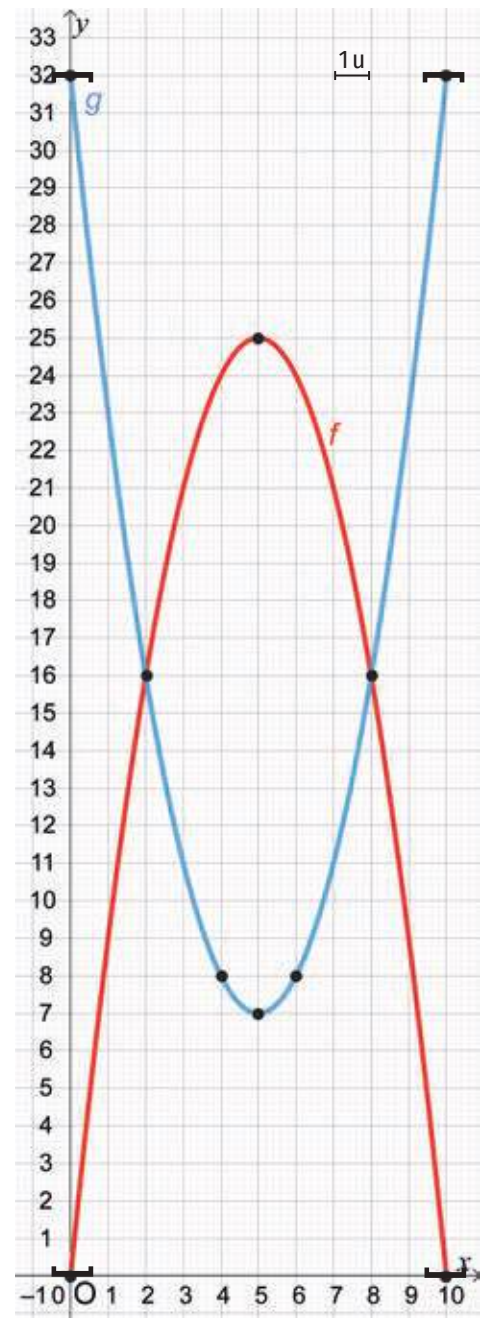


Figura 1

Timp de lucru: 45 de minute

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I

30 de puncte

30 de puncte	1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.
(10 p.)	A. Valoarea maximă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x^2 + 5x - 2$ este: a) -9; b) $-\frac{5}{2}$; c) $\frac{9}{8}$; d) $\frac{5}{4}$.
(10 p.)	B. Numărul real m pentru care punctul $A(m, m^2)$ aparține reprezentării grafice a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 5m - 5$, este: a) 0; b) 1; c) 2; d) 3.
(10 p.)	C. Mulțimea valorilor numărului real nenul m pentru care ecuația $mx^2 + 6(m+1)x + 9m + 15 = 0$ nu are soluție este: a) $(-\infty, -3)$; b) $(-\infty, 3)$; c) $(-3, 0)$; d) $(-3, +\infty)$.

Subiectul al II-lea

60 de puncte

Scrie rezolvările complete.

60 de puncte	1. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 - 2x + 3$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 4x - 9$.
(10 p.)	a) Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentările grafice ale funcțiilor f și g.
(10 p.)	b) Determină valorile numărului real m pentru care $f(x) - mx < 4$, pentru orice număr real x.
(10 p.)	2. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 4x + a = 0$, unde a este număr real, $a < 4$. Determină numărul real a pentru care $x_1^2 - x_2^2 = 12$.
(10 p.)	3. Determină funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a cărei reprezentare grafică are vârful $V(2, 3)$ și trece prin punctul $A(0, 7)$.
(10 p.)	4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - (m+1)x + m + 2$, unde m este număr real. Determină valorile numărului real m pentru care reprezentarea grafică a funcției f este situată deasupra axei Ox.
(10 p.)	5. Determină valorile numărului real m pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - (3m-5)x - 2m$, este crescătoare pe intervalul $[1, +\infty)$.

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din aceste lecții.

LA SFÂRȘITUL ACESTOR LECȚII:	5 foarte bine	4 bine	3 mediu	2 slab	1 foarte slab
Mi-a fost ușor să rezolv exercițiile.					
Am înțeles criteriile de rezolvare.					
Mi-am amintit conținuturile învățate.					

3.1. Funcția putere cu exponent întreg

Descopăr

1. Se consideră un cub cu muchia de lungime x cm ($x \in \mathbb{R}, x > 0$).
 - a) Exprimă volumul cubului în funcție de x .
 - b) Scrie funcția f care exprimă volumul unui cub în funcție de lungimea muchiei sale.
 - c) Ce se întâmplă cu volumul cubului dacă lungimea muchiei sale se dublează?
 - d) Ce se întâmplă cu volumul cubului dacă lungimea muchiei sale se înjumătățește?
 - e) Reprezintă grafic funcția f cu ajutorul unui instrument digital (*GeoGebra/Desmos*).
 - f) Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axele de coordonate? Justifică răspunsul.
 - g) Funcția f este crescătoare sau descrescătoare?
2. Într-un experiment de fizică, într-un cilindru prevăzut cu un piston mobil se află 12 g de gaz. Prin deplasarea pistonului, volumul V al gazului se modifică, iar densitatea acestuia ρ variază conform relației $\rho = 12V^{-1}$.
 - a) Scrie funcția f care exprimă densitatea gazului în funcție de volumul acestuia.
 - b) Care este domeniul de definiție al funcției f ? Justifică răspunsul.
 - c) Reprezintă grafic funcția f folosind un instrument digital (*GeoGebra/Desmos*).
 - d) Ce se întâmplă cu densitatea gazului atunci când pistonul este ridicat (volumul crește)?
 - e) Funcția f este crescătoare sau descrescătoare? Ce proprietate a gazului reflectă această dependență?
 - f) Ce se întâmplă cu densitatea gazului dacă volumul acestuia se dublează? Dar dacă volumul se înjumătățește?
 - g) Ce se întâmplă cu densitatea când comprimăm gazul, astfel încât volumul să devină foarte mic?
 - h) Ce se întâmplă cu densitatea gazului când volumul acestuia crește foarte mult?
 - i) Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axele de coordonate? Interpretează răspunsul.



Învăț

Definiția 1. Fie n un număr natural nenul. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$, se numește funcția putere de gradul n .

OBSERVAȚII.

1. Dacă $n = 1$, atunci obținem funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$, care este o funcție de gradul întâi.
2. Dacă $n = 2$, atunci obținem funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$, care este o funcție de gradul al doilea.

Funcția putere cu exponent natural par



Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*, n$ număr par, funcția putere cu exponent natural par. Cum n este număr natural par nenul, există un număr natural nenul k , astfel încât $n = 2k$. În acest caz putem scrie funcția f astfel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2k}, k \in \mathbb{N}^*$.

Se consideră funcțiile $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$ și $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^4$.

Vom reprezenta grafic cele două funcții în același reper cartezian xOy (figura 1), folosind tabelul de valori de mai jos.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$h(x) = x^4$	81	16	1	0	1	16	81

Reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2k}, k \in \mathbb{N}^*$, are o comportare asemănătoare cu reprezentările grafice ale funcțiilor $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$, și $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^4$.

Studiind reprezentările grafice din figura 1, deducem următoarele proprietăți ale funcției putere cu exponent natural par $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2k}, k \in \mathbb{N}^*$:

- Mulțimea valorilor funcției f este $[0, +\infty)$.
- Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axele de coordonate Ox și Oy în punctul $O(0, 0)$.
- Funcția f este funcție pară.
- Reprezentarea grafică a funcției f este simetrică față de axa Oy .
- Funcția f este convexă.
- Funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.
- $f(x) \geq 0$, pentru orice număr real x .
- Funcția f nu este injectivă.
- Funcția f nu este surjectivă.

În continuare vom demonstra câteva dintre aceste proprietăți.

Teorema 1. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2k}, k \in \mathbb{N}^*$, este funcție pară.

Demonstrație:

Cum $f(-x) = (-x)^{2k} = x^{2k} = f(x)$, pentru orice număr real x , rezultă că funcția f este pară.

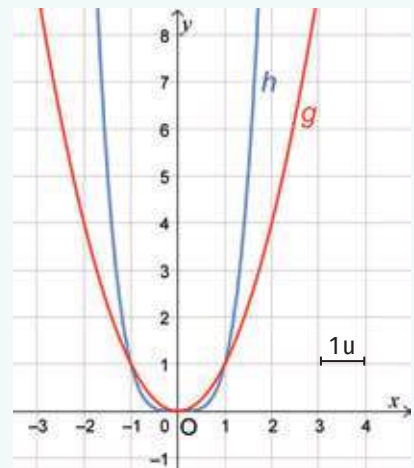


Figura 1

Teorema 2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.

Demonstrație:

Fie $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$, $x_1 \neq x_2$. Atunci,

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{x_1^{2k} - x_2^{2k}}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1^2)^k - (x_2^2)^k}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1^2 - x_2^2)[(x_1^2)^{k-1} + (x_1^2)^{k-2} \cdot x_2^2 + \dots + (x_2^2)^{k-1}]}{x_1 - x_2} = \\ &= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)[(x_1^2)^{k-1} + (x_1^2)^{k-2} \cdot x_2^2 + \dots + (x_2^2)^{k-1}]}{x_1 - x_2} = \underbrace{(x_1 + x_2)}_{< 0} \underbrace{[(x_1^2)^{k-1} + (x_1^2)^{k-2} \cdot x_2^2 + \dots + (x_2^2)^{k-1}]}_{> 0} < 0. \end{aligned}$$

Cum $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, pentru $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$, $x_1 \neq x_2$, rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.

Fie $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$. Atunci:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{2k} - x_2^{2k}}{x_1 - x_2} = \underbrace{(x_1 + x_2)}_{> 0} \underbrace{[(x_1^2)^{k-1} + (x_1^2)^{k-2} \cdot x_2^2 + \dots + (x_2^2)^{k-1}]}_{> 0} > 0.$$

Cum $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, pentru orice $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$, rezultă că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, nu este injectivă.

Demonstrație:

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow x_1^{2k} = x_2^{2k} \Rightarrow (x_1^2 - x_2^2)[(x_1^2)^{k-1} + (x_1^2)^{k-2} \cdot x_2^2 + \dots + (x_2^2)^{k-1}] = 0 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ sau } x_1 = -x_2 \Rightarrow \text{Funcția } f \text{ nu este injectivă.} \end{aligned}$$

Funcția putere cu exponent natural impar



Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, n număr impar, funcția putere cu exponent natural impar, $n \geq 3$. Cum n este număr natural impar, $n \geq 3$, există un număr natural nenul k , astfel încât $n = 2k + 1$. În acest caz, putem scrie funcția f astfel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Se consideră funcțiile $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$, și $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^5$.

Vom reprezenta grafic cele două funcții în același reper cartezian xOy , folosind tabelul de valori de mai jos (a se vedea figura 2 de la pagina următoare).

x	-2	-1	0	1	2
$g(x) = x^3$	-8	-1	0	1	8
$h(x) = x^5$	-32	-1	0	1	32

Reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}^*$, are un comportament asemănător cu reprezentările grafice ale funcțiilor $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$, și $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^5$.

Studiind reprezentările grafice din figura 2, deducem următoarele proprietăți ale funcției putere cu exponent natural impar $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2k+1}, k \in \mathbb{N}^*$:

- Mulțimea valorilor funcției f este $\mathbb{R}$.
- Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axele de coordonate Ox și Oy în punctul $O(0, 0)$.
- Funcția f este funcție impară.
- Reprezentarea grafică a funcției f este simetrică față de originea reperului cartezian.
- Funcția f este convexă pe intervalul $[0, +\infty)$ și este concavă pe intervalul $(-\infty, 0]$.
- Funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- Funcția f este bijectivă.
- $f(x) < 0$, pentru orice număr real $x \in (-\infty, 0)$.
- $f(x) > 0$, pentru orice număr real $x \in (0, +\infty)$.
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

În continuare vom demonstra câteva dintre aceste proprietăți.

Teorema 3. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2k+1}, k \in \mathbb{N}^*$, este funcție impară.

Demonstrație:

Cum $f(-x) = (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1} = -f(x)$, pentru orice număr real x , rezultă că funcția f este impară.

Teorema 4. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2k+1}, k \in \mathbb{N}^*$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Demonstrație:

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{x_1^{2k+1} - x_2^{2k+1}}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1^{2k} + x_1^{2k-1}x_2 + \dots + x_1x_2^{2k-1} + x_2^{2k})}{x_1 - x_2} = \\ &= x_1^{2k} + x_1^{2k-1}x_2 + \dots + x_1x_2^{2k-1} + x_2^{2k} > 0. \end{aligned}$$

Cum $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$, rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Teorema 5. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2k+1}, k \in \mathbb{N}^*$, este injectivă.

Demonstrație:

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^{2k+1} = x_2^{2k+1} \Rightarrow x_1^{2k+1} - x_2^{2k+1} = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^{2k} + x_1^{2k-1}x_2 + \dots + x_1x_2^{2k-1} + x_2^{2k}) = 0$$

Să demonstrăm că $x_1^{2k} + x_1^{2k-1}x_2 + \dots + x_1x_2^{2k-1} + x_2^{2k} \neq 0$, pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, cu $f(x_1) = f(x_2)$.

Din $x_1^{2k+1} = x_2^{2k+1}$ rezultă că x_1 și x_2 au același semn.

Dacă $x_1 < 0$ și $x_2 < 0$ sau $x_1 > 0$ și $x_2 > 0$, atunci $x_1^{2k} > 0, x_1^{2k-1}x_2 > 0, x_1^{2k-2}x_2^2 > 0, x_1^{2k-3}x_2^3 > 0, \dots, x_2^{2k} > 0$, de unde rezultă $x_1^{2k} + x_1^{2k-1}x_2 + \dots + x_1x_2^{2k-1} + x_2^{2k} > 0$. $\Rightarrow$ Funcția f nu este injectivă.

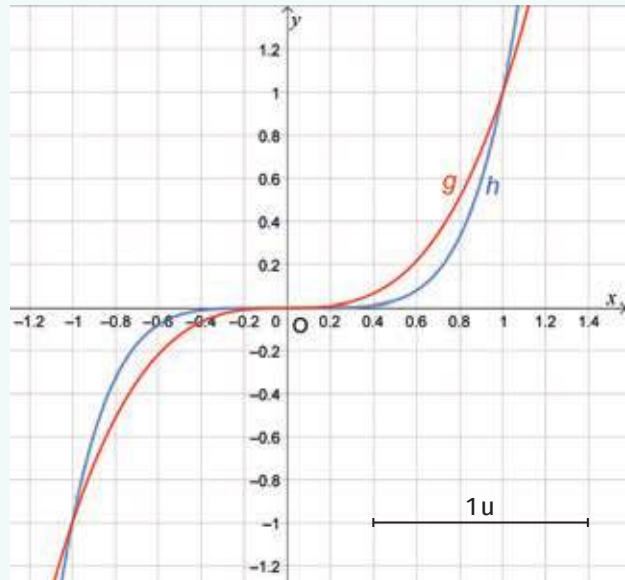


Figura 2

Așadar:

$$(x_1 - x_2)(x_1^{2k} + x_1^{2k-1}x_2 + \dots + x_1x_2^{2k-1} + x_2^{2k}) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Am demonstrat că funcția f este injectivă.

OBSERVAȚIE.

Injectivitatea funcției f rezultă și din faptul că aceasta este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Definiția 2. Fie n un număr natural nenul. Funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-n}$, se numește funcția putere cu exponent întreg negativ.

Distingem două cazuri, după cum n este par sau impar.

I. Dacă n este număr natural nenul par, există un număr natural nenul k , astfel încât $n = 2k$. În acest caz putem scrie funcția f astfel: $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2k}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Se consideră funcțiile $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-2}$, și $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^{-4}$.

Vom reprezenta grafic cele două funcții în același reper cartezian xOy (figura 3), folosind tabelul de valori de mai jos:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$g(x) = x^{-2}$	$\frac{1}{4}$	1	4	4	1	$\frac{1}{4}$
$h(x) = x^{-4}$	$\frac{1}{16}$	1	16	16	1	$\frac{1}{16}$

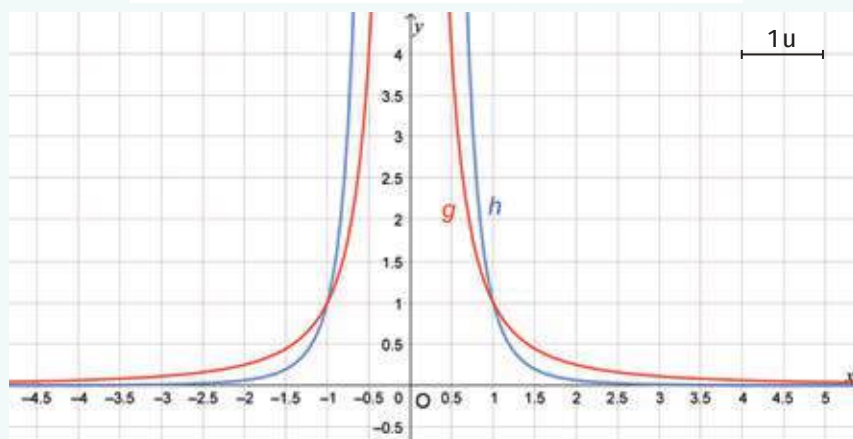


Figura 3

Reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, are o comportare asemănătoare cu reprezentările grafice ale funcțiilor $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-2}$, și $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^{-4}$.

Studiind reprezentările grafice din figura 3, deducem următoarele proprietăți ale funcției $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2k}$, $k \in \mathbb{N}^*$:

- Mulțimea valorilor funcției f este $(0, +\infty)$.
- Reprezentarea grafică a funcției f nu intersectează axele de coordonate Ox și Oy .
- Funcția f este funcție pară.
- Reprezentarea grafică a funcției f este simetrică față de axa Oy .
- Funcția f este convexă.
- Funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$ și strict descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

- $f(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$.
- Funcția f nu este injectivă.
- Funcția f nu este surjectivă.

În continuare vom demonstra câteva dintre aceste proprietăți.

Teorema 6. Funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, este funcție pară.

Demonstrație:

$f(-x) = (-x)^{-2k} = (-1)^{-2k} \cdot x^{-2k} = x^{-2k} = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow$ Funcția f este funcție pară.

Teorema 7. Funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2k}$, $k \in \mathbb{N}^*$ este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$ și strict descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

Demonstrație:

Fie $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, $x_1 \neq x_2$. Atunci:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{x_1^{-2k} - x_2^{-2k}}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1}{x_1^{2k}} - \frac{1}{x_2^{2k}}}{x_1 - x_2} = \frac{\left(\frac{1}{x_1^2}\right)^k - \left(\frac{1}{x_2^2}\right)^k}{x_1 - x_2} = \frac{\left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}\right) \left[\left(\frac{1}{x_1^2}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{x_1^2}\right)^{k-2} \cdot \frac{1}{x_2^2} + \dots + \left(\frac{1}{x_2^2}\right)^{k-1} \right]}{x_1 - x_2} = \\ &= \frac{\frac{(x_2 - x_1)(x_1 + x_2)}{x_1^2 x_2^2} \left[\left(\frac{1}{x_1^2}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{x_1^2}\right)^{k-2} \cdot \frac{1}{x_2^2} + \dots + \left(\frac{1}{x_2^2}\right)^{k-1} \right]}{x_1 - x_2} = \\ &= \frac{-\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1^2 x_2^2} \left[\left(\frac{1}{x_1^2}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{x_1^2}\right)^{k-2} \cdot \frac{1}{x_2^2} + \dots + \left(\frac{1}{x_2^2}\right)^{k-1} \right]}{x_1 - x_2} = \\ &= -\frac{\overset{<0}{(x_1 + x_2)}}{x_1^2 x_2^2} \underbrace{\left[\left(\frac{1}{x_1^2}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{x_1^2}\right)^{k-2} \cdot \frac{1}{x_2^2} + \dots + \left(\frac{1}{x_2^2}\right)^{k-1} \right]}_{>0} > 0. \end{aligned}$$

Cum $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, pentru orice $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, $x_1 \neq x_2$, rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$.

Fie $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$. Atunci:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -\frac{\overset{>0}{(x_1 + x_2)}}{x_1^2 x_2^2} \underbrace{\left[\left(\frac{1}{x_1^2}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{x_1^2}\right)^{k-2} \cdot \frac{1}{x_2^2} + \dots + \left(\frac{1}{x_2^2}\right)^{k-1} \right]}_{>0} < 0.$$

Cum $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, pentru orice $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$, rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe $(0, +\infty)$.

Funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, nu este injectivă.

Demonstrație:

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow x_1^{-2k} = x_2^{-2k} \Rightarrow \frac{1}{x_1^{2k}} = \frac{1}{x_2^{2k}} \Rightarrow \frac{1}{x_1^{2k}} - \frac{1}{x_2^{2k}} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}\right) \left[\left(\frac{1}{x_1^2}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{x_1^2}\right)^{k-2} \cdot \frac{1}{x_2^2} + \dots + \left(\frac{1}{x_2^2}\right)^{k-1} \right] = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ sau } x_1 = -x_2 \Rightarrow \text{Funcția } f \text{ nu este injectivă.} \end{aligned}$$

II. Dacă n este număr natural impar, există un număr natural k , astfel încât $n = 2k + 1$. În acest caz, putem scrie funcția f astfel: $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Se consideră funcțiile $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-1}$, și $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^{-3}$.

Vom reprezenta grafic cele două funcții în același reper cartezian xOy (figura 4), folosind tabelul de valori de mai jos.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$g(x) = x^{-1}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$
$h(x) = x^{-3}$	$-\frac{1}{8}$	-1	-8	8	1	$\frac{1}{8}$

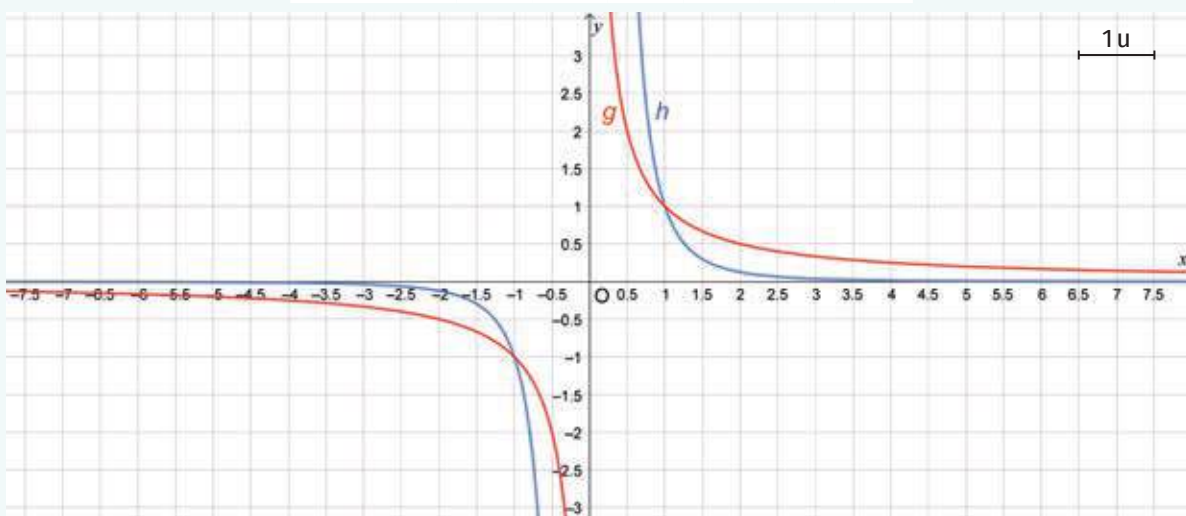


Figura 4

Reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, are o comportare asemănătoare cu reprezentările grafice ale funcțiilor $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-1}$, și $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^{-3}$.

Studiind reprezentările grafice din figura 4, deducem următoarele proprietăți ale funcției $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$:

- Mulțimea valorilor funcției f este $\mathbb{R}^*$.
- Reprezentarea grafică a funcției f nu intersectează axele de coordonate Ox și Oy .
- Funcția f este funcție impară.
- Reprezentarea grafică a funcției f este simetrică față de originea reperului cartezian xOy .
- Funcția f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$ și concavă pe intervalul $(-\infty, 0)$.
- Funcția f este strict descrescătoare atât pe intervalul $(-\infty, 0)$, cât și pe intervalul $(0, +\infty)$.
- Funcția f este injectivă.
- Funcția f nu este surjectivă.
- $f(x) < 0$, pentru orice număr real $x \in (-\infty, 0)$.
- $f(x) > 0$, pentru orice număr real $x \in (0, +\infty)$.

În continuare vom demonstra câteva dintre aceste proprietăți.

Teorema 8. Funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, este funcție impară.

Demonstrație:

$f(-x) = (-x)^{-2k-1} = (-1)^{-2k-1} \cdot (-x)^{-2k-1} = -x^{-2k-1} = -f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow$ Funcția f este funcție impară.

Teorema 9. Funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$ și pe intervalul $(0, +\infty)$.

Demonstrație:

Fie $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, $x_1 \neq x_2$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{x_1^{-2k-1} - x_2^{-2k-1}}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1}{x_1^{2k+1}} - \frac{1}{x_2^{2k+1}}}{x_1 - x_2} = \frac{\left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k+1} - \left(\frac{1}{x_2}\right)^{2k+1}}{x_1 - x_2} = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) \left[\left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k} + \left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} \cdot \frac{1}{x_2} + \dots + \left(\frac{1}{x_2}\right)^{2k} \right]}{x_1 - x_2} = \\ &= \frac{\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \left[\left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k} + \left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} \cdot \frac{1}{x_2} + \dots + \left(\frac{1}{x_2}\right)^{2k} \right]}{x_1 - x_2} = \\ &= \frac{-(x_1 - x_2) \left[\left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k} + \left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} \cdot \frac{1}{x_2} + \dots + \left(\frac{1}{x_2}\right)^{2k} \right]}{x_1 x_2 (x_1 - x_2)} = \\ &= -\frac{1}{\underbrace{x_1 x_2}_{>0}} \underbrace{\left[\left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k} + \left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} \cdot \frac{1}{x_2} + \dots + \left(\frac{1}{x_2}\right)^{2k} \right]}_{>0} < 0. \end{aligned}$$

Cum $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, pentru orice $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, $x_1 \neq x_2$, rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$.

Fie $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$.

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{\underbrace{x_1 x_2}_{>0}} \underbrace{\left[\left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k} + \left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} \cdot \frac{1}{x_2} + \dots + \left(\frac{1}{x_2}\right)^{2k} \right]}_{>0} < 0$$

Cum $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, pentru orice $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$, rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

Teorema 10. Funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, este injectivă.

Demonstrație:

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$. Observăm că, pentru $x_1 \in (-\infty, 0)$ și $x_2 \in (0, +\infty)$, $f(x_1) < 0$ și $f(x_2) > 0$, de unde rezultă că $f(x_1) \neq f(x_2)$. Concluzia este aceeași dacă $x_1 \in (0, +\infty)$ și $x_2 \in (-\infty, 0)$.

Fie $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^{-2k-1} = x_2^{-2k-1} \Rightarrow \frac{1}{x_1^{2k+1}} = \frac{1}{x_2^{2k+1}} \Rightarrow \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) \left[\left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k} + \left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} \cdot \frac{1}{x_2} + \dots + \left(\frac{1}{x_2}\right)^{2k} \right] = 0.$$

Să demonstrăm că $\left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k} + \left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} \cdot \frac{1}{x_2} + \dots + \left(\frac{1}{x_2}\right)^{2k} \neq 0$.

Din $\frac{1}{x_1^{2k+1}} = \frac{1}{x_2^{2k+1}}$, rezultă că x_1 și x_2 au același semn.

Dacă $x_1 < 0$ și $x_2 < 0$ sau $x_1 > 0$ și $x_2 > 0$, atunci $\left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k} > 0$, $\left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} \cdot \frac{1}{x_2} > 0$, $\left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k-2} \cdot \left(\frac{1}{x_1}\right)^2 > 0$, $\left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k-3} \cdot \left(\frac{1}{x_1}\right)^3 > 0$, ..., $\left(\frac{1}{x_2}\right)^{2k} > 0$, de unde rezultă că $\left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k} + \left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} \cdot \frac{1}{x_2} + \dots + \left(\frac{1}{x_2}\right)^{2k} > 0$

Așadar:

$$\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) \left[\left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k} + \left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} \cdot \frac{1}{x_2} + \dots + \left(\frac{1}{x_2}\right)^{2k} \right] = 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Analog se demonstrează pentru $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$.

Am demonstrat, deci, că funcția f este injectivă.

OBSERVAȚIE.

Funcția $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $g(x) = x^{-2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, este bijectivă.

Exerciții rezolvate



1. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $x^4 = x^3$.

Rezolvare:

Reprezentăm grafic, în reperul cartezian xOy , funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$ (figura 5). Ecuația $x^4 = x^3$ este echivalentă cu ecuația $f(x) = g(x)$.

Reprezentările grafice ale funcțiilor f și g se intersectează în punctele $O(0, 0)$ și $A(1, 1)$ de unde rezultă că ecuația $f(x) = g(x)$ are soluțiile $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$. Așadar, soluțiile ecuației $x^4 = x^3$ sunt $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$.

OBSERVAȚIE.

Ecuația $x^4 = x^3$ poate fi rezolvată și astfel:

$$x^4 = x^3 \Leftrightarrow x^4 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \text{ sau } x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ sau } x = 1$$

2. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $x^2 < x^{-2}$.

Rezolvare:

Reprezentăm grafic, în reperul cartezian xOy , funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-2}$ (figura 6). Inecuația $x^2 < x^{-2}$ este echivalentă cu inecuația $f(x) < g(x)$.

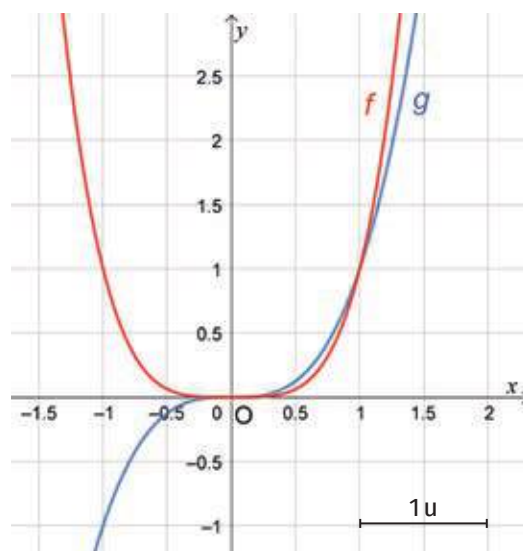


Figura 5

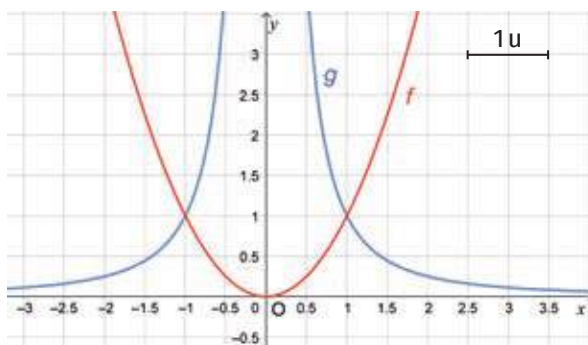


Figura 6

Reprezentările grafice ale funcțiilor f și g se intersectează în punctele $A(-1, 1)$ și $B(1, 1)$. Pentru a rezolva inecuația $x^2 < x^{-2}$, identificăm porțiunea din reprezentarea grafică a funcției f care este situată sub reprezentarea grafică a funcției g . Proiectăm această porțiune pe axa Ox și obținem $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, care reprezintă soluția inecuației $x^2 < x^{-2}$.

OBSERVAȚIE.

Inecuația $x^2 < x^{-2}$ se mai poate rezolva și astfel:

Observăm că x^{-2} există pentru $x \in \mathbb{R}^*$.

$$x^2 < x^{-2} \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^4 - 1}{x^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0$$

Cum $x \in \mathbb{R}^*$, soluția inecuației $x^2 - 1 < 0$ este $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Aplic

- Se consideră funcțiile $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = 2x^3$, $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = -3x^4 + 2$, $f_3: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = -2x^{-3}$, $f_4: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f_4(x) = 4x^{-2} - 3$.
 - Reprezintă grafic funcțiile f_1, f_2, f_3 și f_4 .
 - Identifică punctele de intersecție dintre reprezentările grafice ale funcțiilor f_1, f_2, f_3 și f_4 cu axele de coordonate Ox și Oy și precizează coordonatele acestora.
 - Determină imaginile funcțiilor f_1, f_2, f_3 și f_4 .
 - Studiază monotonia fiecăreia dintre funcțiile f_1, f_2, f_3, f_4 .
 - Studiază bijectivitatea fiecăreia dintre funcțiile f_1, f_2, f_3, f_4 .
- Precizează care dintre funcțiile următoare sunt injective, care sunt surjective și care sunt bijective:

a) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = x^{-5}$;	d) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}, f(x) = x^{-1} + 2$;
b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^7$;	e) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow (-\infty, 0), f(x) = x^4$;
c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2$;	f) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{-2}$.
- Utilizând reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$, trasează în același sistem de coordonate xOy reprezentările grafice ale următoarelor funcții:

a) $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x^3 + 1$;	c) $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = (x + 1)^3$.
b) $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x^3 - 1$;	
- Studiază monotonia funcției f :

a) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = x^{-2}$;	d) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = x^{-3} + x^3$;
b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^4$;	e) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}, f(x) = x^{-3} + 1$.
c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -4x^9$;	
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $x^4 = 3x^3$;	b) $x^2 = x^6$;	c) $-4x^{-5} = x^{-3}$;	d) $9x^{-2} = x^{-4}$.
-------------------	------------------	--------------------------	-------------------------
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $x^5 \geq 8x^2$;	b) $x^4 < x^2$;	c) $2x^{-2} > x^{-3}$;	d) $x^{-1} \leq 4x^{-3}$.
----------------------	------------------	-------------------------	----------------------------

7. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2$.
Demonstrează că $f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$, pentru orice numere reale $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ și orice număr real $t \in [0, 1]$.
8. Compară $(2,001)^{11}$ cu $(2,0001)^{11}$ și justifică răspunsul folosind proprietățile funcției putere.
9. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x^{-2}$.
a) Demonstrează că $f(x) \geq 2$, pentru orice număr real $x \in (0, +\infty)$.
b) Determină valoarea minimă a funcției f și pentru ce valoare a argumentului x se atinge.
10. Se consideră un pătrat cu latura de lungime x cm, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.
a) Exprimă aria pătratului în funcție de x .
b) Scrie funcția f care exprimă aria unui pătrat în funcție de lungimea laturii sale.
c) Ce se întâmplă cu aria pătratului dacă lungimea laturii sale se dublează?
d) Cum se modifică aria pătratului dacă lungimea laturii sale devine de 3 ori mai mică?
e) Reprezintă grafic funcția f .
f) Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axele de coordonate? Justifică răspunsul.
g) Funcția f este crescătoare sau descrescătoare?
11. Intensitatea luminii produse de un bec, care este conectat la un stâlp dintr-un parc, în funcție de distanța (exprimată în metri) față de acesta, este exprimată prin relația $I = 120d^{-2}$.
a) Scrie funcția f care exprimă intensitatea luminii produse de bec în funcție de distanța față de acesta.
b) Reprezintă grafic funcția f cu ajutorul unui instrument digital.
c) Calculează $f(2)$.
d) Determină intensitatea luminii pentru distanța de 0,4 km.
e) De câte ori scade intensitatea dacă distanța se dublează?
f) Pentru ce valori ale distanței este intensitatea luminii cel puțin 7,5 unități?





3.2. Radicali, operații cu radicali, proprietățile radicalilor; expresii conjugate

Descopăr

1. Câțiva copii acoperă cu vopsea o porțiune de teren delimitată de un pătrat, unde doresc să realizeze diverse activități în timpul liber. Pentru aceasta, ei folosesc 12 cutii de vopsea, fiecare cutie fiind suficientă pentru a vopsi 3 m^2 de suprafață. Determină lungimea gărdulețului care înconjoară suprafața vopsită?
2. Volumul unui cub este egal cu 64 m^3 . Determină lungimea muchiei cubului.

Învăț

Definiția 1. Fie a un număr real, $a \geq 0$, și n un număr natural nenul par. Se numește radical de ordinul n din a numărul real $b \geq 0$ cu proprietatea $b^n = a$. Se notează $\sqrt[n]{a}$ pentru $n > 2$ și $\sqrt{a}$ pentru $n = 2$.

Așadar, dacă $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, atunci $\sqrt[n]{a}$ ($n \in \mathbb{N}^*$, n – par) este un număr real care verifică relațiile:

$$\sqrt[n]{a} \geq 0 \text{ și } (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

EXEMPLE:

$$1. 0^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{0} = 0;$$

$$3. 2^4 = 16 \Rightarrow \sqrt[4]{16} = 2;$$

$$2. \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3};$$

$$4. \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729} \Rightarrow \sqrt[6]{\frac{1}{729}} = \frac{1}{3}.$$

Definiția 2. Fie a un număr real și n un număr natural impar, $n \geq 3$. Se numește radical de ordinul n din a numărul real b cu proprietatea $b^n = a$. Se notează $\sqrt[n]{a}$.

Așadar, dacă $a \in \mathbb{R}$ atunci $\sqrt[n]{a}$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$, n – impar) este un număr real care verifică relația $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

EXEMPLE:

$$1. 4^3 = 64 \Rightarrow \sqrt[3]{64} = 4;$$

$$3. \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8} \Rightarrow \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2};$$

$$2. (-2)^5 = -32 \Rightarrow \sqrt[5]{-32} = -2;$$

$$4. 1^7 = 1 \Rightarrow \sqrt[7]{1} = 1.$$

Operații cu radicali

Fie x și y numere reale, $x \geq 0$, $y \geq 0$, și n un număr natural nenul par. Atunci:

- $a \sqrt[n]{x} + b \sqrt[n]{x} = (a + b) \sqrt[n]{x}$, pentru orice numere reale a și b ;
- $a \sqrt[n]{x} - b \sqrt[n]{x} = (a - b) \sqrt[n]{x}$, pentru orice numere reale a și b ;
- $(a \sqrt[n]{x}) \cdot (b \sqrt[n]{y}) = (a \cdot b) \sqrt[n]{x \cdot y}$, pentru orice numere reale a și b ;
- $(a \sqrt[n]{x}) : (b \sqrt[n]{y}) = (a : b) \sqrt[n]{x : y}$, pentru orice numere reale a , b , $b \neq 0$, $y \neq 0$.

Fie x și y numere reale și n un număr impar, $n \geq 3$. Atunci:

- $a \sqrt[n]{x} + b \sqrt[n]{x} = (a + b) \sqrt[n]{x}$, pentru orice numere reale a și b ;
- $a \sqrt[n]{x} - b \sqrt[n]{x} = (a - b) \sqrt[n]{x}$, pentru orice numere reale a și b ;
- $(a \sqrt[n]{x}) \cdot (b \sqrt[n]{y}) = (a \cdot b) \sqrt[n]{x \cdot y}$, pentru orice numere reale a și b ;
- $(a \sqrt[n]{x}) : (b \sqrt[n]{y}) = (a : b) \sqrt[n]{x : y}$, pentru orice numere reale a și b , $b \neq 0$, $y \neq 0$.

EXEMPLE:

$$1. 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = (2 + 4)\sqrt{5} = 6\sqrt{5};$$

$$4. 2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{2} = (2 \cdot 5)\sqrt{3 \cdot 2} = 10\sqrt{6};$$

$$2. 7\sqrt[3]{3} - 11\sqrt[3]{3} = (7 - 11)\sqrt[3]{3} = -4\sqrt[3]{3};$$

$$5. 6\sqrt[3]{3} \cdot (-2\sqrt[3]{4}) = [6 \cdot (-2)]\sqrt[3]{3 \cdot 4} = -12\sqrt[3]{12};$$

$$3. 2\sqrt[7]{2} - 5\sqrt[7]{2} + 3\sqrt[7]{2} = (2 - 5 + 3)\sqrt[7]{2} = 0;$$

$$6. (9\sqrt[5]{6}) : (3\sqrt[5]{2}) = (9 : 3)(\sqrt[5]{6} : \sqrt[5]{2}) = 3\sqrt[5]{3}.$$

Proprietățile radicalilor

$$\bullet \sqrt[n]{a \cdot b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b \geq 0 \\ \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}, a, b \in \mathbb{R}, a < 0, b < 0 \end{cases}, \text{ unde } n \text{ un număr natural nenul par}$$

Demonstrație:

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, n - par.

Cazul 1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$. Atunci există numerele reale x și y , $x \geq 0$, $y \geq 0$, astfel încât $x = \sqrt[n]{a}$ și $y = \sqrt[n]{b}$, de unde rezultă $x^n = a$ și $y^n = b$. În acest caz:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{x^n \cdot y^n} = \sqrt[n]{(x \cdot y)^n} = x \cdot y = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Cazul 2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$, $b < 0$. Atunci $a = -|a|$, $b = -|b|$ și $ab = (-|a|)(-|b|) = |a| \cdot |b|$. În acest caz: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a| \cdot |b|} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}$ (conform cazului 1).

$$\bullet \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b > 0 \\ \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}, a, b \in \mathbb{R}, a < 0, b < 0 \end{cases}, \text{ unde } n \text{ un număr natural nenul par}$$

Demonstrație:

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, n - par.

Cazul 1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $b > 0$. Atunci există numerele reale x și y , $x \geq 0$, $y > 0$, astfel încât $x = \sqrt[n]{a}$ și $y = \sqrt[n]{b}$, de unde rezultă $x^n = a$ și $y^n = b$. În acest caz: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{x^n}{y^n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{x}{y}\right)^n} = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$

Cazul 2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$, $b < 0$. Atunci $a = -|a|$, $b = -|b|$ și $\frac{a}{b} = \frac{-|a|}{-|b|} = \frac{|a|}{|b|} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{|a|}{|b|}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (conform cazului 1).

$$\bullet (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, a \in \mathbb{R}, a \geq 0, m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*, n - \text{par}$$

$$\bullet (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, a \in \mathbb{R}, a > 0, m \in \mathbb{Z}, m < 0, n \in \mathbb{N}^*, n - \text{par}$$

Demonstrație:

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, n - par.

Cazul 1. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $m \in \mathbb{N}^*$. Atunci:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{m \text{ factori}} = \underbrace{\sqrt[n]{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}}_{m \text{ factori}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Cazul 2. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ și $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$. Atunci, există un număr natural nenul k , astfel încât $m = -k$ și

$$(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a})^{-k} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^k} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-(-k)}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-m}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$\bullet \sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} \sqrt[n]{a}, a \in \mathbb{R}, a \geq 0, m \in \mathbb{N}^* \\ \sqrt[n]{|a|}, a \in \mathbb{R}, a < 0, m \in \mathbb{N}^*, m \text{ par} \end{cases}, \text{ unde } n \in \mathbb{N}^*, n - \text{par};$$

Demonstrație:

Fie $n \in \mathbb{N}^*, n - \text{par}$.

Cazul 1. Fie $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ și $m \in \mathbb{N}^*$. Notăm $x = \sqrt[n]{a^m}$, de unde rezultă că $x^{mn} = a^m$ ($x \geq 0$), ceea ce este echivalent cu $(x^n)^m = a^m$.

Cum $a \geq 0$ și $x \geq 0$, din $(x^n)^m = a^m$ rezultă $x^n = a$, deci $x = \sqrt[n]{a}$.

Deoarece $x = \sqrt[n]{a^m}$, rezultă că $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}$.

Cazul 2. Fie $a \in \mathbb{R}, a < 0$ și $m \in \mathbb{N}^*, m \text{ par}$. Notăm $x = \sqrt[n]{a^m}$, de unde rezultă că $x^{mn} = a^m$ ($x > 0$).

Cum $a^m > 0$ și $a^m = |a|^m$, rezultă că $(x^n)^m = |a|^m$.

Cum $x > 0$, $(x^n)^m = |a|^m \Rightarrow x^n = |a| \Rightarrow x = \sqrt[n]{|a|}$.

Deoarece $x = \sqrt[n]{a^m}$, rezultă că $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{|a|}$.

$$\bullet \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}, a \in \mathbb{R}, a \geq 0, n, m \in \mathbb{N}^*, m \geq 2, n \geq 2$$

Demonstrație:

Notăm $x = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ și $y = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$. Atunci $x^n = \sqrt[m]{a} = y$ și $y^m = a$.

Cum $x^n = y$ obținem:

$$(x^n)^m = y^m = a \Rightarrow x^{nm} = a \Rightarrow x = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

$$\text{Așadar, } \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

EXEMPLE:

$$1. \sqrt{3600} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{100} = 6 \cdot 10 = 60;$$

$$4. \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[4 \cdot 3]{2^4} = \sqrt[3]{2};$$

$$2. \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5};$$

$$5. \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[2 \cdot 3]{2} = \sqrt[6]{2}.$$

$$3. (\sqrt{5})^4 = \sqrt{5^4} = \sqrt{(5^2)^2} = 5^2 = 25;$$

• Fie n un număr natural impar, $n \geq 3$ Atunci:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ pentru orice numerele reale } a \text{ și } b;$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ pentru orice numerele reale } a \text{ și } b, b \neq 0;$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \text{ pentru orice număr real nenul } a \text{ și } m \in \mathbb{Z}^*;$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}, \text{ pentru orice număr real } a \text{ și } m \in \mathbb{N}^*, m \text{ impar};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}, \text{ pentru orice număr real } a \text{ și } m \in \mathbb{N}^*, m \text{ impar}.$$

EXEMPLE:

$$1. \sqrt[3]{27 \cdot 64} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4 = 12;$$

$$4. \sqrt[9]{(-3)^3} = \sqrt[3 \cdot 3]{(-3)^3} = \sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3};$$

$$2. \sqrt[3]{-\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{125}} = -\frac{2}{5};$$

$$5. \sqrt[7]{\sqrt{2}} = \sqrt[7 \cdot 5]{2} = \sqrt[35]{2};$$

$$3. (\sqrt{2})^{15} = \sqrt{2^{15}} = \sqrt{(2^3)^5} = 2^3 = 8;$$

$$6. \sqrt[5]{\sqrt[3]{-4}} = \sqrt[5 \cdot 3]{-4} = \sqrt[15]{-4} = -\sqrt[15]{4}.$$



OBSERVAȚIE.

Se pot înmulți și radicali de ordine diferite. Pentru aceasta, vom aduce radicalii la același ordin, care poate fi cel mai mic multiplu comun al numerelor ce reprezintă ordinele radicalilor.

EXEMPLU:

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{5^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{500}.$$

Introducerea unui factor sub radical

Fie n un număr natural nenul par. Atunci:

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}, \text{ pentru orice numere reale pozitive } a \text{ și } b;$$

$$a \sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^n \cdot b}, \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b, a < 0 \text{ și } b > 0.$$

Fie n un număr natural impar, $n \geq 3$. Atunci:

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}, \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b.$$

EXEMPLE:

$$1. 2 \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{48};$$

$$3. 3 \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{135};$$

$$2. -2 \sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{2^6 \cdot 3} = -\sqrt[6]{192};$$

$$4. -2 \sqrt[5]{10} = \sqrt[5]{(-2)^5 \cdot 10} = \sqrt[5]{-320}.$$

Scoaterea factorilor de sub radicali

Fie n un număr natural nenul par. Atunci:

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = |a| \sqrt[n]{b}, \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b, b \geq 0.$$

Fie n un număr natural impar, $n \geq 3$. Atunci:

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \sqrt[n]{b}, \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b.$$

EXEMPLE:

$$1. \sqrt[4]{405} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 5} = 3 \sqrt[4]{5};$$

$$2. \sqrt[4]{3a^{12}} = |a^3| \sqrt[4]{3}, \text{ pentru orice număr real } a;$$

$$3. \sqrt[3]{-120} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 15} = -2 \sqrt[3]{15}.$$

Expresii conjugate

O expresie care conține radicali se numește **conjugată** unei alte expresii care conține radicali dacă produsul lor se poate scrie fără radicali. În acest caz, cele două **expresii** se numesc **conjugate**.

OBSERVAȚII:

O conjugată a unei expresii care conține radicali se obține având în vedere formulele de calcul prescurtat:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2, \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b,$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3, \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b,$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3, \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b,$$

$$(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) = a^n - b^n, \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b \text{ și } n \in \mathbb{N}^*,$$

$$(a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-1} + b^n) = a^n + b^n, \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b \text{ și } n \in \mathbb{N}^*, n \text{ impar.}$$

- Dacă $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, n par sau $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, n impar, iar $k \in \mathbb{N}^*$, $k < n$, atunci $\sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}} = a$, de unde rezultă că expresiile $\sqrt[n]{a^k}$ și $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ sunt conjugate.

EXEMPLU:

Expresiile $\sqrt[3]{2}$ este $\sqrt[3]{2^2}$ sunt conjugate.

- Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, atunci $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$, de unde rezultă că expresiile $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ și $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ sunt conjugate.

EXEMPLU:

Expresiile $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ și $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ sunt conjugate.

OBSERVAȚIE.

Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ și $c, d \in \mathbb{R}^*$, $a \neq b$, atunci $(c\sqrt{a} + d\sqrt{b})(c\sqrt{a} - d\sqrt{b}) = c^2a - d^2b$, de unde rezultă că expresiile $c\sqrt{a} + d\sqrt{b}$ și $c\sqrt{a} - d\sqrt{b}$ sunt conjugate.

De exemplu, expresiile $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$ și $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$ sunt conjugate.

- Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, n par sau $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, n impar, atunci $(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}) = a - b$, de unde rezultă că expresiile $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ și $\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}$ sunt conjugate.

OBSERVAȚIE.

Dacă $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq b$, atunci $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$, de unde rezultă că expresiile $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ și $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ sunt conjugate.

EXEMPLE:

1. Expresiile $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5}$ și $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25}$ sunt conjugate.

2. Expresiile $\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}$ și $\sqrt[4]{3^3} + \sqrt[4]{3^2 \cdot 2} + \sqrt[4]{3 \cdot 2^2} + \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{27} + \sqrt[4]{18} + \sqrt[4]{12} + \sqrt[4]{8}$ sunt conjugate.

- Dacă $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq -b$, și $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, n impar, atunci $(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots - \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}) = a + b$, de unde rezultă că expresiile $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ și $\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots - \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}$ sunt conjugate.

OBSERVAȚIE.

Dacă $a, b \in \mathbb{R}^*$, atunci $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a + b$, de unde rezultă că expresiile $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ și $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ sunt conjugate.

EXEMPLU:

Expresiile $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{6}$ și $\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{30} + \sqrt[3]{36}$ sunt conjugate.

Operația de eliminare a radicalului/radicalilor de la numitorul unei fracții se numește **raționalizarea numitorului**. Pentru a raționaliza numitorul unei fracții care conține radicali, se amplifică fracția cu o conjugată a numitorului.

EXEMPLE:

$$1. \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2. \frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{5};$$

$$3. \frac{1}{\sqrt[5]{4}} = \frac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{2};$$

$$4. \frac{3}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{(\sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{3})} = \frac{3(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{6 - 3} = \sqrt{6} + \sqrt{3};$$

$$\begin{aligned}
 5. \frac{11}{2\sqrt{3}+1} &= \frac{11(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-1)} = \frac{11(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3})^2-1} = \frac{11(2\sqrt{3}-1)}{12-1} = \frac{11(2\sqrt{3}-1)}{11} = 2\sqrt{3}-1; \\
 6. \frac{1}{2-\sqrt{3}} &= \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}; \\
 7. \frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} &= \frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2})} = \frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}{(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3} = \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{3-2} = \sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}; \\
 8. \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{3\cdot 5}+\sqrt[3]{3^2}} &= \frac{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}{(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{3\cdot 5}+\sqrt[3]{3^2})} = \frac{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}{(\sqrt[3]{5})^3+(\sqrt[3]{3})^3} = \frac{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}{5+3} = \frac{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}{8}; \\
 9. \frac{5}{\sqrt[n]{7}-\sqrt[n]{2}} &= \frac{5(\sqrt[n]{7^{n-1}}+\sqrt[n]{7^{n-1}\cdot 2}+\dots+\sqrt[n]{2^{n-1}})}{(\sqrt[n]{7}-\sqrt[n]{2})(\sqrt[n]{7^{n-1}}+\sqrt[n]{7^{n-1}\cdot 2}+\dots+\sqrt[n]{2^{n-1}})} = \frac{5(\sqrt[n]{7^{n-1}}+\sqrt[n]{7^{n-1}\cdot 2}+\dots+\sqrt[n]{2^{n-1}})}{(\sqrt[n]{7})^n-(\sqrt[n]{2})^n} = \\
 &= \frac{5(\sqrt[n]{7^{n-1}}+\sqrt[n]{7^{n-1}\cdot 2}+\dots+\sqrt[n]{2^{n-1}})}{7-2} = \frac{5(\sqrt[n]{7^{n-1}}+\sqrt[n]{7^{n-1}\cdot 2}+\dots+\sqrt[n]{2^{n-1}})}{5} = \sqrt[n]{7^{n-1}}+\sqrt[n]{7^{n-1}\cdot 2}+\dots+\sqrt[n]{2^{n-1}}.
 \end{aligned}$$

Exerciții rezolvate

1. Raționalizează numitorii următoarelor fracții:

a) $\frac{1}{3\sqrt[3]{9}}$; b) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; c) $\frac{1}{\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{2}}$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned}
 a) \frac{1}{3\sqrt[3]{9}} &= \frac{\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{9}; \\
 b) \frac{1}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})+\sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})-\sqrt{2}}{[(\sqrt{7}+\sqrt{3})-\sqrt{2}][(\sqrt{7}+\sqrt{3})+\sqrt{2}]} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})-\sqrt{2}}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} \\
 &= \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})-\sqrt{2}}{7+2\sqrt{21}+3-2} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})-\sqrt{2}}{8+2\sqrt{21}} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(8-2\sqrt{21})}{(8+2\sqrt{21})(8-2\sqrt{21})} = \\
 &= \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(8-2\sqrt{21})}{8^2-(2\sqrt{21})^2} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(8-2\sqrt{21})}{64-84} = \\
 &= -\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(8-2\sqrt{21})}{20} = -\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(4-\sqrt{21})}{10}; \\
 c) \frac{1}{\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{2}} &= \frac{\sqrt[5]{3^4}-\sqrt[5]{3^3}\cdot\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{2^2}-\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{2^3}+\sqrt[5]{2^4}}{(\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{2})(\sqrt[5]{3^4}-\sqrt[5]{3^3}\cdot\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{2^2}-\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{2^3}+\sqrt[5]{2^4})} = \\
 &= \frac{\sqrt[5]{3^4}-\sqrt[5]{3^3}\cdot\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{2^2}-\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{2^3}+\sqrt[5]{2^4}}{(\sqrt[5]{3})^5+(\sqrt[5]{2})^5} = \\
 &= \frac{\sqrt[5]{81}-\sqrt[5]{54}+\sqrt[5]{36}-\sqrt[5]{24}+\sqrt[5]{16}}{3+2} = \frac{\sqrt[5]{81}-\sqrt[5]{54}+\sqrt[5]{36}-\sqrt[5]{24}+\sqrt[5]{16}}{5}.
 \end{aligned}$$

2. a) Fie $A, B \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$, $B \geq 0$ astfel încât $A^2 - B \geq 0$. Demonstrează că

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}, \text{ unde } C = \sqrt{A^2 - B} \text{ (formula radicalilor compuși).}$$

b) Calculează $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$.

c) Demonstrează că $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}} = 2$, pentru orice număr real a , $1 \leq a \leq 2$.



Rezolvare:

a) Notăm $x = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$. Atunci:

$$x^2 = \left(\sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}} \right)^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{A+C}{2} + 2\sqrt{\frac{A+C}{2} \cdot \frac{A-C}{2}} + \frac{A-C}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{A+C}{2} + \frac{A-C}{2} + 2\sqrt{\frac{A+C}{2} \cdot \frac{A-C}{2}} \Leftrightarrow x^2 = A + 2\sqrt{\frac{A^2 - C^2}{4}} \Leftrightarrow x^2 = A + \sqrt{A^2 - C^2}.$$

$$B = A^2 - C^2 \Rightarrow \sqrt{A^2 - C^2} = \sqrt{B}.$$

Deci $x^2 = A + \sqrt{B}$ și $x = \sqrt{A + \sqrt{B}}$ (deoarece $x \geq 0$).

$$\text{Așadar, } \sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}.$$

În mod asemănător se demonstrează că $\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}}$.b) Calculează $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$.

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{5 + \sqrt{2^2 \cdot 6}} = \sqrt{5 + \sqrt{24}}$$

Aplicăm formula radicalilor compuși pentru $A = 5$, $B = 24$, $C = \sqrt{25 - 24} = \sqrt{1} = 1$ și obținem:

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} + \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

$$c) \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} = \sqrt{a + \sqrt{4(a-1)}} = \sqrt{a + \sqrt{4a-4}}.$$

Calculăm C din formula radicalilor compuși ($A = a$, $B = 4a - 4$):

$$C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{a^2 - (4a - 4)} = \sqrt{a^2 - 4a + 4} = \sqrt{(a-2)^2} = |a-2|. \quad (1)$$

Cum $1 \leq a \leq 2$, obținem $a - 2 \leq 0$, de unde rezultă că $|a - 2| = 2 - a$. (2)Din relațiile (1) și (2) rezultă că $C = 2 - a$.

Aplicăm formula radicalilor compuși și obținem

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} = \sqrt{\frac{a+2-a}{2}} + \sqrt{\frac{a-2+a}{2}} = 1 + \sqrt{a-1}. \quad (3)$$

$$\text{Analog, } \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}} = \sqrt{a - \sqrt{4(a-1)}} = \sqrt{a - \sqrt{4a-4}} = \sqrt{\frac{a+2-a}{2}} - \sqrt{\frac{a-2+a}{2}} = 1 - \sqrt{a-1}. \quad (4)$$

$$\text{Din relațiile (3) și (4) rezultă că } \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}} = 1 + \sqrt{a-1} + 1 - \sqrt{a-1} = 2.$$

Aplic

1. Calculează:

a) $(\sqrt{24} - \sqrt{18})(2\sqrt{6} + 3\sqrt{2})$;

b) $\sqrt{50} + \sqrt{32} - \sqrt{98} - \sqrt{8}$;

c) $\sqrt{3}(\sqrt{27} - \sqrt{12})$;

d) $2\sqrt{75} + 3\sqrt{48} - \sqrt{108} - 3\left(\sqrt{27} - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$;

e) $(2\sqrt{2} - 3)(2\sqrt{2} + 3)$;

f) $5\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{16} + 4\sqrt[3]{250} - 3\sqrt[3]{128}$;

g) $\sqrt[5]{96} + \sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{729} - \sqrt[5]{10^6}$;

h) $2\sqrt[3]{3000} - 2\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} - 3\sqrt[3]{375}$;

i) $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4} + 9)$;

j) $(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{625} + 3\sqrt[3]{25} + 9)$.

2. Verifică dacă numerele reale $3 - \sqrt{5}$, $2\sqrt{2}$, $6 + 2\sqrt{5}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.3. Demonstrează că $\sqrt[3]{(7 - \sqrt{3})^3} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = 6$.

4. Demonstrează că $(6 + \sqrt{6}) \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4}}{\sqrt{20}} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{\sqrt{30}} \right)$ este număr natural.
5. Scrie fiecare număr folosind un singur radical:
- a) $\sqrt{\sqrt{25}}$; c) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$; e) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{7}}$; g) $\sqrt[3]{\sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{2}}$; i) $\sqrt[5]{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}}$;
 b) $\sqrt{\sqrt{3}}$; d) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{4}}}$; f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}}$; h) $\sqrt[4]{\sqrt{9} \cdot \sqrt[5]{3}}$; j) $\sqrt[7]{\sqrt[3]{a} \sqrt[5]{b}}, a, b \in \mathbb{R}$.
6. Ordonează crescător numerele reale:
- a) $7\sqrt{2}, 5\sqrt{3}, 2\sqrt{15}$; c) $\sqrt{7} - \sqrt{5}; \sqrt{10} - \sqrt{7}$; e) $\sqrt[3]{27}, 3, \sqrt[4]{81}$;
 b) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[6]{10}$; d) $2\sqrt[5]{27}, 3\sqrt[5]{5}, 4\sqrt[5]{2}$; f) $\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{3}}{5}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}}$.
7. Raționalizează numitorii următoarelor fracții:
- I. a) $\frac{2}{\sqrt{7}}$; b) $\frac{6}{\sqrt{27}}$; c) $\frac{5}{\sqrt[3]{49}}$; d) $\frac{1}{\sqrt[5]{-64}}$; e) $\frac{x}{\sqrt[2n+1]{a^3 b^5 c^n}}, a, b, c \in \mathbb{R}^*$.
 II. a) $\frac{10}{\sqrt{6} - 1}$; b) $\frac{24}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$; c) $\frac{4}{2\sqrt{5} - 5\sqrt{2}}$; d) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{2}}}$; e) $\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2}}$.
 III. a) $\frac{1}{1 - 2\sqrt[3]{2}}$; b) $\frac{16}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}}$; c) $\frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}}$; d) $\frac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}}$; e) $\frac{10}{\sqrt[3]{9} - 2}$.
 IV. a) $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{2}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{2} - 3}$;
 b) $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{2}}$; d) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$.
 V. a) $\frac{6}{\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{3}}$; b) $\frac{1}{\sqrt[7]{2} + 1}$; c) $\frac{1}{\sqrt[6]{2} - \sqrt[6]{3}}$; d) $\frac{1}{\sqrt[5]{\sqrt{2} - 1}}$.
8. Calculează:
- a) $\frac{2}{4 + \sqrt{14}} + \frac{2}{4 - \sqrt{14}}$; c) $\frac{\sqrt{8} + 8}{\sqrt{8} - 8} + \frac{\sqrt{8} - 1}{\sqrt{8} + 1} - \frac{\sqrt{8} + 8}{\sqrt{8}}$; e) $\frac{\sqrt{6} + 3}{\sqrt{6} - 3} + \frac{\sqrt{6} - 1}{\sqrt{6} + 1} - \frac{\sqrt{6} + 3}{\sqrt{6}}$.
 b) $\frac{5}{7 + 4\sqrt{3}} - \frac{5}{7 - 4\sqrt{3}}$; d) $\frac{\sqrt{7} - 3}{\sqrt{7} + 3} - \frac{\sqrt{7} + 7}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{7} + 7}{\sqrt{7} - 7}$.
9. Demonstrează că:
- a) $\sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}} = 1$; c) $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} - \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} = 2$;
 b) $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = 2$; d) $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{-14\sqrt{2} + 20} = 4$.
10. a) Verifică dacă numărul real $a = \sqrt[3]{6 + \sqrt{35}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{35}}$ este soluție a ecuației $x^3 - 3x - 12 = 0$.
 b) Demonstrează că numărul real $a = \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{6}}$ este soluție a ecuației $x^3 - 3x = 10$.
11. Calculează:
- a) $\sqrt{11 + 4\sqrt{7}} - \sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$; e) $\sqrt{2 + 2\sqrt{16 + 6\sqrt{7}}}$;
 b) $\sqrt{23 + 8\sqrt{7}} + \sqrt{23 - 8\sqrt{7}}$; f) $\sqrt{20 + 6\sqrt{10 - 2\sqrt{9 + 2\sqrt{20}}}}$;
 c) $\frac{\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}}{\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}} - \frac{\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}{\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}}$; g) $\sqrt{2 - 2\sqrt{2 - 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}} + \sqrt{2 + 2\sqrt{2 + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}}$.
 d) $\frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}}{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}} + \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}{\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}}$.
12. Determină numerele raționale a și b pentru care $\sqrt{17 + 4\sqrt{15}} = a\sqrt{3} + b\sqrt{5}$.

EXERSEZ!

1. Calculează:

- a) $\sqrt{1600}$;
 b) $\sqrt[3]{3600}$;
 c) $\sqrt{529}$;
 d) $\sqrt[3]{64}$;
 e) $\sqrt[3]{343}$;
 f) $\sqrt[3]{-216}$;
 g) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$;
 h) $\sqrt[3]{\frac{729}{64}}$;
 i) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{256}}{10^6}}$;
 j) $\sqrt[4]{0,0016}$;
 k) $\sqrt[5]{-0,00001}$;
 l) $\frac{\sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[3]{27}}{\sqrt{36} \cdot \sqrt[7]{128}}$.

2. Introdu factorii sub radical:

- a) $5\sqrt{3}$;
 b) $3\sqrt{5}$;
 c) $2\sqrt[4]{3}$;
 d) $3\sqrt[4]{2}$;
 e) $2a\sqrt{7b}, a, b \in \mathbb{R}, b > 0$;
 f) $3ac\sqrt{6bd}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, b > 0, d > 0$;
 g) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{-\frac{4}{9}}$;
 h) $\frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$;
 i) $\frac{a}{b}\sqrt[7]{\frac{b^3}{a^4}}, a, b \in \mathbb{R}^*$.

3. Scoate factorii de sub radical:

- a) $\sqrt{480}$;
 b) $\sqrt[5]{486}$;
 c) $\sqrt[3]{a^7 b^5 c^3 d}$;
 d) $\sqrt[n]{\frac{2^{n+2} \cdot 3^{n-1}}{5^{2n+3}}}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$;
 e) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{100}}}}$.

3.3. Funcția radical

Descopăr

Un biolog studiază distanța medie parcursă zilnic de un animal sălbatic în funcție de aria suprafeței habitatului disponibil. În figura 1 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x}$ care exprimă dependența dintre distanța medie parcursă de animalul sălbatic și suprafața habitatului. Pe axa Ox este reprezentată aria habitatului exprimată în km^2 , iar pe axa Oy este reprezentată distanța medie zilnică parcursă de animalul sălbatic, exprimată în km .

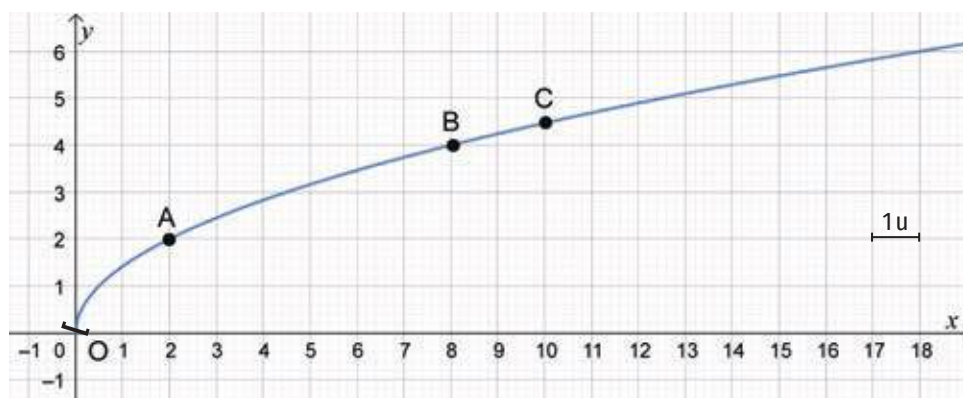


Figura 1

- Determină $f(2)$.
- Încadrează $f(6)$ între două numere întregi consecutive.
- Precizează abscisa punctului C.
- Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuațiile $f(x) = 4$ și $f(x) = x$.
- Ce se întâmplă cu distanța parcursă de animal dacă suprafața habitatului se mărește?
- Determină mulțimea numerelor reale m pentru care $f(m) < 4$.
- Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuația $f(x) > x + 1$.
- Determină distanța medie parcursă zilnic de animal dacă aria habitatului este egală cu 18 km^2 .
- Determină aria habitatului necesară pentru ca animalul să parcurgă zilnic 4 km .
- Pentru ce valori ale ariei habitatului distanța medie parcursă zilnic depășește 2 km ?
- Dacă aria habitatului se dublează, distanța parcursă se dublează? Justifică.
- Dacă aria habitatului crește de la 2 km^2 la 8 km^2 , cu cât crește distanța? Dar dacă aria crește de la 8 km^2 la 18 km^2 ? Ce observi?
- Dacă autoritățile stabilesc că aria maximă disponibilă este de 50 km^2 , care este distanța maximă estimativă pe care o parcurge animalul zilnic?

Învăț

Definiție. Fie n un număr natural, $n \geq 2$. Funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, se numește funcție radical.

Se consideră funcțiile $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $g(x) = \sqrt{x}$, și $h: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

Vom reprezenta grafic cele două funcții în același reper cartezian xOy (figura 2), folosind tabelele de valori de mai jos, dar și folosind un instrument digital (GeoGebra/Desmos).

x	0	1	4	9	16
$g(x) = \sqrt{x}$	0	1	2	3	4

x	0	1	8	27	64
$h(x) = \sqrt[3]{x}$	0	1	2	3	4

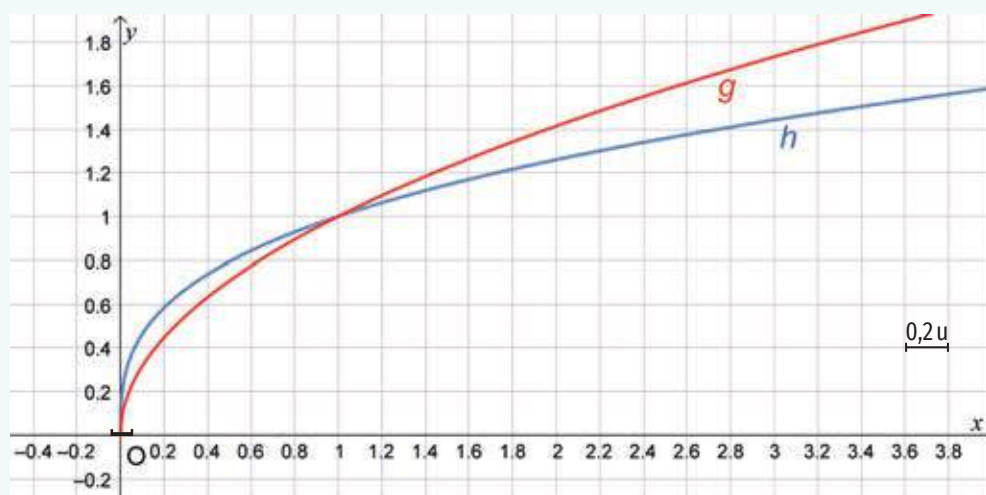


Figura 2

Reprezentarea grafică a funcției $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, are o comportare asemănătoare cu reprezentările grafice ale funcțiilor $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $g(x) = \sqrt{x}$, și $h: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

Studiind reprezentările grafice din figura 2, deducem următoarele proprietăți ale funcției

$f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

- $\text{Im } f = [0, +\infty)$.
- Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axele de coordonate Ox și Oy în punctul $O(0, 0)$.
- Funcția f este concavă.
- Funcția f este strict crescătoare.
- Funcția f este injectivă și surjectivă, deci este bijectivă.

În continuare vom demonstra câteva dintre aceste proprietăți.

Teorema 1. Funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, este strict crescătoare.

Demonstrație:

Fie $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, $x_1 < x_2$.

Cum $x_1 = (\sqrt[n]{x_1})^n$ și $x_2 = (\sqrt[n]{x_2})^n$, rezultă că $(\sqrt[n]{x_1})^n < (\sqrt[n]{x_2})^n$. Funcția putere este strict crescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$, deci $\sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2}$, ceea ce este echivalent cu $f(x_1) < f(x_2)$.

Teorema 2. Funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, este bijectivă.

Demonstrație:

Deoarece funcția f este strict crescătoare, rezultă că este injectivă. (1)

Fie $y \in [0, +\infty)$, astfel încât $f(x) = y$. Atunci, $\sqrt[n]{x} = y$, de unde obținem $x = y^n \in [0, +\infty)$. De aici rezultă că funcția f este surjectivă. (2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă că funcția f este bijectivă.

OBSERVAȚIE.

Deoarece funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, este bijectivă, rezultă că aceasta este inversabilă, inversa ei fiind funcția $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $g(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

În figura 3 sunt reprezentate grafic funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$, și inversa acesteia, funcția $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $g(x) = x^2$.

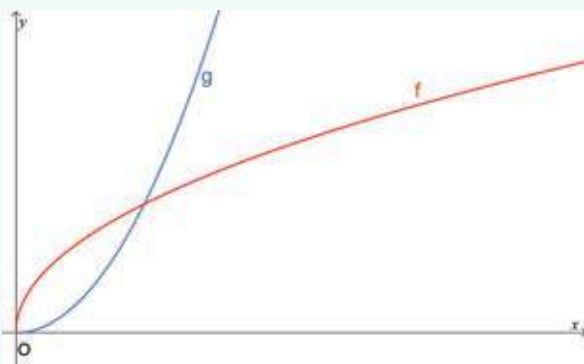


Figura 3

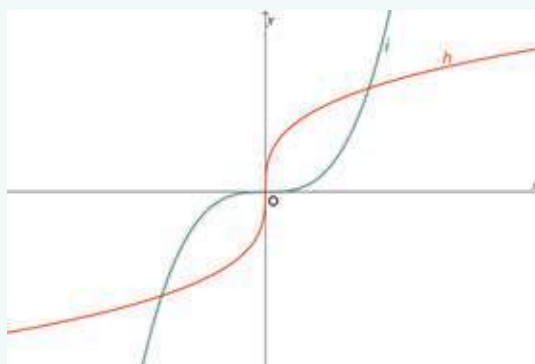


Figura 4

OBSERVAȚIE.

Dacă n este un număr natural impar, se poate defini funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt[n]{x}$. Această funcție este strict crescătoare, convexă pe intervalul $(-\infty, 0]$ și concavă pe intervalul $[0, +\infty)$ și este bijectivă, inversa acesteia fiind funcția $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, n număr impar.

În figura 4 sunt reprezentate grafic funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$, și inversa acesteia, funcția $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i(x) = x^3$.

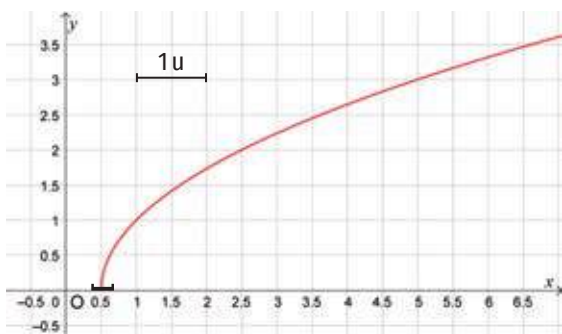


Figura 5

Exerciții rezolvate

1. Determină domeniul maxim de definiție și imaginea funcției f definită prin $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

Rezolvare:

Reprezentăm grafic funcția f (figura 5) și observăm că domeniul maxim de definiție este $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Domeniul maxim de definiție și imaginea funcției f se pot obține și astfel:

$2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$ Domeniul maxim de definiție al funcției f este $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \\ f \text{ e crescătoare} \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow \text{Im}(f) = [0, \infty).$$

2. Compară numerele reale:

a) $3\sqrt[3]{4}$ și $4\sqrt[3]{2}$;

b) $\sqrt[4]{4}$ și $\sqrt[5]{5}$.

Rezolvare:

a) Funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, este crescătoare.

$$3\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{108}$$

$$4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{128}$$

$$108 < 128$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{108} < \sqrt[3]{128} \Rightarrow 3\sqrt[3]{4} < 4\sqrt[3]{2}$$

b) Pentru a compara numerele reale $\sqrt[4]{4}$ și $\sqrt[5]{5}$, trebuie să aducem radicalii la același ordin.

Funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt[20]{x}$ este crescătoare.

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[5 \cdot 4]{4^5} = \sqrt[20]{1024}$$

$$\sqrt[5]{5} = \sqrt[4 \cdot 5]{5^4} = \sqrt[20]{625}$$

$$1024 > 625$$

$$\Rightarrow \sqrt[20]{1024} > \sqrt[20]{625} \Rightarrow \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5}$$

3. În figura 6 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția f .

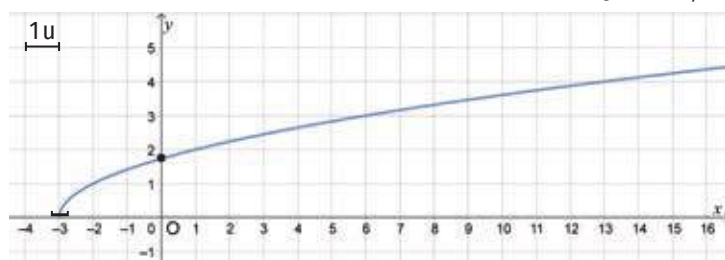


Figura 6

a) Precizează domeniul de definiție al funcției f și mulțimea valorilor funcției f .

b) Calculează $f(-3) + f(6) - f(13)$.

c) Scrie coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și axa Ox .

d) Compară $f(1)$ cu $f(6)$.

e) Stabilește monotonia funcției f .

f) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = 3$.

g) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) < 2$.

Rezolvare:

a) Domeniul de definiție al funcției f este intervalul $[-3, +\infty)$ și $\text{Im}(f) = [0, \infty)$.

b) $f(-3) + f(6) - f(13) = 0 + 3 - 4 = -1$

c) Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Ox în punctul de coordonate $(-3, 0)$.

d) Observând reprezentarea grafică a funcției f , deducem că $f(1) < f(6)$.

e) Observând reprezentarea grafică a funcției f , deducem că funcția f este strict crescătoare.

f) Dreapta de ecuație $y = 3$ intersectează reprezentarea grafică a funcției f într-un singur punct (funcția este strict crescătoare) care are coordonatele $(6, 3)$, deci soluția ecuației $f(x) = 3$ este $x = 6$ (figura 7).

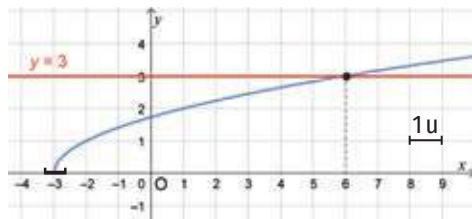


Figura 7

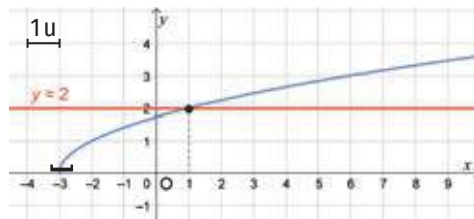


Figura 8

g) Dreapta de ecuație $y = 2$ intersectează reprezentarea grafică a funcției f într-un singur punct (funcția este strict crescătoare) care are coordonatele $(1, 2)$. Pentru a rezolva inecuația $f(x) < 2$, identificăm porțiunea din reprezentarea grafică a funcției f situată sub dreapta de ecuație $y = 2$. Proiectând punctele corespunzătoare pe axa Ox , obținem $x \in (-3, 1)$, care reprezintă mulțimea soluțiilor inecuației $f(x) < 2$ (figura 8).

3. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x} = 3 - 2x$.

Rezolvare:

Reprezentăm grafic funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3 - 2x$, în același reper cartezian xOy cu ajutorul unui instrument digital (*GeoGebra* sau *Desmos*) (figura 9). Ecuația $\sqrt[3]{x} = 3 - 2x$ este echivalentă cu ecuația $f(x) = g(x)$.

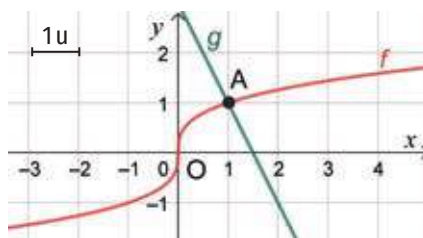


Figura 9

Reprezentările grafice ale celor două funcții se intersectează într-un singur punct (funcția f este strict crescătoare, iar funcția g este strict descrescătoare), care are coordonatele $(1, 1)$, de unde rezultă că ecuația $f(x) = g(x)$ are soluția unică $x = 1$. Așadar, soluția ecuației $\sqrt[3]{x} = 3 - 2x$ este $x = 1$.

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

- Determină valoarea minimă și valoarea maximă a funcției f pe intervalul $[1, 8]$.
- Determină imaginea intervalului $[-8, +\infty)$ prin funcția f .

Rezolvare:

- Funcția f este strict crescătoare, de unde rezultă că $f(1) \leq f(x) \leq f(8)$, pentru orice număr real $x \in [1, 8]$. Așadar, $1 \leq f(x) \leq 2$, pentru orice număr real $x \in [1, 8]$. Pe intervalul $[1, 8]$, valoarea minimă a funcției f este 1, iar valoarea maximă este 2.
- Funcția f este strict crescătoare, de unde rezultă că $f(-8) \leq f(x)$, pentru orice număr real $x \in [-8, +\infty)$. Așadar, $-2 \leq f(x)$, pentru orice număr real $x \in [-8, +\infty)$ și $f([-8, +\infty)) = [-2, +\infty)$.

Aplic

1. Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, unde D reprezintă domeniul maxim de definiție al funcției f . Determină mulțimea D .

a) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$; c) $f(x) = \sqrt[4]{1-2x}$; e) $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{x^2-4x}}$;
 b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}$; d) $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt[5]{1-x}$; f) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1-\sqrt{x}}}$.

2. În figura 10 sunt reprezentate grafic funcțiile f , g și h .

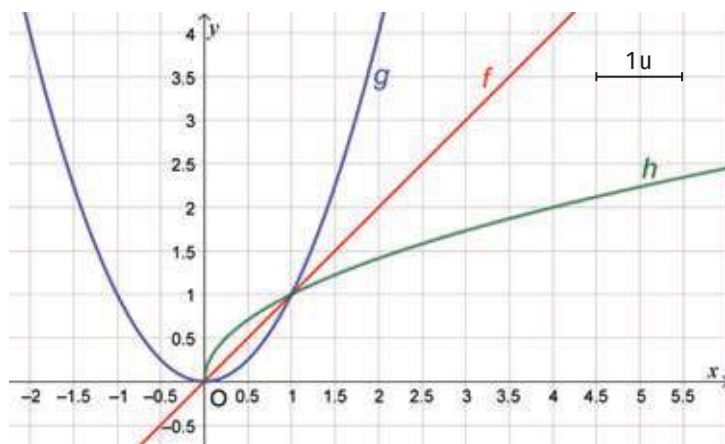


Figura 10

- a) Precizează domeniul de definiție și imaginea fiecăreia dintre funcțiile f , g și h .
 b) Identifică punctul de intersecție dintre graficele funcțiilor f , g și h și axe de coordonate Ox și Oy și scrie coordonatele acestuia.
 c) Precizează monotonia fiecăreia dintre funcțiile f , g și h .
 d) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $h(x) = 2$.
 e) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $h(x) \geq 1$.
 f) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = h(x)$.
 g) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $h(x) < g(x)$.
 3. Se consideră funcția $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-2}$.
 a) Reprezintă grafic funcția f cu ajutorul unui instrument digital.
 b) Identifică punctul de intersecție dintre graficul funcției f și axa Ox și scrie coordonatele acestuia.
 c) Precizează mulțimea valorilor funcției f .
 d) Scrie coordonatele a patru puncte care aparțin reprezentării grafice a funcției f .
 e) Compară $f(6)$ cu $f(11)$.
 f) Precizează monotonia funcției f .
 g) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = 2$.
 h) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) \geq 4$.
 i) Determină mulțimea valorilor numărului real x pentru care $2 < f(x) < 4$.

4. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -\sqrt[3]{2x+1}$.
- Reprezintă grafic, în același reper cartezian xOy , cele două funcții cu ajutorul unui instrument digital.
 - Precizează mulțimea valorilor funcțiilor f și g .
 - Precizează coordonatele a cel puțin două puncte care aparțin reprezentării grafice a funcției f .
 - Precizează coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentările grafice ale funcțiilor f și g .
 - Stabilește monotonia fiecăreia dintre funcțiile f și g .
5. Determină valorile numărului real m pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este bine definită.
- $f(x) = \sqrt{x^2 + (m-3)x + 9}$; b) $f(x) = \sqrt{mx^2 - 4x + m}$.
6. Stabilește domeniul maxim de definiție D și semnul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, folosind reprezentarea grafică:
- $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+2}$; b) $f(x) = \sqrt[7]{x} - \sqrt[5]{x}$; c) $f(x) = \sqrt{|x|} - \sqrt[4]{|x|}$.
7. Autoritățile analizează impactul construirii unei șosele asupra mediului. Funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = 20\sqrt{x}$, exprimă dependența dintre suprafața zonei afectate (exprimată în ha) și lungimea șoselei (exprimată în km).
- Reprezintă grafic funcția f cu ajutorul unui instrument digital.
 - Punctul $A(4, 40)$ aparține reprezentării grafice a funcției f ?
 - Scrie coordonatele a trei puncte care aparțin reprezentării grafice a funcției f și interpretează semnificația practică a acestora.
 - Câte hectare are zona afectată de construirea unei șosele cu lungimea egală cu 16 km?
 - Ce lungime are o șosea a cărei construire afectează o zonă cu suprafața egală cu 30 ha?
 - Autoritățile impun ca zona afectată să nu depășească 100 ha. Care este lungimea maximă a șoselei?
8. Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2}$, unde D reprezintă domeniul maxim de definiție al funcției f .
- Precizează domeniul maxim de definiție și imaginea funcției f .
 - Studiază monotonia funcției f .
 - Funcția f este bijectivă?
9. Se consideră funcțiile $f: [4, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x-4}$, și $g: [0, +\infty) \rightarrow [4, +\infty)$, $g(x) = x^2 + 4$.
- Arată că funcția g este inversa funcției f .
 - Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(g(x)) + g(f(x)) = 10$.

3.4. Ecuații și inecuații cu radicali

Descopăr

Un echipaj de poliție studiază urmele de frânare rectilinii lăsate de un autoturism pe asfalt. Specialiștii în expertiză auto stabilesc că, pe acel tip de carosabil, viteza inițială a mașinii (exprimată în m/s) depinde de lungimea urmelor de frânare (exprimată în metri) conform relației $v(d) = 5,5\sqrt{d}$.

- Determină viteza cu care rula automobilul în momentul angajării în frânare, știind că urmele de frânare au lungimea de 16 m. Verifică valoarea găsită și exprimă rezultatul în kilometri pe oră (km/h).
- Pe acel sector de drum, limita legală de viteză este de 50 km/h. În cazul în care lungimea urmelor de frânare depășește 9 metri, ce poți spune despre respectarea limitei de viteză de către șofer?
- Cum variază viteza autoturismului pe măsură ce lungimea urmelor de frânare crește?

Învăț

Se numește **ecuație/inecuație irațională** o ecuație/inecuație în care necunoscuta/necunoscutele se află sub unul sau mai mulți radicali. A rezolva o ecuație/inecuație irațională înseamnă a-i determina soluțiile.

EXEMPLE:

- $\sqrt{x+2} = 3;$
- $2 - \sqrt[3]{3x+1} = x;$
- $\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x-2} + \sqrt[6]{3} \geq x+4;$
- $\sqrt{x} < 4.$

Înainte de a începe rezolvarea efectivă a unei ecuații/inecuații cu radicali, trebuie să determinăm mulțimea valorilor necunoscutei pentru care există radicalii (ne amintim că radicalii de ordin par sunt definiți numai pentru numere care nu sunt negative).

În mod obișnuit, pentru a rezolva o ecuație cu radicali, se elimină radicalul sau radicalii prin diverse transformări. Uneori, în urma transformărilor efectuate, se obțin ecuații care nu sunt echivalente cu cele inițiale. De aceea este necesar să se verifice dacă soluțiile acestor ecuații sunt soluții ale ecuației inițiale.

Exerciții rezolvate

- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

$$a) \sqrt[4]{2x-5} = 3; \quad b) \sqrt[3]{x+4} - 2 = 0; \quad c) \sqrt{1+2x} = 1-x; \quad d) x + \sqrt[5]{1+x-x^5} = 0.$$

Rezolvare:

- Scriem condiția de existență a radicalului $2x-5 \geq 0$, de unde rezultă $x \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

$$\sqrt[4]{2x-5} = 3 \Rightarrow 2x-5 = 3^4 \Rightarrow 2x = 86 \Rightarrow x = 43$$

Cum $43 \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$, soluția ecuației este $x = 43$.

$$b) \sqrt[3]{x+4} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+4} = 2 \Leftrightarrow x+4 = 2^3 \Leftrightarrow x = 8 - 4 \Leftrightarrow x = 4$$

c) Scriem condiția de existență a radicalului $1+2x \geq 0$, de unde rezultă $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$. (1)

Cum membrul stâng al ecuației este mai mare sau egal cu 0, pentru ca ecuația să aibă soluție este necesar ca și membrul drept să nu fie negativ (această condiție se mai numește condiție de compatibilitate): $1-x \geq 0$, de unde rezultă $x \in (-\infty, 1]$. (2)

Din relațiile (1) și (2) obținem $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \cap (-\infty, 1]$, de unde rezultă $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

$$\sqrt{1+2x} = 1-x \Rightarrow 1+2x = (1-x)^2 \Rightarrow 1+2x = 1-2x+x^2 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=4$$

Cum $0 \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ și $4 \notin \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, rezultă că soluția ecuației este $x = 0$.

$$d) x + \sqrt[5]{1+x-x^5} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[5]{1+x-x^5} = -x \Leftrightarrow 1+x-x^5 = (-x)^5 \Leftrightarrow 1+x-x^5 = -x^5 \Leftrightarrow 1+x=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

Așadar, soluția ecuației este $x = -1$.

2. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

$$a) \sqrt{2x^2+x+6} - \sqrt{2x^2+x+1} = 1; \quad b) \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x+3}.$$

Rezolvare:

a) Scriem condițiile de existență a radicalilor:

$$2x^2+x+6 \geq 0, \text{ de unde rezultă } x \in \mathbb{R}; \quad (3)$$

$$2x^2+x+1 \geq 0, \text{ de unde rezultă } x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Din relațiile (3) și (4) obținem $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2+x+6} - \sqrt{2x^2+x+1} &= 1 \Rightarrow \\ \frac{(\sqrt{2x^2+x+6} - \sqrt{2x^2+x+1})(\sqrt{2x^2+x+6} + \sqrt{2x^2+x+1})}{\sqrt{2x^2+x+6} + \sqrt{2x^2+x+1}} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{2x^2+x+6} + \sqrt{2x^2+x+1}} &= 1 \Rightarrow \sqrt{2x^2+x+6} + \sqrt{2x^2+x+1} = 5 \\ \left. \begin{aligned} \sqrt{2x^2+x+6} - \sqrt{2x^2+x+1} &= 1 \\ \sqrt{2x^2+x+6} + \sqrt{2x^2+x+1} &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{2x^2+x+6} &= 3 \text{ și } \sqrt{2x^2+x+1} = 2 \\ \sqrt{2x^2+x+6} = 3 \Rightarrow 2x^2+x+6 &= 9 \Rightarrow 2x^2+x-3 = 0 \Rightarrow x_1=1, x_2=-\frac{3}{2} \\ (\sqrt{2x^2+x+1} = 2 \Rightarrow 2x^2+x+1 &= 4 \Rightarrow 2x^2+x-3 = 0 \Rightarrow x_1=1, x_2=-\frac{3}{2}). \end{aligned}$$

Așadar, soluțiile ecuației sunt: $x = 1$ și $x = -\frac{3}{2}$.

$$b) \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x+3} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x-2})^3 = (\sqrt[3]{2x+3})^3$$

Aplicăm formula de calcul prescurtat $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, $(\forall) a, b \in \mathbb{R}$ și obținem:

$$\begin{aligned} x+5+x-2+3\sqrt[3]{x+5} \cdot \sqrt[3]{x-2} \cdot \underbrace{(\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x-2})}_{\sqrt[3]{2x+3}} &= 2x+3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x+3+3\sqrt[3]{x+5} \cdot \sqrt[3]{x-2} \cdot \sqrt[3]{2x+3} &= 2x+3 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x+5} \cdot \sqrt[3]{x-2} \cdot \sqrt[3]{2x+3} = 0 \Leftrightarrow \\ \sqrt[3]{x+5} = 0 \text{ sau } \sqrt[3]{x-2} = 0 \text{ sau } \sqrt[3]{2x+3} = 0 &\Leftrightarrow x = -5 \text{ sau } x = 2 \text{ sau } x = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Așadar, $x \in \left\{-5, -\frac{3}{2}, 2\right\}$.

3. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2 + x - 6 = \sqrt{2x^2 + 2x + 12}$.

Rezolvare:

Scriem condiția de existență a radicalului $2x^2 + 2x + 12 \geq 0$, de unde rezultă $x \in \mathbb{R}$. (5)

Scriem condiția de compatibilitate $x^2 + x - 6 \geq 0$, de unde rezultă $x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$. (6)

Din relațiile (5) și (6) obținem $x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$.

$$x^2 + x - 6 = \sqrt{2x^2 + 2x + 12} \Rightarrow (x^2 + x - 6)^2 = 2(x^2 + x) + 12 \Rightarrow$$

$$(x^2 + x)^2 - 12(x^2 + x) + 36 = 2(x^2 + x) + 12 \Rightarrow (x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24 = 0$$

Dacă notăm $x^2 + x = t$, atunci ecuația $(x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24 = 0$ devine $t^2 - 14t + 24 = 0$.

$$t^2 - 14t + 24 = 0 \Rightarrow t_1 = 12, t_2 = 2$$

$$t = 12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 3$$

$$t = 2 \Rightarrow x^2 + x = 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1$$

Cum $-2 \notin (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$, $1 \notin (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$, $-4 \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$, $3 \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$, soluțiile ecuației sunt $x = -4$ și $x = 3$.

4. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $\sqrt{x} > 3$; b) $\sqrt[4]{x+2} \leq 2$; c) $\sqrt[3]{1-x} < 4$; d) $\sqrt[5]{2x+3} \geq 1$.

Rezolvare:

a) Scriem condiția de existență a radicalului $x \geq 0$, de unde rezultă $x \in [0, +\infty)$. (7)

$$\sqrt{x} > 3 \Rightarrow x > 9 \Rightarrow x \in (9, +\infty) \quad (8)$$

Din relațiile (7) și (8) rezultă că $x \in [0, +\infty) \cap (9, +\infty)$, adică $x \in (9, +\infty)$.

b) Scriem condiția de existență a radicalului $x + 2 \geq 0$, de unde rezultă $x \in [-2, +\infty)$. (9)

$$\sqrt[4]{x+2} \leq 2 \Rightarrow x+2 \leq 2^4 \Rightarrow x \leq 14 \Rightarrow x \in (-\infty, 14] \quad (10)$$

Din relațiile (9) și (10) rezultă că $x \in [-2, +\infty) \cap (-\infty, 14]$, adică $x \in [-2, 14]$.

$$c) \sqrt[3]{1-x} < 4 \Leftrightarrow 1-x < 4^3 \Leftrightarrow -x < 63 \Leftrightarrow x > -63 \Leftrightarrow x \in (-63, +\infty).$$

$$d) \sqrt[5]{2x+3} \geq 1 \Leftrightarrow 2x+3 \geq 1^5 \Leftrightarrow 2x \geq -2 \Leftrightarrow x \in [-1, +\infty).$$

5. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $\sqrt{x+1} > x-1$.

Rezolvare:

Scriem condiția de existență a radicalului $x+1 \geq 0$, de unde rezultă $x \in [-1, +\infty)$.

Cazul I. Dacă $x \in [-1, +\infty)$ și $x-1 < 0$, ceea ce este echivalent cu $x \in [-1, 1)$, atunci $\sqrt{x+1} > x-1$, pentru orice număr real $x \in [-1, 1)$ (membrul stâng este pozitiv, iar membrul drept este negativ). (11)

Cazul II. Dacă $x \in [-1, +\infty)$ și $x-1 \geq 0$, ceea ce este echivalent cu $x \in [1, +\infty)$, atunci:

$$\sqrt{x+1} > x-1 \Rightarrow x+1 > (x-1)^2 \Rightarrow x+1 > x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x < 0 \Rightarrow x \in (0, 3)$$

Cum $x \in [1, +\infty)$, obținem $x \in (0, 3) \cap [1, +\infty)$, de unde rezultă $x \in [1, 3)$. (12)

Din relațiile (11) și (12) rezultă că $x \in [-1, 1) \cup [1, 3)$, adică $x \in [-1, 3)$.

Aplic

1. Arată că următoarele ecuații nu au soluții, fără a le rezolva:

a) $\sqrt{x+2} = -2$;

c) $\sqrt[4]{2-x} = \sqrt[3]{x-8}$;

b) $\sqrt{4-x} - \sqrt{x-7} = 2$;

d) $\sqrt{x} + \sqrt{x+10} = 3$.

2. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

A. a) $\sqrt{x-1} = 3$;

e) $\sqrt[3]{1-4x^2} = 1$;

b) $\sqrt{2+2x} = 4$;

f) $\sqrt[3]{2x-1} = -3$;

c) $\sqrt{3x-6} + 2 = 5$;

g) $3 - \sqrt[3]{x+2} = 1$;

d) $\sqrt{4-x} - 4 = 2$;

h) $4 - \sqrt[3]{x^2-1} = 2$.

B. a) $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-1}$;

c) $\sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{2x-3}$;

b) $\sqrt{1-3x} = \sqrt{5-x}$;

d) $\sqrt[3]{5x-2} = \sqrt[3]{x}$.

C. a) $2\sqrt{x+1} = x+1$;

e) $x - \sqrt{2x+5} = -1$;

b) $\sqrt{2x+3} = x-1$;

f) $\sqrt{x^2+3x+2} - 2x = -x+2$;

c) $\sqrt{x+3} - x = 1$;

g) $\sqrt[3]{x^3+1} = 1+x$;

d) $\sqrt{3x-2} = 2-x$;

h) $\sqrt[3]{x^3+8} - x = 2$.

D. a) $\sqrt{5-x} + \sqrt{x+4} = 3$;

d) $\sqrt[3]{x+47} - \sqrt[3]{x-14} = 1$;

b) $\sqrt{16+x} + \sqrt{x+9} = 7$;

e) $\sqrt[4]{87-x} + \sqrt[4]{x+10} = 5$;

c) $\sqrt{2x+7} - \sqrt{x} = 2$;

f) $\sqrt[3]{\sqrt{2x+4}} + \sqrt[3]{12-\sqrt{2x}} = 2\sqrt[3]{2}$.

E. a) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-1} = \sqrt{2x+4}$;

d) $\sqrt{4x^2-4x+1} = 2 - \sqrt{9x^2+6x+1}$;

b) $\sqrt{4x-3} + \sqrt{3x+1} = \sqrt{x+8}$;

e) $\sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{x^2+6x+9}$.

c) $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} - \sqrt{x+23} = 0$;

F. a) $\sqrt{x+2} - 4\sqrt{x-2} + \sqrt{x+7} - 6\sqrt{x-2} = 1$;

b) $\sqrt{x+5} + 2\sqrt{x+4} = 3$.

G. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile următoare:

a) $\sqrt{x^2-x+9} + 2x - 2x^2 = 3$;

d) $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$;

b) $\sqrt{3x-2} + 5 = 4\sqrt[4]{3x-2}$;

e) $\sqrt{\frac{3x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{3x+1}} = \frac{5}{2}$;

c) $\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} + \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} = \frac{5}{2}$;

f) $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[6]{2x-1} = 2$.

H. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\sqrt{3x^2-|x|} = 2 - x\sqrt{3}$;

d) $\sqrt{6x+3\sqrt{x^2+9}} = x+3$;

b) $\sqrt{|x^2+x|} = 2x-3$;

e) $\sqrt{5-\sqrt{x+1}} = 2$;

c) $\sqrt{x-5} + \sqrt[3]{22+x} + \sqrt[6]{5-x} = 3$;

f) $\sqrt{4x^2+\sqrt{3x}} = 2x-1$.

3. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele inecuații:

a) $\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} \leq 3$;

e) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} < 5$;

b) $\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x} \leq 4$;

f) $\sqrt[3]{3x} + \sqrt[3]{1-3x} \leq 1$;

c) $\sqrt{x} + \sqrt{3-x} \geq \sqrt{3}$;

g) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+5} < \sqrt{2} - \sqrt{5}$;

d) $\sqrt{x+5} \geq \frac{x+5}{2}$;

h) $\sqrt{x} + \sqrt{x} \geq 2$.

Exerciții recapitulative

1. Calculează:

$$a) E = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{10} - 2);$$

$$d) \frac{6}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} - \frac{7}{4\sqrt{2} + 5} - \frac{4}{2 - \sqrt{2}};$$

$$b) E = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}} + \sqrt{5 - \sqrt{5}}}{\sqrt{5 + \sqrt{5}} - \sqrt{5 - \sqrt{5}}} - \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}} - \sqrt{5 - \sqrt{5}}}{\sqrt{5 + \sqrt{5}} + \sqrt{5 - \sqrt{5}}};$$

$$e) E = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{15\sqrt{3} - 26}.$$

$$c) \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{10 + 4\sqrt{6}};$$

2. Determină numărul real x pentru care $\sqrt[3x-1]{8-3x} \sqrt[5]{(-x)^x} = \sqrt[5x]{2x}$.

3. Fie ecuația $\sqrt{x-3} + \sqrt{m(2-x)} = 3$, unde m este număr real.

a) Arată că ecuația nu are soluție pentru $m = 1$.

b) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația pentru $m = -1$.

4. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile următoare:

$$a) \sqrt{1+x} \sqrt{x^2+24} = x+1;$$

$$d) \sqrt[4]{82-x} + \sqrt{x-1} = 3;$$

$$b) \sqrt{\frac{3x}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{3x}} = \frac{13}{6};$$

$$e) \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1;$$

$$c) \sqrt[3]{x-3} + \sqrt{4-x} = 1;$$

$$f) \sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}} + \sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}} = 4.$$

5. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile următoare:

$$a) \sqrt{2-\sqrt{3+x}} - \sqrt{4-x} < 0;$$

$$b) \sqrt{2x+4-2\sqrt{2x+3}} < 5;$$

$$c) \sqrt{x^2+2} \leq x + \sqrt{2}.$$

6. Un sistem automat de salvare lasă să cadă o capsulă de la o înălțime de x metri. Timpul total (exprimat în secunde) de la activare până la impact este dat de funcția $f: [0, +\infty), f(x) = \sqrt{\frac{2x}{9,8}}$. Dacă timpul de siguranță până la impact trebuie să fie de cel mult 5 secunde, care este înălțimea maximă de la care poate fi lansată capsula?

7. Fie funcțiile $f_i: D_i \rightarrow \mathbb{R}$, unde D_i reprezintă domeniul maxim de definiție al funcției f_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, $f_1(x) = \sqrt{x+1}$, $f_2(x) = \sqrt{x-1}$, $f_3(x) = \sqrt{2x}$.

a) Determină mulțimile D_i , $i \in \{1, 2, 3\}$.

b) Reprezintă, folosind *GeoGebra* sau *Desmos*, graficele funcțiilor f_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, în același reper cartezian xOy .

c) Precizează mulțimea valorilor pentru fiecare dintre cele trei funcții.

d) Scrie coordonatele a cel puțin două puncte de pe reprezentarea grafică a fiecăreia dintre funcțiile f_i , $i \in \{1, 2, 3\}$.

e) Scrie ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f_2 a cărui abscisă este egală cu 5.

f) Scrie abscisa punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f_1 a cărui ordonată este egală cu 3.

g) Există un punct comun reprezentărilor grafice ale funcțiilor f_1 și f_3 ?

h) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f_1(x) \leq f_3(x)$.

i) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f_1(x) + f_2(x) = f_3(x)$.

Timp de lucru: 45 de minute

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I

30 de puncte

30 de puncte	1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.
(10 p.)	A. Dintre numerele reale $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$ și $\sqrt[5]{5}$, cel mai mare este:
	a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt[3]{3}$; c) $\sqrt[4]{4}$; d) $\sqrt[5]{5}$.
(10 p.)	B. Numărul $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ este egal cu numărul:
	a) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; b) $-\sqrt{3} + \sqrt{2}$; c) $-\sqrt{3} - \sqrt{2}$; d) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.
(10 p.)	C. Rezultatul calculului $(\sqrt[3]{3} - \sqrt{3})(\sqrt[3]{3} + \sqrt{3})(3\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{9} + 9)$ este egal cu:
	a) -18; b) 3; c) 6; d) 18.

Subiectul al II-lea

60 de puncte

Scrie rezolvările complete.

20 de puncte	1. Un rezervor de apă este alimentat de un robinet. Dacă debitul este de 2 litri/minut, rezervorul se umple în 30 de minute.
(10 p.)	a) Scrie funcția care exprimă timpul necesar umplerii rezervorului (exprimat în minute)
(10 p.)	în funcție de debitul robinetului (exprimat în litri/minut).
	b) Calculează timpul necesar umplerii rezervorului dacă debitul robinetului este de 5 litri/minut.
20 de puncte	2. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația și inecuația următoare:
(10 p.)	a) $\sqrt{x+5} = x - 1$;
(10 p.)	b) $\sqrt[3]{x-1} \geq 2$.
10 puncte	3. Demonstrează că numărul real $\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}$ este soluție a ecuației $x^3 - 3x = 10$.
10 puncte	4. Demonstrează că $\sqrt{22+8\sqrt{6}} - \sqrt{15-6\sqrt{6}} \in (5, \sqrt{35})$.

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din această unitate.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	5 foarte bine	4 bine	3 mediu	2 slab	1 foarte slab
Mi-a fost ușor să rezolv exercițiile.					
Am înțeles criteriile de rezolvare.					
Mi-am amintit conținuturile învățate.					

Funcții trigonometrice. Ecuatii trigonometrice

- ▶ 1. Cercul trigonometric; funcțiile sinus și cosinus definite pe intervalul $[0, 2\pi]$; reducerea la primul cadran
- ▶ 1.1. Cercul trigonometric; funcțiile sinus și cosinus definite pe intervalul $[0, 2\pi]$
- ▶ 1.2. Reducerea la primul cadran
- ▶ 2. Funcțiile sinus, cosinus, tangentă și cotangentă; relații între funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă, cotangentă
- ▶ 2.1. Funcțiile sinus și cosinus
- ▶ 2.2. Funcțiile tangentă și cotangentă
- ▶ 2.3. Relații între funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă, cotangentă
- ▶ 3. Formule trigonometrice pentru suma/diferența a două numere reale
- ▶ 4. Transformarea sumelor în produse și a produselor în sume
- ▶ 5. Funcții trigonometrice inverse
- ▶ 6. Ecuatii trigonometrice

1.1. Cercul trigonometric; funcțiile sinus și cosinus definite pe intervalul $[0, 2\pi]$

Îmi amintesc



Fie O un punct. Pe cercul cu centrul în punctul O și raza egală cu 1 cm se consideră punctele A , B și C astfel încât măsura unghiului AOB să fie egală cu 50° , măsura arcului $\widehat{BC}$ să fie egală cu 120° și unghiurile AOB și BOC să fie adiacente.

- Determină măsura arcului mic $\widehat{AB}$.
- Determină măsura unghiului BOC .
- Determină măsura arcului mare $\widehat{AC}$ și măsura unghiului AOC .
- Determină lungimea cercului și lungimile arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ și $\widehat{AC}$.

Învăț

Știm că **unghiul este figura geometrică formată din două semidrepte care au aceeași origine.**

Pentru măsurarea unghiurilor, se folosește, ca unitate de măsură, **gradul sexagesimal**. Un grad sexagesimal (notat 1°) este măsura unui unghi la centru care cuprinde între laturile sale un arc de cerc a cărui măsură este egală cu a 360-a parte din măsura unui cerc.

Considerăm un punct O , un cerc cu centrul în punctul O și două puncte A și B care aparțin acestui cerc și nu sunt diametral opuse (figura 1). Unghiul AOB este unghi la centru și măsura lui este egală cu măsura arcului mic $\widehat{AB}$.

Dacă măsura arcului mic $\widehat{AB}$ este α° , atunci măsura arcului mare $\widehat{AB}$ este $360^\circ - \alpha^\circ$.

Prin definiție, unghiul la centru care subîntinde arcul mare determinat de două puncte de pe cerc are măsura $360^\circ - \alpha^\circ$, unde α° reprezintă măsura unghiului la centru care subîntinde arcul mic determinat de cele două puncte (figura 2).

În multe probleme practice, pentru măsurarea unui unghi se folosește o altă unitate de măsură: **radianul**, notat 1 rad.

Măsura de un radian este măsura unui unghi la centru care subîntinde un arc de cerc cu lungimea egală cu raza cercului (figura 3).

Considerăm un punct O și un cerc cu centrul în punctul O și rază de lungime R . Punctele A și B aparțin cercului $\mathcal{C}(O, R)$ astfel încât $\angle AOB = \alpha^\circ$ (figura 4). În acest caz, lungimea arcului $\widehat{AB}$ este $l = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi R$.

Într-adevăr, cum lungimea unui cerc de rază R este $2\pi R$ și lungimea cercului corespunde unui arc de 360° (măsura cercului), atunci putem scrie:

$$\begin{array}{l} 360^\circ \dots\dots\dots 2\pi R \\ \alpha^\circ \dots\dots\dots x \end{array}$$

$$x = \frac{2\pi R \cdot \alpha^\circ}{360^\circ} \Leftrightarrow x = \frac{\pi R \cdot \alpha^\circ}{180^\circ} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi R$$

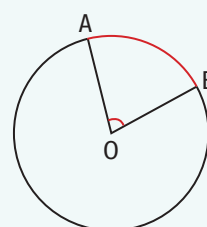


Figura 1

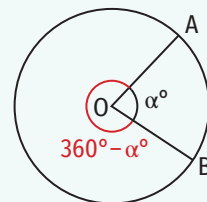


Figura 2

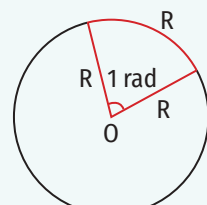


Figura 3

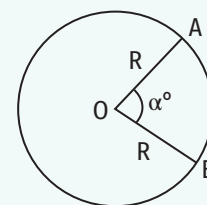


Figura 4

Din relația $l = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi R$ obținem $\frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ} = \frac{l}{R}$ și observăm că raportul $\frac{l}{R}$ depinde numai de măsura în grade a unghiului AOB.

Raportul $\frac{l}{R}$ (raportul dintre lungimea arcului $\widehat{AB}$ și lungimea razei cercului $\mathcal{C}(O, R)$) se numește măsura arcului $\widehat{AB}$ exprimată în radiani.

Se numește măsura în radiani a unghiului AOB măsura în radiani a arcului $\widehat{AB}$.

Dacă $R = 1$, atunci $l = \frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ}$, această relație permițând trecerea de la o unitate de măsură la alta.

OBSERVAȚII.

1. La folosirea radianului ca unitate de măsură nu se adaugă, în scriere, niciun semn suplimentar, spre deosebire de cazul utilizării gradelor sexagesimale, când folosim simbolul „°” în scrierea măsurilor unghiurilor.
2. Măsura unui cerc, exprimată în grade sexagesimale, este 360° , iar exprimată în radiani, este 2π .
3. Dacă un arc de cerc are măsura α° și a radiani, legătura dintre măsura în grade și măsura în radiani este dată de relația $a = \frac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}$ ($\alpha = \frac{a \cdot 180}{\pi}$).

EXEMPLE:

1. Măsura în radiani a unghiului drept este egală cu $\frac{\pi \cdot 90^\circ}{180^\circ}$, adică $\frac{\pi}{2}$.
2. Măsura în grade sexagesimale a unghiului cu măsura egală cu $\frac{\pi}{3}$ este egală cu $\frac{\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$, adică 60° .

Cercul trigonometric



Considerăm în plan reperul cartezian xOy și un cerc cu centrul în punctul O și raza $R = 1$, pe care îl vom nota $\mathcal{C}$. Punctele de intersecție a cercului $\mathcal{C}$ cu axele de coordonate sunt: $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $A'(-1, 0)$ și $B'(0, -1)$ (figura 5).

Un punct mobil, care pleacă din punctul A , se poate deplasa pe cercul $\mathcal{C}$, în două sensuri (figura 5):

- sensul contrar mișcării acelor de ceasornic (sensul de la A spre B), numit și sensul pozitiv;
- sensul mișcării acelor de ceasornic (sensul de la A spre B'), numit și sensul negativ.

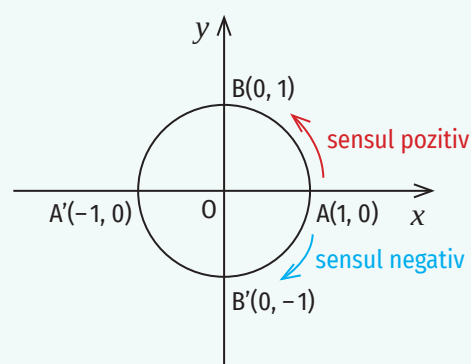


Figura 5

OBSERVAȚIE.

Prin convenție, sensul pozitiv de deplasare pe cercul $\mathcal{C}$ se numește **sens trigonometric**.

Arcul parcurs în sens trigonometric se numește **arc orientat pozitiv**, iar arcul parcurs în sensul mișcării acelor de ceasornic se numește **arc orientat negativ**.

Fie M un punct pe cercul trigonometric. Unghiul AOM se numește **unghi orientat** dacă se precizează sensul în care este parcurs arcul $\widehat{AM}$.

Definiția 1. Cercul cu centrul în originea reperului cartezian xOy și raza 1, pe care am definit sensurile pozitiv și negativ, se numește **cerc trigonometric**.

Fie M și M' două puncte pe cercul trigonometric, simetrice față de axa Ox , astfel încât $\widehat{AM} = \alpha^\circ$ (figura 6). Atunci $\sphericalangle AOM = \alpha^\circ$.

Prin definiție, $\widehat{AM'} = -\alpha^\circ$ și $\sphericalangle AOM' = -\alpha^\circ$ (figura 6).

Fie M un punct pe cercul trigonometric astfel încât măsura arcului mic $\widehat{AM}$ este egală cu l .

Din punctul A se poate ajunge în punctul M parcurgând, în sens pozitiv, fie arcul $\widehat{AM}$ (figura 7), fie o dată sau de mai multe ori cercul și apoi arcul $\widehat{AM}$ o dată (figurile 8-9).

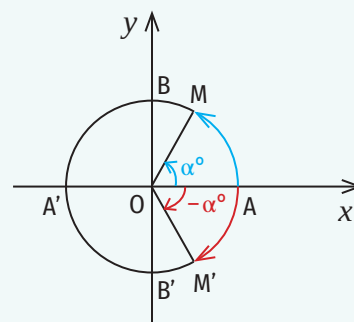


Figura 6

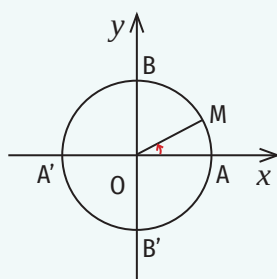


Figura 7

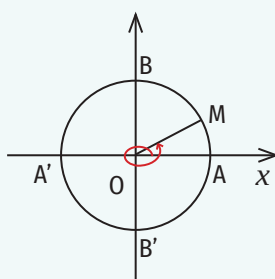


Figura 8

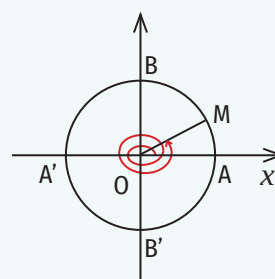


Figura 9

În acest mod, punctul M poate fi privit ca extremitate pentru o infinitate de „arce de cerc” care au măsura diferită (l , când nu parcurgem cercul complet – figura 7, $l + 2\pi$, după o rotație completă – figura 8, $l + 2 \cdot 2\pi$, după două rotații complete – figura 9 etc.). Astfel, putem spune că un arc de cerc cu originea în punctul A și extremitatea M are măsura egală cu $l + k \cdot 2\pi$, unde $l \in [0, 2\pi)$, $l = \widehat{AM}$ și $k \in \mathbb{N}$ reprezintă numărul de parcurgeri complete ale cercului trigonometric. Numărul l reprezintă măsura principală a arcului $\widehat{AM}$ (l e măsura arcului mic $\widehat{AM}$).

Din punctul A se poate ajunge în punctul M și parcurgând cercul trigonometric în sens negativ (figurile 10-12).

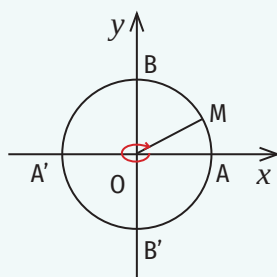


Figura 10

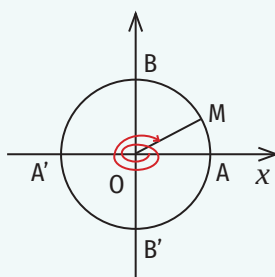


Figura 11

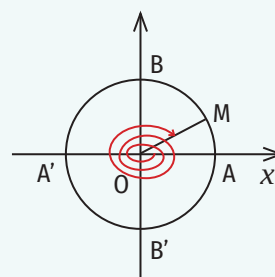


Figura 12

În acest mod, punctul M poate fi privit ca extremitate pentru o infinitate de „arce de cerc” care au măsura diferită ($l - 2\pi$, când nu parcurgem cercul complet – figura 10, $l - 2 \cdot 2\pi$, după o rotație completă – figura 11, $l - 3 \cdot 2\pi$, după două rotații complete – figura 12 etc.).

Astfel, putem spune că un arc cu originea în punctul A și extremitatea M are măsura egală cu $l + k \cdot 2\pi$, $l \in [0, 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Propoziție. Pentru orice număr real x , există și sunt unice un număr întreg k și un număr real $\alpha \in [0, 2\pi)$ astfel încât $x = \alpha + 2k\pi$.

EXEMPLE:

1. $x = 13\pi$, $13\pi = \pi + 6 \cdot 2\pi$, deci $\alpha = \pi$, $k = 6$;

2. $x = 8\pi$, $8\pi = 0 + 4 \cdot 2\pi$, deci $\alpha = 0$, $k = 4$;

3. $x = 2\pi$, $2\pi = 0 + 1 \cdot 2\pi$, deci $\alpha = 0$, $k = 1$;

4. $x = \pi$, $\pi = \pi + 0 \cdot 2\pi$, deci $\alpha = \pi$, $k = 0$;

5. $x = -7\pi, -7\pi = \pi + (-4) \cdot 2\pi$, deci $\alpha = \pi, k = -4$;

6. $x = 5, 5 = 5 + 0 \cdot 2\pi$, deci $\alpha = 5, k = 0$;

7. $x = 8, 8 = (8 - 2\pi) + 1 \cdot 2\pi$ (deoarece $8 - 2\pi \in [0, 2\pi)$), deci $\alpha = 8 - 2\pi, k = 1$;

8. $x = -7, -7 = (-7 + 4\pi) + (-2) \cdot 2\pi$ (deoarece $-7 + 4\pi \in [0, 2\pi)$), deci $\alpha = -7 + 4\pi, k = -2$.

Fie x un număr real, $\alpha \in [0, 2\pi)$ și $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x = \alpha + 2k\pi$. Pe cercul trigonometric există un singur punct M astfel încât $\widehat{AOM} = \alpha$. Vom spune că M este punctul de pe cercul trigonometric asociat numărului real x .

În acest mod se stabilește o corespondență între mulțimea numerelor reale și mulțimea punctelor cercului trigonometric.

Definiția 2. Funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}, F(x) = M_x$, unde M_x este punctul de pe cercul trigonometric asociat numărului real x , se numește funcția de acoperire universală a cercului trigonometric.

OBSERVAȚIE.

Anumite valori particulare ale funcției de acoperire universală a cercului trigonometric determină punctele remarcabile ale cercului: $A = M_0, B = M_{\frac{\pi}{2}}, A' = M_{\pi}, B' = M_{\frac{3\pi}{2}}$ (figura 13).

Știm că axele de coordonate împart planul în patru cadrane (figura 14).

Vom spune că unghiul AOM_x aparține cadranelor I, II, III sau IV, după cum punctul M_x aparține cadranelor I, II, III, respectiv IV.

- Dacă punctul M_x se află în primul cadran, atunci $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ (figura 15);
- Dacă punctul M_x aparține cadranelor II, atunci $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ (figura 16);
- Dacă punctul M_x aparține cadranelor III, atunci $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ (figura 17);
- Dacă punctul M_x aparține cadranelor IV, atunci $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ (figura 18).

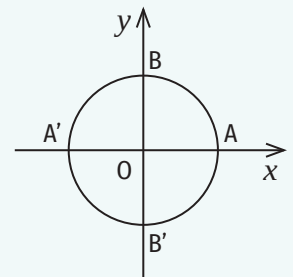


Figura 13

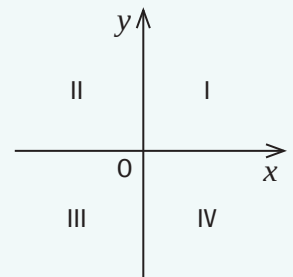


Figura 14

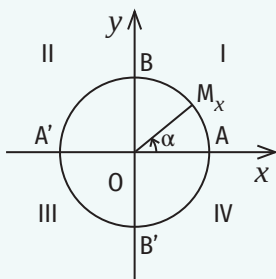


Figura 15

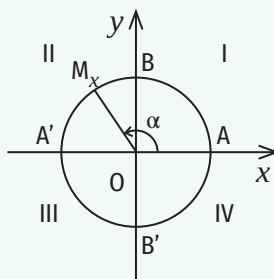


Figura 16

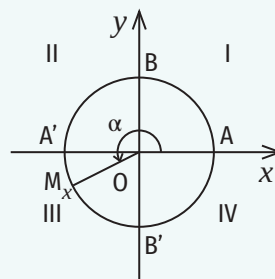


Figura 17

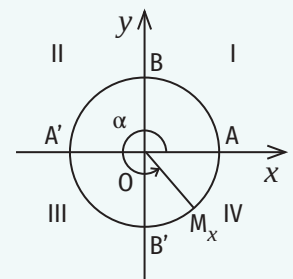


Figura 18

EXEMPLE:

1. Punctul de pe cercul trigonometric asociat unghiului cu măsura $\frac{\pi}{6}$ se află în cadranul I deoarece $\frac{\pi}{6} \in (0, \frac{\pi}{2})$.
2. Punctul de pe cercul trigonometric asociat unghiului cu măsura $\frac{2\pi}{3}$ se află în cadranul II deoarece $\frac{2\pi}{3} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

3. Punctul de pe cercul trigonometric asociat unghiului cu măsura $\frac{203\pi}{4}$ se află în cadranul II deoarece $\frac{203\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 25 \cdot 2\pi$ și $\frac{3\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

4. Punctul de pe cercul trigonometric asociat unghiului cu măsura $-\frac{23\pi}{6}$ se află în cadranul I deoarece $-\frac{23\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + (-2) \cdot 2\pi$ și $\frac{\pi}{6} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Funcțiile sinus și cosinus definite pe intervalul $[0, 2\pi]$



Fie $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și M punctul de pe cercul trigonometric corespunzător unghiului cu măsura α . Notăm cu M' proiecția punctului M pe axa Ox și cu M'' proiecția punctului M pe axa Oy (figura 19).

Triunghiul OM'M este dreptunghic în M' și $\sin \alpha = \frac{MM'}{OM}$, $\cos \alpha = \frac{OM'}{OM}$. Cum $OM = 1$, obținem $\sin \alpha = MM'$ și $\cos \alpha = OM'$.

Patrulaterul OM'MM'' este dreptunghi, de unde rezultă $OM'' \equiv MM'$ și, de aici, $OM'' = \sin \alpha$.

Astfel, coordonatele punctului M sunt $(\cos \alpha, \sin \alpha)$.

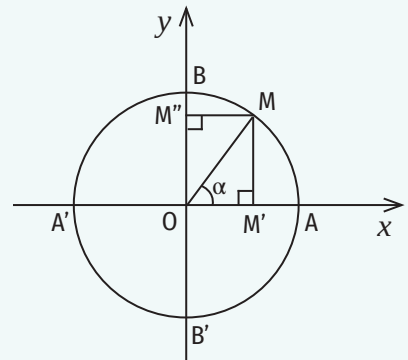


Figura 19

OBSERVAȚIE.

Poziția unui punct M de pe cercul trigonometric poate fi dată prin:

- coordonate metrice (măsura arcului orientat $\widehat{AM}$);
- coordonate unghiulare (măsura unghiului orientat AOM);
- coordonate carteziane (x_M, y_M) .

Definiție. Funcțiile $f: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(t) = \sin t$ și $g: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$, $g(t) = \cos t$, unde $\sin t$ și $\cos t$ sunt ordonata și, respectiv, abscisa punctului de pe cercul trigonometric asociat numărului real $t \in [0, 2\pi]$, reprezintă funcțiile trigonometrice sinus și cosinus definite pe $[0, 2\pi]$.

Proprietate. Pentru orice număr real $t \in [0, 2\pi]$ avem $-1 \leq \cos t \leq 1$ și $-1 \leq \sin t \leq 1$.

Într-adevăr, pentru orice poziție a punctului $M(\cos t, \sin t)$ pe cercul trigonometric, avem $-1 \leq \cos t \leq 1$ și $-1 \leq \sin t \leq 1$.

$$M(\cos t, \sin t) \in \mathcal{C} \Rightarrow OM = 1$$

Cum $OM = \sqrt{(\cos t - 0)^2 + (\sin t - 0)^2} = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}$, rezultă că $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Așadar, **$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, pentru orice număr real $t \in [0, 2\pi]$.**

OBSERVAȚIE.

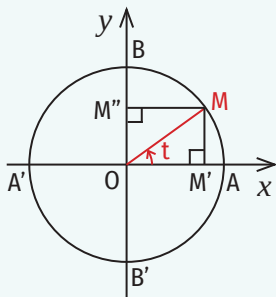
Folosind coordonatele carteziane ale punctelor A(1, 0), B(0, 1), A'(-1, 0) și B'(0, -1) de pe cercul trigonometric și măsurile unghiurilor corespunzătoare obținem:

- $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ (deoarece A(cos 0, sin 0));
- $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ (deoarece B(cos $\frac{\pi}{2}$, sin $\frac{\pi}{2}$));
- $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$ (deoarece A'(cos π , sin π));
- $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$;
(deoarece B'(cos $\frac{3\pi}{2}$, sin $\frac{3\pi}{2}$));
- $\sin 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$.

Semnul funcțiilor trigonometrice sinus și cosinus definite pe intervalul $[0, 2\pi]$

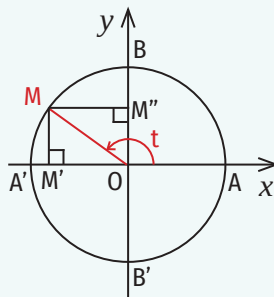
Lecturând figurile 20-23, obținem:

- Dacă $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, atunci $\cos t > 0$ și $\sin t > 0$ (figura 20).
- Dacă $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, atunci $\cos t < 0$ și $\sin t > 0$ (figura 21).
- Dacă $t \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, atunci $\cos t < 0$ și $\sin t < 0$ (figura 22).
- Dacă $t \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, atunci $\cos t > 0$ și $\sin t < 0$ (figura 23).



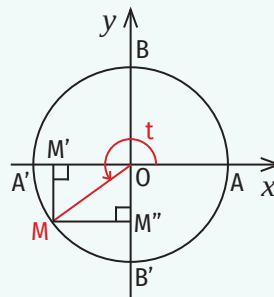
$t \in (0, \frac{\pi}{2})$
 $\cos t > 0$ și $\sin t > 0$

Figura 20



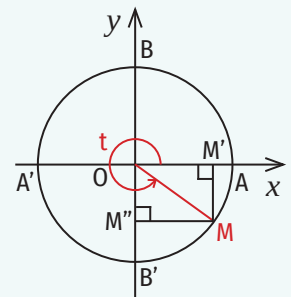
$t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$
 $\cos t < 0$ și $\sin t > 0$

Figura 21



$t \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$
 $\cos t < 0$ și $\sin t < 0$

Figura 22



$t \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
 $\cos t > 0$ și $\sin t < 0$

Figura 23

EXEMPLE:

- $\sin \frac{3\pi}{4} > 0$, deoarece $\frac{3\pi}{4} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.
- $\cos \frac{7\pi}{5} < 0$, deoarece $\frac{7\pi}{5} \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$.
- $\sin 3 > 0$, deoarece $3 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.
- $\cos 5 > 0$, deoarece $5 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

Exerciții rezolvate

1. Precizează în ce cadran sunt unghiurile cu măsurile egale cu:

- a) $\frac{19\pi}{3}$; b) $\frac{338\pi}{9}$; c) $-\frac{178\pi}{3}$.

Rezolvare:

- a) $\frac{19\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 3 \cdot 2\pi \Rightarrow$ unghiul cu măsura egală cu $\frac{19\pi}{3}$ aparține cadranelui I (deoarece $\frac{\pi}{3} \in (0, \frac{\pi}{2})$);
- b) $\frac{338\pi}{9} = \frac{14\pi}{9} + 18 \cdot 2\pi \Rightarrow$ unghiul cu măsura egală cu $\frac{338\pi}{9}$ aparține cadranelui IV (deoarece $\frac{14\pi}{9} \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$);
- c) $-\frac{178\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + (-30) \cdot 2\pi \Rightarrow$ unghiul cu măsura egală cu $-\frac{178\pi}{3}$ aparține cadranelui II (deoarece $\frac{2\pi}{3} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$).

2. Determină semnul produsului $\sin \sqrt{2} \cdot \cos \sqrt{7}$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} 2 < (\frac{\pi}{2})^2 \Rightarrow \sqrt{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{2} \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin \sqrt{2} > 0 \\ (\frac{\pi}{2})^2 < 7 < \pi^2 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \sqrt{7} < \pi \Rightarrow \sqrt{7} \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow \cos \sqrt{7} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin \sqrt{2} \cdot \cos \sqrt{7} < 0$$



ȘTIAI CĂ...?

- Un grad sexagesimal reprezintă a 360-a parte dintr-un cerc sau a 90-a parte dintr-un unghi drept.
- Dacă se împarte cercul în 400 de părți egale, se obține un grad centezimal, notat 1^g . Un grad centezimal are 100 de minute centezimale (100^c), iar un minut centezimal are 100 de secunde centezimale (100^{cc}).
 $1^g = 100^c = 10\,000^{cc}$

3. Compară numerele reale:

a) $\sin 1$ și $\cos 2$;

b) $\cos 4$ și $\cos 5$.

Rezolvare:

$$a) \left. \begin{array}{l} 1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin 1 > 0 \\ 2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \cos 2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin 1 > \cos 2$$

$$b) \left. \begin{array}{l} 4 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos 4 < 0 \\ 5 \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \cos 5 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \cos 5 > \cos 4$$

4. Determină $\sin x$, știind că $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ și $\cos x = \frac{1}{4}$.

Rezolvare:

Folosim formula $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, pentru orice $t \in [0, 2\pi]$. Cum $\cos x = \frac{1}{4}$, obținem

$$\sin^2 x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1.$$

$$\sin^2 x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{1}{16} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{1}{16} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{15}{16} \left\{ \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4} \right.$$

$$x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \sin x < 0$$

5. Determină semnul numărului real a .

a) $a = \sin \frac{373\pi}{12}$;

b) $a = \cos \frac{2309\pi}{46}$.

Rezolvare:

a) Cum $\frac{373\pi}{12} = \frac{13\pi}{12} + 15 \cdot 2\pi$ și $\frac{13\pi}{12} \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, punctul asociat numărului real $\frac{373\pi}{12}$ aparține cadranelui III, de unde rezultă că $\sin \frac{373\pi}{12} < 0$, deci $a < 0$.b) Cum $\frac{2309\pi}{46} = \frac{9\pi}{46} + 25 \cdot 2\pi$ și $\frac{9\pi}{46} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, punctul asociat numărului real $\frac{2309\pi}{46}$ aparține cadranelui I, de unde rezultă că $\cos \frac{2309\pi}{46} > 0$, deci $a > 0$.Aplic

1. Exprimă în grade sexagesimale măsura unui unghi, știind că măsura sa în radiani este egală cu:

a) $\frac{2\pi}{3}$;

c) $-\frac{\pi}{12}$;

e) $\frac{5\pi}{4}$;

g) $\frac{403\pi}{5}$;

i) $\frac{1235\pi}{12}$;

b) $\frac{4\pi}{3}$;

d) $-\frac{5\pi}{36}$;

f) $\frac{1001\pi}{6}$;

h) $-\frac{525\pi}{6}$;

j) $-\frac{1253\pi}{4}$.

2. Determină măsura în radiani a unui unghi, știind că măsura sa în grade sexagesimale este egală cu:

a) 30° ;

b) 45° ;

c) 75° ;

d) 135° ;

e) 240° ;

f) 300° .

3. Determină coordonatele punctului de pe cercul trigonometric asociat unghiului cu măsura egală cu:

a) 30° ;

b) $\frac{\pi}{3}$;

c) $\frac{\pi}{4}$.

4. Marchează pe cercul trigonometric punctul asociat unghiului cu măsura egală cu:

a) 30° ;

b) 120° ;

c) 135° ;

d) 210° ;

e) $\frac{\pi}{3}$;

f) $\frac{\pi}{4}$;

g) $\frac{5\pi}{4}$;

h) $\frac{11\pi}{6}$;

i) $\frac{4\pi}{3}$;

j) $\frac{5\pi}{3}$.

5. Calculează:

- a) $\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 180^\circ - \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ$;
 b) $\cos^2 45^\circ + 2\sin^2 30^\circ - \sin 90^\circ$;
 c) $\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ - \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ + \cos 60^\circ$;
 d) $\frac{\sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ} - \frac{\sin 60^\circ \cdot \cos 90^\circ}{\cos 25^\circ} + \frac{\sin 45^\circ \cdot \cos 0^\circ}{\sin 30^\circ}$.

6. Calculează:

- a) $\left(\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}}$; d) $4\sin^2 \frac{\pi}{6} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{3}$;
 b) $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{2}$; e) $\left(\sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{6}\right) \left(\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6}\right)$;
 c) $\sin^2 \frac{\pi}{3} - \cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{6}$; f) $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6}$.

7. Arată că:

- a) $\left(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}}\right)^2$; b) $\left(\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3}\right) \left(\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{4}$.

8. Precizează în ce cadran sunt unghiurile cu măsurile egale cu:

- a) $\frac{7\pi}{3}$; c) $\frac{7\pi}{6}$; e) $\frac{32\pi}{5}$; g) $\frac{125\pi}{9}$; i) $\frac{24\pi}{5}$; k) $-\frac{178\pi}{3}$; m) 5;
 b) $\frac{2\pi}{5}$; d) $\frac{11\pi}{4}$; f) $\frac{178\pi}{6}$; h) $\frac{3\pi}{4}$; j) $-\frac{100\pi}{7}$; l) $-\frac{123\pi}{5}$; n) 30.

9. Determină semnul numărului real:

- a) $\sin \frac{\pi}{10}$; c) $\sin \frac{4\pi}{3}$; e) $\cos \frac{6\pi}{5}$; g) $\sin 3$; i) $\sin 2$.
 b) $\sin \frac{15\pi}{8}$; d) $\cos \frac{3\pi}{4}$; f) $\cos \frac{9\pi}{5}$; h) $\cos 6$;

10. Determină semnul numărului real a :

- a) $a = \sin \frac{3\pi}{8} \cdot \sin \frac{4\pi}{3}$; d) $a = \sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{15\pi}{11} \cdot \sin \frac{9\pi}{5} \cdot \sin \frac{13\pi}{12}$;
 b) $a = \cos \frac{2\pi}{5} \cdot \cos \frac{10\pi}{7}$; e) $a = \cos \frac{2\pi}{5} \cdot \cos \frac{5\pi}{3} \cdot \cos \frac{7\pi}{4}$;
 c) $a = \cos 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6$; f) $a = \frac{\sin \sqrt{5} \cdot \cos \sqrt{7}}{\sin \sqrt{2} \cdot \cos \sqrt{3}} \cdot \frac{\cos 1 \cdot \cos 3}{\cos 5}$.

11. Determină semnul numărului real a :

- a) $a = \sin \frac{5\pi}{3} + \sin \frac{7\pi}{6}$; c) $a = \cos \frac{\pi}{8} - \cos \frac{2\pi}{3}$;
 b) $a = \sin 1 + \sin 3$; d) $a = \cos 6 - \sin 5$.

12. Determină $\sin x$, știind că:

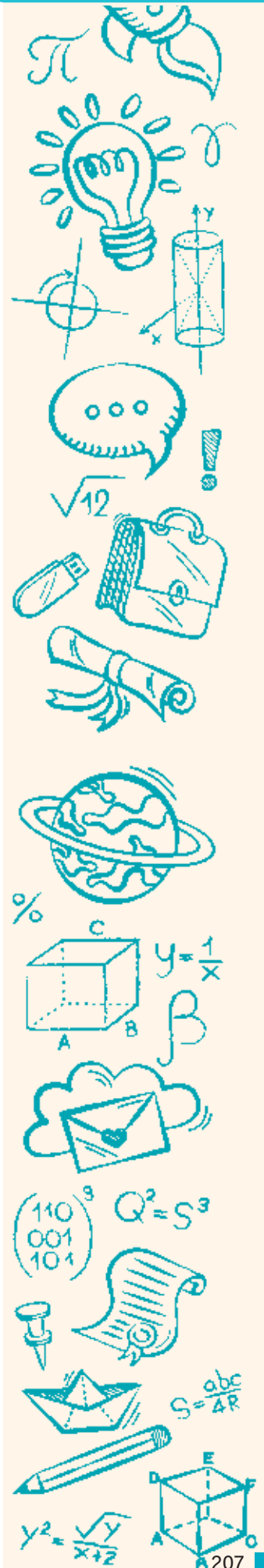
- a) $\cos x = \frac{1}{3}$ și $x \in (0, \frac{\pi}{2})$; c) $\cos x = -\frac{4}{5}$ și $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$;
 b) $\cos x = -\frac{2}{3}$ și $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$; d) $\cos x = \frac{1}{5}$ și $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

13. Determină $\cos x$, știind că:

- a) $\sin x = \frac{3}{5}$ și $x \in (0, \frac{\pi}{2})$; c) $\sin x = -\frac{24}{25}$ și $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$;
 b) $\sin x = \frac{5}{13}$ și $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$; d) $\sin x = -\frac{1}{2}$ și $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

14. Fie $x \in [0, 2\pi]$. Calculează:

- a) $(3\sin x - 2\cos x)^2 + (3\cos x + 2\sin x)^2$;
 b) $(4\sin x + 3\cos x)^2 + (4\cos x - 3\sin x)^2$.



1.2. Reducerea la primul cadran

Descopăr

Clasa se împarte în trei grupe de lucru.

Grupa 1

Fie $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $M(\cos t, \sin t)$ punctul de pe cercul trigonometric corespunzător unghiului cu măsura t . Punctul N este simetricul punctului M față de axa Oy . Punctele M' și N' sunt proiecțiile punctelor M și N pe axa Ox .

- Demonstrați că triunghiurile OMM' și ONN' sunt congruente.
- Determinați măsura unghiului NON' .
- Determinați coordonatele punctului N .
- Demonstrați că $\cos t = -\cos(\pi - t)$, $\sin t = \sin(\pi - t)$, pentru orice $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Grupa 2

Fie $t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ și $M(\cos t, \sin t)$ punctul de pe cercul trigonometric corespunzător unghiului cu măsura t . Punctul N este simetricul punctului M față de punctul O . Punctele M' și N' sunt proiecțiile punctelor M și N pe axa Ox .

- Demonstrați că triunghiurile OMM' și ONN' sunt congruente.
- Determinați măsura unghiului NON' .
- Determinați coordonatele punctului N .
- Demonstrați că $\cos t = -\cos(t - \pi)$, $\sin t = -\sin(t - \pi)$, pentru orice $t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Grupa 3

Fie $t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ și $M(\cos t, \sin t)$ punctul de pe cercul trigonometric corespunzător unghiului cu măsura t . Punctul N este simetricul punctului M față de axa Ox . Punctul P este punctul de intersecție dintre axa Ox și dreapta MN .

- Demonstrați că triunghiurile OMP și ONP sunt congruente.
- Determinați măsura unghiului NOP .
- Determinați coordonatele punctului N .
- Demonstrați că $\cos t = \cos(2\pi - t)$, $\sin t = -\sin(2\pi - t)$, pentru orice $t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.





Folosind simetria cercului trigonometric față de axele de coordonate și față de originea reperului cartezian xOy , vom exprima funcțiile trigonometrice sinus și cosinus ale unghiurilor din cadranele II, III și IV cu ajutorul funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor din primul cadran. Formulele obținute le vom numi **formule de reducere la primul cadran**.

- Fie $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ și $M(\cos t, \sin t)$ punctul de pe cercul trigonometric corespunzător unghiului cu măsura t . Punctul N este simetricul punctului M față de axa Oy . Evident, punctul N aparține cercului trigonometric. Punctele M' și N' sunt proiecțiile punctelor M și N pe axa Ox (figura 1). Atunci $OM' = -\cos t$, $MM' = \sin t$.

Triunghiurile dreptunghice OMM' și NN' sunt congruente ($OM \equiv ON$, $OM' \equiv ON'$), de unde rezultă $\angle MOM' \equiv \angle NON'$. Cum $\angle MOM' = \pi - t$, obținem $\angle NON' = \pi - t$, deci coordonatele punctului N sunt $(\cos(\pi - t), \sin(\pi - t))$. Atunci $ON' = \cos(\pi - t)$, $NN' = \sin(\pi - t)$.

$$OM' \equiv ON' \Rightarrow -\cos t = \cos(\pi - t)$$

$$MM' \equiv NN' \Rightarrow \sin t = \sin(\pi - t)$$

Am obținut formulele de reducere la primul cadran:

$$\begin{aligned} \cos t &= -\cos(\pi - t) \\ \sin t &= \sin(\pi - t) \end{aligned}, \text{ pentru orice } t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$$

Folosind măsurile unghiurilor exprimate în grade sexagesimale, obținem:

$$\begin{aligned} \cos t &= -\cos(180^\circ - t) \\ \sin t &= \sin(180^\circ - t) \end{aligned}, \text{ pentru orice } t \in (90^\circ, 180^\circ)$$

OBSERVAȚIE.

Punctele $M(\cos t, \sin t)$ și $N(\cos(\pi - t), \sin(\pi - t))$, unde $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, sunt simetrice față de axa Oy .

EXEMPLE:

$$1. \cos 120^\circ = -\cos(180^\circ - 120^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$2. \sin \frac{3\pi}{4} = \sin(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Fie $t \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ și $M(\cos t, \sin t)$ punctul de pe cercul trigonometric corespunzător unghiului cu măsura t . Punctul N este simetricul punctului M față de punctul O . Evident, punctul N aparține cercului trigonometric. Punctele M' și N' sunt proiecțiile punctelor M și N pe axa Ox (figura 2).

$$\text{Atunci } OM' = -\cos t, MM' = -\sin t.$$

Triunghiurile dreptunghice OMM' și NN' sunt congruente ($OM \equiv ON$, $\angle MOM' \equiv \angle NON'$), de unde rezultă $OM' \equiv ON'$ și $MM' \equiv NN'$. Cum $\angle MOM' = t - \pi$, obținem $\angle NON' = t - \pi$, deci coordonatele punctului N sunt $(\cos(t - \pi), \sin(t - \pi))$.

$$\text{Atunci, } ON' = \cos(t - \pi), NN' = \sin(t - \pi).$$

$$OM' \equiv ON' \Rightarrow -\cos t = \cos(t - \pi)$$

$$MM' \equiv NN' \Rightarrow -\sin t = \sin(t - \pi)$$

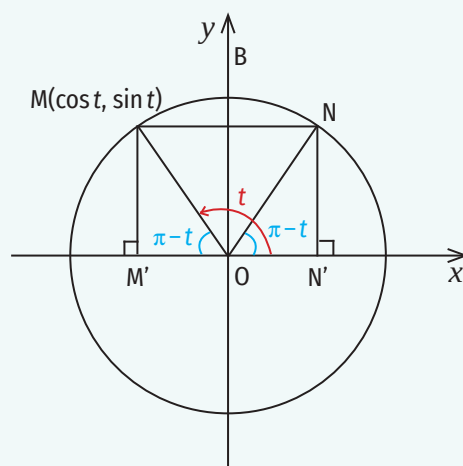


Figura 1

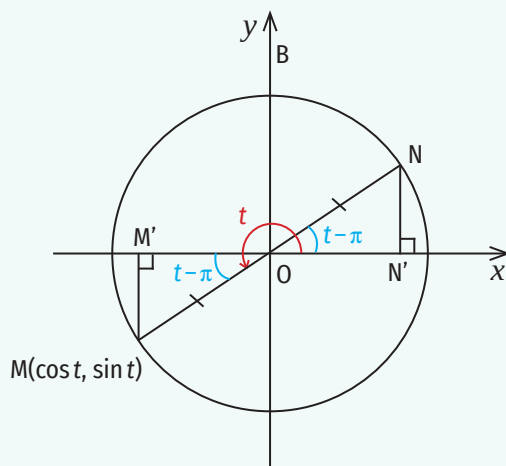


Figura 2

Am obținut formulele de reducere la primul cadran:

$$\begin{aligned}\cos t &= -\cos(t - \pi) \\ \sin t &= -\sin(t - \pi), \text{ pentru orice } t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Folosind măsurile unghiurilor exprimate în grade sexagesimale, obținem:

$$\begin{aligned}\cos t &= -\cos(t - 180^\circ) \\ \sin t &= -\sin(t - 180^\circ), \text{ pentru orice } t \in (180^\circ, 270^\circ)\end{aligned}$$

OBSERVAȚIE.

Punctele $M(\cos t, \sin t)$ și $N(\cos(t - \pi), \sin(t - \pi))$, unde $t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, sunt simetrice față de originea reperului cartezian xOy .

EXEMPLE:

$$1. \sin 225^\circ = -\sin(225^\circ - 180^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2. \cos \frac{4\pi}{3} = -\cos\left(\frac{4\pi}{3} - \pi\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

• Fie $t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ și $M(\cos t, \sin t)$ punctul de pe cercul trigonometric corespunzător unghiului cu măsura t . Punctul N este simetricul punctului M față de axa Ox . Evident, punctul N aparține cercului trigonometric. Punctul P este punctul de intersecție dintre axa Ox și dreapta MN (figura 3). Atunci $OP = \cos t$, $MP = -\sin t$.

În triunghiul isoscel OMN , segmentul OP este mediană și înălțime, deci semidreapta OP este bisectoarea unghiului MON , de unde rezultă $\angle MOP = \angle NOP = 2\pi - t$. Astfel, coordonatele punctului N sunt $(\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t))$ și $OP = \cos(2\pi - t)$, $NP = \sin(2\pi - t)$.

Atunci,

$$\cos t = \cos(2\pi - t)$$

$$MP \equiv NP \Rightarrow -\sin t = \sin(2\pi - t)$$

Am obținut formulele de reducere la primul cadran:

$$\begin{aligned}\cos t &= \cos(2\pi - t) \\ \sin t &= -\sin(2\pi - t), \text{ pentru orice } t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)\end{aligned}$$

Folosind măsurile unghiurilor exprimate în grade sexagesimale, obținem:

$$\begin{aligned}\cos t &= \cos(360^\circ - t) \\ \sin t &= -\sin(360^\circ - t), \text{ pentru orice } t \in (270^\circ, 360^\circ)\end{aligned}$$

OBSERVAȚIE.

Punctele $M(\cos t, \sin t)$ și $N(\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t))$, unde $t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, sunt simetrice față de axa Ox .

EXEMPLE:

$$1. \sin 300^\circ = -\sin(360^\circ - 300^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2. \cos \frac{7\pi}{4} = \cos\left(2\pi - \frac{7\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

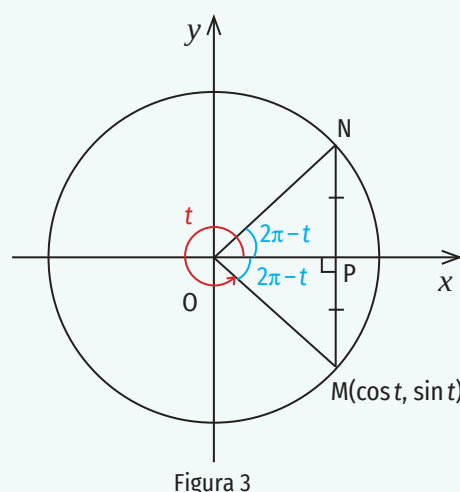


Figura 3

Exercițiu rezolvat

Calculează:

a) $-\sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{11\pi}{6}$; c) $\sin 170^\circ - \sin 10^\circ$; e) $\sin \frac{8\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7}$.
 b) $\sin^2 \frac{3\pi}{7} + \cos^2 \frac{4\pi}{7}$; d) $\cos \frac{8\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5}$;

Rezolvare:

a) $\frac{2\pi}{3} \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow \sin \frac{2\pi}{3} = \sin(\pi - \frac{2\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Am folosit formula $\sin t = \sin(\pi - t)$, pentru orice $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

$\frac{11\pi}{6} \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi) \Rightarrow \cos \frac{11\pi}{6} = \cos(2\pi - \frac{11\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Am folosit formula $\cos t = \cos(2\pi - t)$, pentru orice $t \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

$-\sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{11\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

b) $\frac{4\pi}{7} \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow \cos \frac{4\pi}{7} = -\cos(\pi - \frac{4\pi}{7}) = -\cos \frac{3\pi}{7}$

Am folosit formula $\cos t = -\cos(\pi - t)$, pentru orice $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

$\sin^2 \frac{3\pi}{7} + \cos^2 \frac{4\pi}{7} = \sin^2 \frac{3\pi}{7} + (-\cos \frac{3\pi}{7})^2 = \sin^2 \frac{3\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7} = 1$

Am folosit formula $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, pentru orice $x \in [0, 2\pi]$.

c) $170^\circ \in (90^\circ, 180^\circ) \Rightarrow \sin 170^\circ = \sin(180^\circ - 170^\circ) = \sin 10^\circ$

Am folosit formula $\sin t = \sin(180^\circ - t)$, pentru orice $t \in (90^\circ, 180^\circ)$.

$\sin 170^\circ - \sin 10^\circ = \sin 10^\circ - \sin 10^\circ = 0$

d) $\frac{8\pi}{5} \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi) \Rightarrow \cos \frac{8\pi}{5} = \cos(2\pi - \frac{8\pi}{5}) = \cos \frac{2\pi}{5}$

Am folosit formula $\cos t = \cos(2\pi - t)$, pentru orice $t \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

$\cos \frac{8\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = 0$

e) $\frac{8\pi}{7} \in (\pi, \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow \sin \frac{8\pi}{7} = -\sin(\frac{8\pi}{7} - \pi) = -\sin \frac{\pi}{7}$

Am folosit formula $\sin t = -\sin(t - \pi)$, pentru orice $t \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$.

$\sin \frac{8\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} = 0$

Aplic

1. Determină coordonatele punctului de pe cercul trigonometric asociat unghiului cu măsura egală cu:

a) 330° ; b) 150° ; c) 240° ; d) $\frac{2\pi}{3}$; e) $\frac{3\pi}{4}$; f) $\frac{7\pi}{6}$; g) $\frac{5\pi}{3}$.

2. Calculează:

a) $\sin 135^\circ + \cos 45^\circ$; d) $\sqrt{3} \cdot \sin 330^\circ + \cos^2 225^\circ$;
 b) $\cos 135^\circ - \cos 30^\circ + \sin 150^\circ$; e) $\cos 330^\circ + \sin 240^\circ$;
 c) $\sin 120^\circ - \cos 150^\circ$; f) $\cos 210^\circ + \cos 300^\circ$.



3. Calculează:

- a) $\sqrt{3} \cdot \cos \frac{7\pi}{6} + 3 \sin \frac{5\pi}{6}$; e) $\sin^2 \frac{5\pi}{4} - 2 \sin \frac{7\pi}{6}$; i) $\cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{7\pi}{4} \cdot \cos \frac{3\pi}{4}$;
 b) $\sin \frac{7\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4}$; f) $\cos^2 \frac{5\pi}{3} + 4 \cos^2 \frac{4\pi}{3}$; j) $\cos \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \frac{7\pi}{6} - \sin \frac{7\pi}{6} \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$;
 c) $\cos \frac{5\pi}{3} + \sin \frac{7\pi}{6}$; g) $\sin^2 \frac{11\pi}{6} + \cos^2 \frac{5\pi}{6}$; k) $\cos \frac{5\pi}{6} \cdot \sin \frac{4\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{6} \cdot \cos \frac{4\pi}{3}$;
 d) $\cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4}$; h) $\cos^2 \frac{2\pi}{3} + \sin^2 \frac{5\pi}{6}$; l) $\cos \frac{5\pi}{6} \cdot \sin \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{6} \cdot \cos \frac{7\pi}{4}$.

4. Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

- a) $\sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{7\pi}{5} = ______$; c) $\sin \frac{9\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} = ______$;
 b) $\cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{2\pi}{3} = ______$; d) $\cos^2 \frac{7\pi}{8} + \sin^2 \frac{15\pi}{8} = ______$.

5. Calculează:

- a) $\cos 0^\circ + \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 180^\circ$;
 b) $\sin 0^\circ + \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 90^\circ - \sin 91^\circ - \sin 92^\circ - \dots - \sin 180^\circ$;
 c) $\frac{\sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \sin 90^\circ}{\sin 91^\circ \cdot \sin 92^\circ \cdot \sin 93^\circ \cdot \dots \cdot \sin 179^\circ}$.

6. Calculează:

- a) $\cos^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{4\pi}{5}$; c) $\cos^2 \frac{11\pi}{7} + \sin^2 \frac{4\pi}{7}$; e) $\cos^2 \frac{13\pi}{11} + \sin^2 \frac{20\pi}{11}$;
 b) $\sin^2 \frac{11\pi}{9} + \cos^2 \frac{2\pi}{9}$; d) $\cos^2 \frac{7\pi}{10} + \sin^2 \frac{13\pi}{10}$; f) $\sin^2 \frac{9\pi}{13} + \cos^2 \frac{22\pi}{13}$.

7. Calculează folosind formulele de reducere la primul cadran.

- a) $\sin \frac{9\pi}{14} - \sin \frac{5\pi}{14}$; e) $\sin \frac{8\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7}$; i) $\cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{17\pi}{12}$;
 b) $\cos \frac{17\pi}{10} - \cos \frac{3\pi}{10}$; f) $\cos \frac{19\pi}{10} + \cos \frac{9\pi}{10}$; j) $\sin \frac{6\pi}{11} + \sin \frac{16\pi}{11}$;
 c) $\sin \frac{24\pi}{19} + \sin \frac{5\pi}{19}$; g) $\sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{13\pi}{8}$; k) $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{7\pi}{5}$;
 d) $\cos \frac{8\pi}{15} + \cos \frac{7\pi}{15}$; h) $\cos \frac{8\pi}{5} + \cos \frac{7\pi}{5}$; l) $\sin \frac{11\pi}{18} + \sin \frac{25\pi}{18}$.

8. Calculează:

- a) $\cos 135^\circ + \sin 135^\circ - 2 \cos 225^\circ$;
 b) $\sin 13^\circ + \sin 167^\circ + \sin 193^\circ + \sin 347^\circ$;
 c) $\cos 5^\circ + \cos 175^\circ + \cos 185^\circ + \cos 355^\circ$.

9. a) Fie $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ astfel încât $\sin x = \frac{3}{4}$. Determină $\sin(\pi - x)$, $\sin(\pi + x)$ și $\sin(2\pi - x)$.
 b) Fie $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ astfel încât $\cos x = -\frac{1}{3}$. Determină $\cos(\pi - x)$, $\cos(\pi + x)$ și $\sin(2\pi - x)$.
 c) Fie $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ astfel încât $\cos x = \frac{2}{5}$. Determină $\cos(2\pi - x)$, $\sin(x - \pi)$ și $\cos(3\pi - x)$.

Portofoliu

Transcrie pe o coală și completează tabelul următor:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
sinx																
cosx																

2.1. Funcțiile sinus și cosinus

Descopăr

1. Completează tabelul următor, reprezintă punctele de coordonate $(t, \sin t)$ în reperul cartezian xOy și unește-le printr-o linie curbă.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin t$																	

2. Completează tabelul următor, reprezintă punctele de coordonate $(t, \cos t)$ în reperul cartezian xOy și unește-le printr-o linie curbă.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos t$																	



Învăț

În lecțiile anterioare au fost prezentate funcțiile trigonometrice sinus și cosinus, definite pe intervalul $[0, 2\pi]$, care corespunde efectuării de către un punct M al cercului trigonometric a unei rotații complete în sens pozitiv. Intervalul $[2\pi, 4\pi]$ corespunde unei a doua rotații, intervalul $[4\pi, 6\pi]$ corespunde unei a treia rotații ș.a.m.d.

Dacă deplasarea punctului M , care pornește din $A(1, 0)$, se face în sens negativ, intervalul $[-2\pi, 0]$ corespunde primei rotații complete, intervalul $[-4\pi, -2\pi]$ corespunde celei de-a doua rotații ș.a.m.d.

Cum oricărui număr real t îi corespunde un punct M_t pe cercul trigonometric, putem extinde domeniul de definiție al funcțiilor sinus și cosinus de la intervalul $[0, 2\pi]$ la $\mathbb{R}$.

Definiția 1. Se numește sinus funcția trigonometrică $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $\sin t = y_M$, unde y_M este ordonata punctului M de pe cercul trigonometric asociat numărului real t .

Definiția 2. Se numește cosinus funcția trigonometrică $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $\cos t = x_M$, unde x_M este abscisa punctului M de pe cercul trigonometric asociat numărului real t .

Fie t un număr real. Numerele $\cos t$ și $\sin t$ sunt abscisa și, respectiv, ordonata unui punct de pe cercul trigonometric, care are raza 1. De aici rezultă că:

- $-1 \leq \cos t \leq 1$ și $-1 \leq \sin t \leq 1$, pentru orice număr real t ;
- $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, pentru orice număr real t (formula fundamentală a trigonometriei).

Proprietate. Funcția trigonometrică sinus este impară, iar funcția trigonometrică cosinus este pară.

Altfel spus, $\cos(-t) = \cos t$, $\sin(-t) = -\sin t$, pentru orice număr real t .

Demonstrație.

Fie t un număr real. Știm că există și sunt unice un număr întreg k și un număr real $\alpha \in [0, 2\pi)$, astfel încât $t = \alpha + 2k\pi$. Punctele de pe cercul trigonometric asociate numerelor reale α și t coincid, deci $M_\alpha = M_t$.

Având în vedere că punctele de pe cercul trigonometric $-t = -\alpha - 2k\pi = (2\pi - \alpha) + (-k - 1) \cdot 2\pi$ și $-\alpha = (2\pi - \alpha) + (-1) \cdot 2\pi$ asociate numerelor reale $-\alpha$, $2\pi - \alpha$ și $-t$ coincid, rezultă că $M_{2\pi-\alpha} = M_{-t} = M_{-\alpha}$.

Punctele M_α și $M_{-\alpha}$ sunt simetrice față de axa Ox , de unde rezultă că și punctele M_t și M_{-t} sunt simetrice față de axa Ox , deci au abscise egale și ordonatele opuse. Cum $M_t(\cos t, \sin t)$ și $M_{-t}(\cos(-t), \sin(-t))$, obținem $\cos(-t) = \cos t$, $\sin(-t) = -\sin t$.

În figura 1 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția sinus definită pe intervalul $[0, 2\pi]$, pe baza următorului tabel de valori:

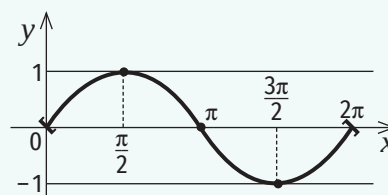


Figura 1

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

În figura 2 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția sinus definită pe $\mathbb{R}$.

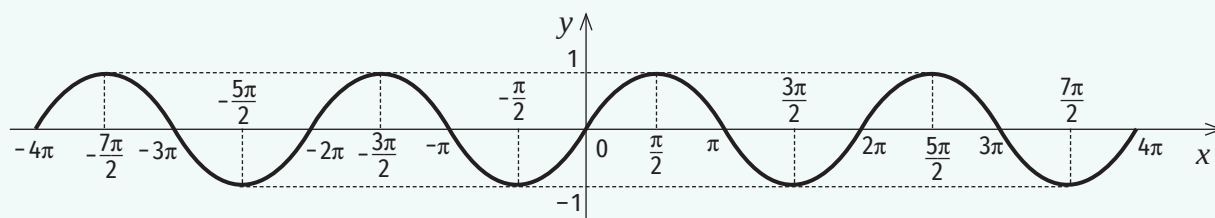


Figura 2

Observăm că porțiunea de grafic corespunzătoare intervalului $[0, 2\pi]$ se repetă identic pe fiecare interval de forma $[2k\pi, (2k+2)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. Aceasta arată că valorile funcției sinus se repetă după un interval de lungime 2π . Prin urmare, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, pentru orice număr real x .

Spunem că funcția sinus este periodică, iar 2π este o perioadă a sa.

Definiția 3. Fie D o mulțime nevidă și $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție numerică. Funcția f se numește funcție periodică dacă există $T \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $x + T \in D$ și $f(x + T) = f(x)$, pentru orice $x \in D$. Numărul T se numește perioadă a funcției f .

Dacă printre perioadele pozitive ale funcției f există un cel mai mic T_0 , atunci T_0 se numește perioada principală a funcției f .

Propoziția 1. Funcția trigonometrică sinus este periodică și are perioada principală 2π .

Demonstrație.

Fie t un număr real. Pentru orice număr întreg k , numerelor reale t și $t + 2k\pi$ le corespunde același punct pe cercul trigonometric, deci $M_t = M_{t+2k\pi}$. Cum $M_t(\cos t, \sin t)$ și $M_{t+2k\pi}(\cos(t + 2k\pi), \sin(t + 2k\pi))$, obținem $\sin(t + 2k\pi) = \sin t$, adică funcția sinus este periodică.

Este evident că 2π este perioadă pentru funcția sinus. În continuare vom demonstra că 2π este perioada principală, adică este cea mai mică perioadă pozitivă.

Presupunem prin absurd că există $T \in (0, 2\pi)$ astfel încât $\sin(T + t) = \sin t$, pentru orice număr real t . Pentru $t = 0$ avem $\sin(T) = \sin 0 = 0$, de unde rezultă că $T = \pi$, dar π nu e perioadă a funcției sinus, așadar presupunerea făcută este falsă. Prin urmare, funcția trigonometrică sinus este periodică și are perioada principală 2π .

OBSERVAȚII.

1. Reprezentarea grafică a funcției sinus în reperul cartezian xOy este o curbă numită sinusoidă.
2. Reprezentarea grafică a funcției sinus este simetrică față de originea reperului cartezian xOy (funcția sinus este impară).

Prin examinarea reprezentării grafice a funcției sinus (figura 2), deducem următoarele proprietăți ale acesteia:

- Funcția sinus este strict crescătoare pe orice interval de forma $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, și strict descrescătoare pe fiecare interval de forma $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x > 0$, pentru orice $x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x < 0$, pentru orice $x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x = 0$, pentru orice $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

În figura 3 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția cosinus definită pe intervalul $[0, 2\pi]$, pe baza următorului tabel de valori:

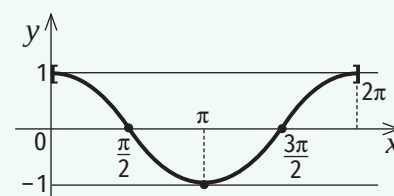


Figura 3

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

În figura 4 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția cosinus definită pe $\mathbb{R}$.

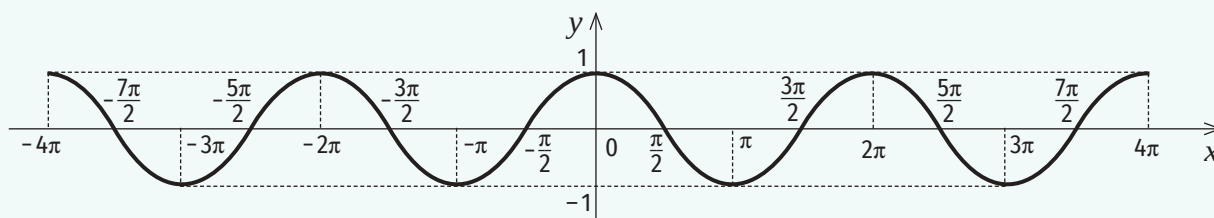


Figura 4

Observăm că porțiunea de grafic corespunzătoare intervalului $[0, 2\pi]$ se repetă identic pe fiecare interval de forma $[2k\pi, (2k+2)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. Aceasta arată că valorile funcției cosinus se repetă după un interval de lungime 2π . Prin urmare, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, pentru orice număr real x .

Spunem că funcția cosinus este periodică, iar 2π este o perioadă a sa.

Propoziția 2. Funcția trigonometrică cosinus este periodică și are perioada principală 2π .

Demonstrație.

Fie t un număr real. Pentru orice număr întreg k , numerelor reale t și $t + 2k\pi$ le corespunde același punct pe cercul trigonometric, deci $M_t = M_{t+2k\pi}$. Cum $M_t(\cos t, \sin t)$ și $M_{t+2k\pi}(\cos(t + 2k\pi), \sin(t + 2k\pi))$, obținem $\cos(t + 2k\pi) = \cos t$, adică funcția cosinus este periodică.

Este evident că 2π este perioadă pentru funcția cosinus. În continuare vom demonstra că 2π este perioada principală, adică este cea mai mică perioadă pozitivă.

Presupunem prin absurd că există $T \in (0, 2\pi)$ astfel încât $\cos(T + t) = \cos t$, pentru orice număr real t . Pentru $t = 0$ avem $\cos T = \cos 0 = 1$, de unde rezultă că există un punct pe cercul trigonometric, diferit de $A(1, 0)$, a cărui abscisă este egală cu 1, ceea ce este fals, așadar presupunerea făcută este falsă. Prin urmare, funcția trigonometrică cosinus este periodică și are perioadă principală 2π .

OBSERVAȚIE.

Reprezentarea grafică a funcției cosinus în reperul cartezian xOy este simetrică față de axa Oy (funcția cosinus este pară).

Prin examinarea reprezentării grafice a funcției cosinus, deducem următoarele proprietăți ale acesteia:

- **Funcția cosinus este strict crescătoare pe orice interval de forma $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, și strict descrescătoare pe fiecare interval de forma $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.**
- $\cos x > 0$, pentru orice $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x < 0$, pentru orice $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x = 0$, pentru orice $x \in \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exerciții rezolvate

1. Calculează:

a) $\sin \frac{35\pi}{3}$, b) $\cos \frac{99\pi}{4}$, c) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; d) $\sin\left(-\frac{232\pi}{3}\right)$; e) $\cos\left(-\frac{187\pi}{6}\right)$.

Rezolvare:

a) $\sin \frac{35\pi}{3} = \sin\left(\frac{5\pi}{3} + 5 \cdot 2\pi\right) = \sin \frac{5\pi}{3}$

Cum $\frac{5\pi}{3}$ se află în cadranul IV, folosind formulele de reducere la primul cadran, obținem $\sin \frac{5\pi}{3} = -\sin\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Așadar, $\sin \frac{35\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\cos \frac{99\pi}{4} = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + 12 \cdot 2\pi\right) = \cos \frac{3\pi}{4}$

Cum $\frac{3\pi}{4}$ se află în cadranul II, folosind formulele de reducere la primul cadran, obținem $\cos \frac{3\pi}{4} = -\cos\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Așadar, $\cos \frac{99\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

d) $\sin\left(-\frac{232\pi}{3}\right) = -\sin \frac{232\pi}{3} = -\sin\left(\frac{4\pi}{3} + 38 \cdot 2\pi\right) = -\sin \frac{4\pi}{3}$

Cum $\frac{4\pi}{3}$ se află în cadranul III, folosind formulele de reducere la primul cadran, obținem $\sin \frac{4\pi}{3} = -\sin\left(\frac{4\pi}{3} - \pi\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Așadar, $\sin\left(-\frac{232\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

e) $\cos\left(-\frac{187\pi}{6}\right) = \cos \frac{187\pi}{6} = \cos\left(\frac{7\pi}{6} + 15 \cdot 2\pi\right) = \cos \frac{7\pi}{6}$

Cum $\frac{7\pi}{6}$ se află în cadranul III, folosind formulele de reducere la primul cadran, obținem $\cos \frac{7\pi}{6} = -\cos\left(\frac{7\pi}{6} - \pi\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Așadar, $\cos\left(-\frac{187\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



2. Stabilește semnul următoarelor numere reale:

a) $\sin \frac{5\pi}{4} - \sin \frac{8\pi}{7}$; b) $\sin 2 - \sin 3$; c) $\cos 5 - \cos 4$;

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \frac{8\pi}{7} \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \\ \frac{5\pi}{4} \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \\ \text{Funcția sinus e descrescătoare pe intervalul } \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right). \\ \frac{8\pi}{7} < \frac{5\pi}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \sin \frac{8\pi}{7} > \sin \frac{5\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \frac{5\pi}{4} - \sin \frac{8\pi}{7} < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } 2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ 3 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ \text{Funcția sinus e descrescătoare pe intervalul } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \\ 2 < 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin 2 > \sin 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 2 - \sin 3 > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{c) } 4 \in (\pi, 2\pi) \\ 5 \in (\pi, 2\pi) \\ \text{Funcția cosinus e crescătoare pe intervalul } (\pi, 2\pi). \\ 4 < 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \cos 5 > \cos 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 5 - \cos 4 > 0$$

3. Studiază paritatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x - \sin x$.

Rezolvare:

$$f(-x) = \cos(-x) - \sin(-x) = \cos x - (-\sin x) = \cos x + \sin x, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

Funcția f nu este nici pară, nici impară.

Aplic

1. Calculează:

a) $\sin \frac{14\pi}{3}$; d) $\sin \frac{253\pi}{4}$; g) $\sin 2001\pi$; j) $\sin\left(-\frac{1001\pi}{4}\right)$;

b) $\cos \frac{35\pi}{3}$; e) $\cos \frac{307\pi}{6}$; h) $\cos(-101\pi)$; k) $\cos\left(-\frac{1201\pi}{6}\right)$;

c) $\sin \frac{103\pi}{4}$; f) $\cos \frac{799\pi}{4}$; i) $\sin\left(-\frac{401\pi}{6}\right)$; l) $\cos\left(-\frac{887\pi}{3}\right)$.

2. Stabilește semnul următoarelor numere:

a) $\sin \frac{668\pi}{11}$; c) $\sin \frac{823\pi}{5}$; e) $\sin\left(-\frac{129\pi}{7}\right)$; g) $\sin\left(-\frac{1125\pi}{12}\right)$; i) $\sin 100$;

b) $\cos \frac{319\pi}{6}$; d) $\cos \frac{243\pi}{7}$; f) $\cos\left(-\frac{1352\pi}{14}\right)$; h) $\sin\left(-\frac{1827\pi}{20}\right)$; j) $\cos 1000$.

3. Studiază paritatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) $f(x) = \cos x + \sin x$; c) $f(x) = |\sin 2x|$; e) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x + 1}$;

b) $f(x) = -3\cos x \cdot \sin x$; d) $f(x) = \sin^3 x$; f) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 2}$.





4. Stabilește semnul următoarelor numere:

- a) $\sin \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{18}$; d) $\cos \frac{421\pi}{18} - \cos \frac{367\pi}{15}$; g) $\sin 5 - \sin 4$;
 b) $\cos \frac{13\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{10}$; e) $\sin \left(-\frac{287\pi}{12}\right) - \sin \left(-\frac{211\pi}{9}\right)$; h) $\cos(-4) - \cos(-5)$;
 c) $\sin \frac{313\pi}{12} - \sin \frac{257\pi}{10}$; f) $\cos \left(-\frac{373\pi}{14}\right) - \cos \left(-\frac{277\pi}{11}\right)$; i) $\sin(-7) - \sin(-8)$.

5. Se consideră expresia

$E(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 4\cos\left(x + \frac{7\pi}{6}\right)$, unde x este număr real. Calculează:

- a) $E(0)$; f) $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$;
 b) $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$; g) $E\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$;
 c) $E\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$; h) $E(\pi)$;
 d) $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$; i) $E(3\pi)$;
 e) $E\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$; j) $E(-5\pi)$.

6. Determină mulțimea valorilor funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) $f(x) = 3 + \cos x$; d) $f(x) = |\sin 2x| - 1$;
 b) $f(x) = \sin x - 2$; e) $f(x) = |2 - \cos x| - \cos x$;
 c) $f(x) = 2 - 3\sin 5x$; f) $f(x) = |1 + \cos x| + |\cos x - 1|$.

7. Demonstrează că numărul real T este perioadă pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$, $T = 4\pi$; c) $f(x) = 2\cos 4x - 3\sin 8x$, $T = \frac{\pi}{2}$;
 b) $f(x) = \cos x - \sin 2x$, $T = 2\pi$; d) $f(x) = 2\cos \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{3}$, $T = 12\pi$.

8. Demonstrează că:

- a) $(\sin x + \cos x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
 b) $\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cdot \cos x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
 c) $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
 d) $\sin^4 x - \sin^2 x = \cos^4 x - \cos^2 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

9. Compară numerele reale a și b .

- a) $a = \cos 90^\circ$, $b = \cos 90$; c) $a = \sin 180^\circ$, $b = \sin 180$;
 b) $a = \cos 100^\circ$, $b = \cos 100$; d) $a = \sin 50^\circ$, $b = \sin 50$.

10. a) Fie $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ astfel încât $\sin^2 x = \frac{4}{9}$.

Calculează $\sin x \cdot \sqrt{1 - \cos^2 x} + \cos x \cdot \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

b) Fie $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Calculează $\sin x \cdot \sqrt{1 - \cos^2 x} - \cos x \cdot \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

11. Demonstrează că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - x$ nu e periodică.

12. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin 20x + \cos 12x$.

- a) Demonstrează că funcția f este periodică.
 b) Determină perioada principală a funcției f .

2.2. Funcțiile tangentă și cotangentă

Descopăr

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A . Scrie ca rapoarte de lungimi de segmente: $\cos B, \cos C, \sin B, \sin C, \operatorname{tg} B, \operatorname{tg} C, \operatorname{ctg} B, \operatorname{ctg} C$. Ce observi?



Învăț

Rezolvând exercițiul propus la secțiunea **Descopăr**, observăm că $\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B}$ și $\operatorname{ctg} B = \frac{\cos B}{\sin B}$. Așadar, într-un triunghi dreptunghic, tangenta și cotangenta unui unghi ascuțit se pot exprima cu ajutorul sinusului și cosinusului acelui unghi.

Definiția 1. Funcția $\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ se numește funcția tangentă.

Definiția 2. Funcția $\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ se numește funcția cotangentă.

Proprietate. Funcțiile trigonometrice tangentă și cotangentă sunt impare.

Altfel spus, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$, pentru orice număr real x .

Demonstrație.

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x, (\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\frac{\cos x}{\sin x} = -\operatorname{ctg} x, (\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

În figura 1 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția tangentă pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pe baza următorului tabel de valori:

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{tg} x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

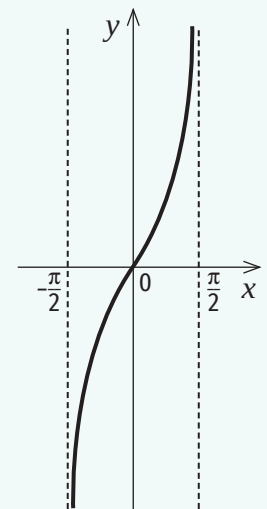


Figura 1

În figura 2 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția tangentă definită pe $\mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Observăm că porțiunea de grafic corespunzătoare intervalului $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se repetă identic pe fiecare interval de forma $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Aceasta arată că valorile funcției tangentă se repetă după un interval de lungime π .

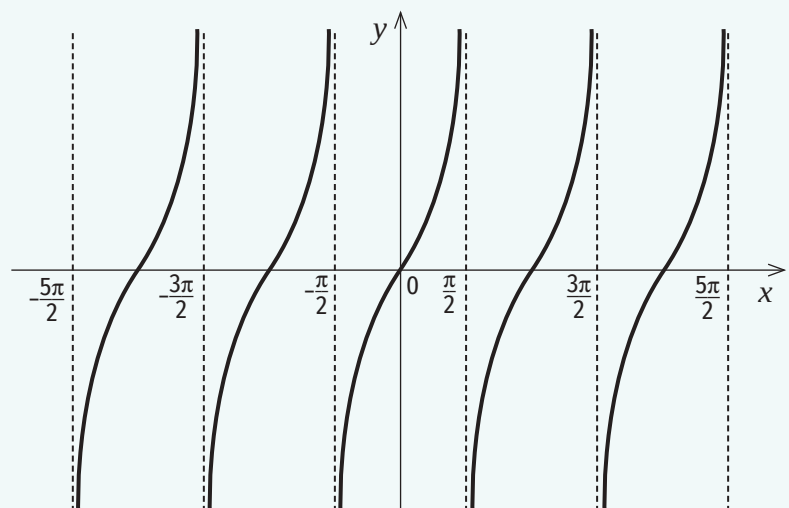


Figura 2

Prin urmare, $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Spunem că funcția tangentă este periodică, iar π este o perioadă a sa.

Propoziția 1. Funcția trigonometrică tangentă este periodică și are perioada principală π .

OBSERVAȚIE. 

Reprezentarea grafică a funcției tangentă este simetrică față de originea reperului cartezian xOy .

Prin examinarea reprezentării grafice a funcției tangentă, deducem următoarele **proprietăți** ale acesteia:

- Funcția tangentă este strict crescătoare pe orice interval de forma $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $\operatorname{tg} x > 0$, pentru orice $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $\operatorname{tg} x < 0$, pentru orice $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $\operatorname{tg} x = 0$, pentru orice $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

În figura 3 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția cotangentă pe intervalul $(0, \pi)$, pe baza următorului tabel de valori:

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\operatorname{ctg} x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

În figura 4 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția cotangentă definită pe $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Observăm că porțiunea de grafic corespunzătoare intervalului $(0, \pi)$ se repetă identic pe fiecare interval de forma $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Aceasta arată că valorile funcției cotangentă se repetă după un interval de lungime π . Prin urmare, $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Spunem că funcția cotangentă este periodică, iar π este o perioadă a sa.

Propoziția 2. Funcția trigonometrică cotangentă este periodică și are perioada principală π .

OBSERVAȚIE. 

Reprezentarea grafică a funcției cotangentă este simetrică față de originea reperului cartezian xOy .

Prin examinarea reprezentării grafice a funcției cotangentă, deducem următoarele **proprietăți** ale acesteia:

- Funcția cotangentă este strict descrescătoare pe orice interval de forma $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $\operatorname{ctg} x > 0$, pentru orice $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $\operatorname{ctg} x < 0$, pentru orice $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $\operatorname{ctg} x = 0$, pentru orice $x \in \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

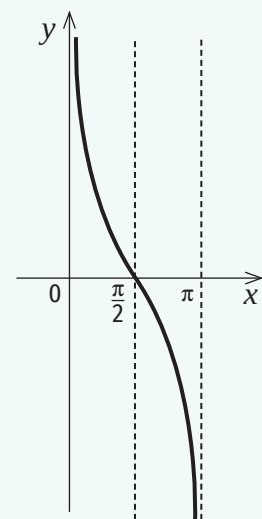


Figura 3

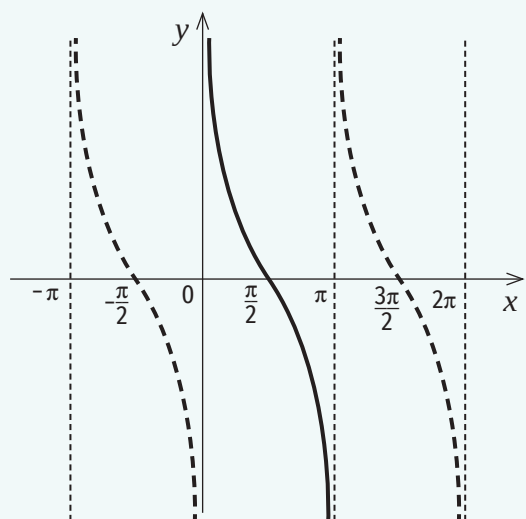


Figura 4

Exerciții rezolvate

1. Determină semnul numărului real a .

$$a) a = \operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{7\pi}{5}; \quad b) a = \operatorname{ctg} \frac{289\pi}{5} \cdot \operatorname{ctg} \frac{17\pi}{13}.$$

Rezolvare:

$$a) \left. \begin{array}{l} 2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \operatorname{tg} 2 < 0 \\ \frac{7\pi}{5} \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{7\pi}{5} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{7\pi}{5} < 0 \Rightarrow a < 0$$

$$b) \left. \begin{array}{l} \frac{289\pi}{5} = \frac{9\pi}{5} + 28 \cdot 2\pi \Rightarrow \text{unghiul cu măsura egală cu } \frac{289\pi}{5} \text{ este în cadranul IV} \Rightarrow \\ \operatorname{ctg} \frac{289\pi}{5} < 0 \\ \frac{17\pi}{13} \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{17\pi}{13} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{289\pi}{5} \cdot \operatorname{ctg} \frac{17\pi}{13} < 0 \Rightarrow a < 0$$

2. Compară numerele reale:

$$a) \operatorname{tg} \frac{\pi}{5} \text{ și } \operatorname{tg} \frac{15\pi}{8}; \quad b) \operatorname{tg} \frac{4\pi}{5} \text{ și } \operatorname{tg} \frac{6\pi}{7}; \quad c) \operatorname{ctg} \frac{10\pi}{7} \text{ și } \operatorname{ctg} \frac{26\pi}{15}; \quad d) \operatorname{tg} \sqrt{2} \text{ și } \operatorname{ctg} \sqrt{3}.$$

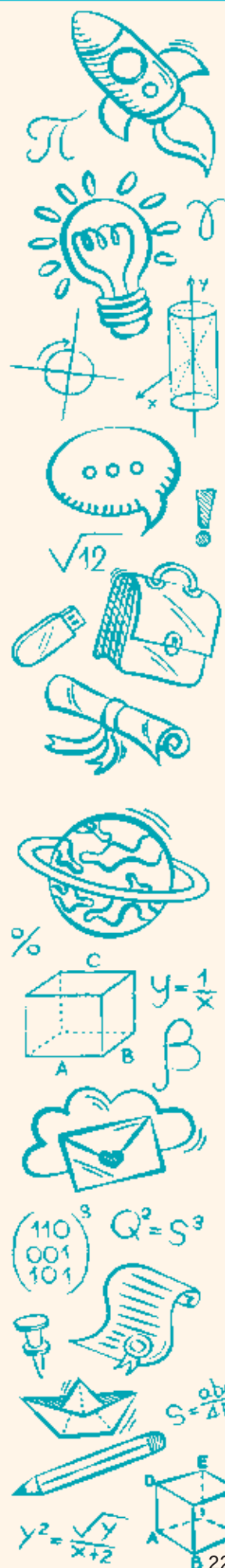
Rezolvare:

$$a) \left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{5} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{5} > 0 \\ \frac{15\pi}{8} \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{15\pi}{8} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{5} > \operatorname{tg} \frac{15\pi}{8}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} \frac{4\pi}{5} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \\ \frac{6\pi}{7} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \\ \text{Funcția tangentă e crescătoare pe intervalul } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right). \\ \frac{4\pi}{5} < \frac{6\pi}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{4\pi}{5} < \operatorname{tg} \frac{6\pi}{7}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} \frac{10\pi}{7} \in (\pi, 2\pi) \\ \frac{26\pi}{15} \in (\pi, 2\pi) \\ \text{Funcția cotangentă e descrescătoare pe intervalul } (\pi, 2\pi). \\ \frac{10\pi}{7} < \frac{26\pi}{15} \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{10\pi}{7} > \operatorname{ctg} \frac{26\pi}{15}$$

$$d) \left. \begin{array}{l} \sqrt{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} \sqrt{2} > 0 \\ \sqrt{3} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \operatorname{ctg} \sqrt{3} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \sqrt{2} > \operatorname{ctg} \sqrt{3}$$



Aplic

1. Calculează:

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$; | g) $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right)$; | m) $\operatorname{ctg} \frac{198\pi}{4}$; |
| b) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$; | h) $\operatorname{tg} \left(-\frac{143\pi}{6} \right)$; | n) $\operatorname{ctg} \frac{203\pi}{6}$; |
| c) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$; | i) $\operatorname{tg} \left(-\frac{185\pi}{3} \right)$; | o) $\operatorname{ctg} \frac{401\pi}{3}$; |
| d) $\operatorname{tg} \frac{2005\pi}{3}$; | j) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6}$; | p) $\operatorname{ctg} \left(-\frac{2\pi}{3} \right)$; |
| e) $\operatorname{tg} \frac{182\pi}{3}$; | k) $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4}$; | q) $\operatorname{ctg} \left(-\frac{15\pi}{4} \right)$; |
| f) $\operatorname{tg} \frac{322\pi}{6}$; | l) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3}$; | r) $\operatorname{ctg} \left(-\frac{125\pi}{6} \right)$. |

2. Determină semnul numărului real:

- a) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{9}$; b) $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{7}$; c) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$; d) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$; e) $\operatorname{tg} 2$; f) $\operatorname{tg} 5$; g) $\operatorname{tg} 7$.

3. Determină semnul numărului real a :

- | | |
|--|--|
| a) $a = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8} \cdot \operatorname{ctg} \frac{34\pi}{5}$; | e) $a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \cdot \operatorname{tg} \frac{7\pi}{5} \cdot \operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{11\pi}{15}$; |
| b) $a = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{10\pi}{9}$; | f) $a = \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{7} \cdot \operatorname{ctg} \frac{47\pi}{5} \cdot \operatorname{ctg} \frac{35\pi}{9} \cdot \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{12}$; |
| c) $a = \operatorname{ctg} 8 \cdot \operatorname{tg} \sqrt{15}$; | g) $a = \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} 3 \cdot \operatorname{tg} 5 \cdot \operatorname{tg} 7 \cdot \operatorname{tg} 9$; |
| d) $a = \operatorname{ctg} 3 \cdot \operatorname{tg} \frac{3}{2}$; | h) $a = \frac{\operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{ctg} 4}{\operatorname{ctg} 6 \cdot \operatorname{tg} 8}$. |

4. Determină semnul numărului real a :

- | | | |
|--|--|---|
| a) $a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}$; | d) $a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} - \operatorname{tg} \frac{11\pi}{12}$; | g) $a = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{10} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$; |
| b) $a = \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{13\pi}{8}$; | e) $a = \operatorname{ctg} 5 - \operatorname{ctg} 4$; | h) $a = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{3\pi}{5}$; |
| c) $a = \operatorname{ctg} \frac{31\pi}{16} + \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{8}$; | f) $a = \operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 1$; | i) $a = \operatorname{tg} \frac{21\pi}{10} - \operatorname{tg} \frac{11\pi}{7}$. |

5. Ordonează crescător numerele reale: $\operatorname{tg} \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} \sqrt{5}$.6. Studiază paritatea funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) $f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg}^4 x$;
- b) $f: \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sin x$;
- c) $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg}^2 3x$;
- d) $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x + \operatorname{tg}^3 x$.

7. Determină domeniul maxim de definiție al funcției f .

- a) $f(x) = \operatorname{tg} \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$; b) $f(x) = \operatorname{ctg} \left(3x - \frac{\pi}{3} \right)$.

8. Determină perioada principală a funcției f .

- a) $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} 2x$;
- b) $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x \operatorname{tg} 3x$;
- c) $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} 4x$.



2.3. Relații între funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangenta și cotangenta

Descopăr

1. Fie $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ și M, N punctele de pe cercul trigonometric corespunzătoare unghiurilor cu măsura t , respectiv $\frac{\pi}{2} - t$. Punctele M' și N' sunt proiecțiile punctelor M și N pe axa Ox .
 - a) Demonstrează că triunghiurile OMM' și NON' sunt congruente.
 - b) Dedu relațiile $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$ și $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$, pentru orice $t \in (0, \frac{\pi}{2})$.
2. Demonstrează, folosindu-te de rapoartele de lungimi de segmente care se pot scrie pentru un unghi ascuțit de măsură t într-un triunghi dreptunghic, că $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$ și $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$, pentru orice $t \in (0, \frac{\pi}{2})$.



Învăț

Fie x un număr real. Atunci $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, de unde rezultă că $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ și $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, atunci:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1}.$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$$

Dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, atunci:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \operatorname{ctg}^2 x = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \Rightarrow \operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x + 1}.$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x + 1} = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x + 1} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x + 1}$$

Fie $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ și $M(\cos t, \sin t)$ punctul de pe cercul trigonometric corespunzător unghiului cu măsură t .

Punctul $N(\cos(\frac{\pi}{2} - t), \sin(\frac{\pi}{2} - t))$ este punctul de pe cercul trigonometric corespunzător unghiului cu măsură $\frac{\pi}{2} - t$ (figurile 1 și 2).

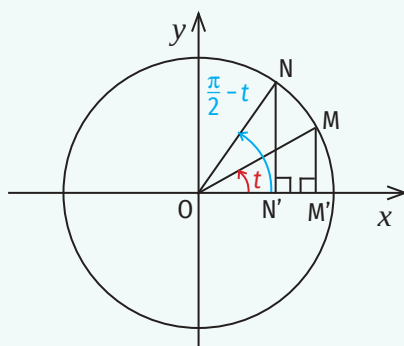


Figura 1

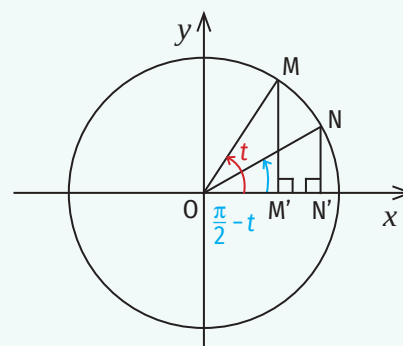


Figura 2

Punctele M' și N' sunt proiecțiile punctelor M și N pe axa Ox . Atunci $OM' = \cos t$, $MM' = \sin t$, $ON' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, $NN' = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$. Triunghiurile dreptunghice $MM'O$ și $ON'N$ sunt congruente ($OM \equiv ON$, $\sphericalangle MOM' \equiv \sphericalangle ONN'$), de unde rezultă $OM' \equiv NN'$, $MM' \equiv ON'$.

$$OM' \equiv NN' \Rightarrow \cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \quad MM' \equiv ON' \Rightarrow \sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

Așadar, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ și $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (1).

Fie $\alpha \in [0, 2\pi)$ și $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$ punctul de pe cercul trigonometric asociat unghiului cu măsura α . Simetricul punctului M față de prima bisectoare este $N\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$. Cum abscisa lui N este egală cu ordonata lui M , iar ordonata lui N este egală cu abscisa lui M , obținem $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ și $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$.

Știm că, pentru orice număr real x , există și sunt unice un număr întreg k și un număr real $\alpha \in [0, 2\pi)$, astfel încât $x = \alpha + 2k\pi$. Cum funcțiile trigonometrice sinus și cosinus sunt periodice, cu perioada principală 2π , rezultă că $\sin x = \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$ și $\cos x = \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$.

Așadar, **$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ și $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, pentru orice număr real x .**

$$\text{Fie } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}. \text{ Atunci, } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

$$\text{Fie } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}. \text{ Atunci, } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Așadar:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exerciții rezolvate

1. Determină $\cos x$, știind că $\operatorname{tg} x = -2$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Rezolvare:

$$\operatorname{tg} x = -2 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -2 \Rightarrow \sin x = -2\cos x$$

Folosim formula fundamentală a trigonometriei $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Cum $\sin x = -2\cos x$, obținem $(-2\cos x)^2 + \cos^2 x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} 4\cos^2 x + \cos^2 x = 1 &\Leftrightarrow 5\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5} \\ x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) &\Rightarrow \cos x < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

2. Compară $\sin 2$ cu $\cos 1$.

Rezolvare:

$$2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \sin 2 = \sin(\pi - 2)$$

Am folosit formula $\sin t = \sin(\pi - t)$, pentru orice $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

$$\cos 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Am folosit formula $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Trebuie să comparăm $\sin(\pi - 2)$ cu $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

$$\pi - 2 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi - 2 - \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{\pi}{2} - 1 > 0 \Rightarrow \pi - 2 > \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\pi - 2, \frac{\pi}{2} - 1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\pi - 2 > \frac{\pi}{2} - 1$$

Funcția sinus este crescătoare pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\Rightarrow \sin(\pi - 2) > \sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \Rightarrow \sin 2 > \cos 1$$

Aplic

1. Calculează:

a) $\sin 50^\circ - \cos 40^\circ$;

d) $\sin \frac{3\pi}{20} + \cos \frac{13\pi}{20}$;

g) $\sin \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{12}$;

b) $\sin 140^\circ + \cos 130^\circ$;

e) $\cos \frac{\pi}{30} - \sin \frac{7\pi}{15}$;

h) $\sin \frac{15\pi}{16} - \cos \frac{25\pi}{16}$;

c) $\cos 290^\circ - \sin 160^\circ$;

f) $\sin \frac{17\pi}{18} - \cos \frac{4\pi}{9}$;

i) $\cos \frac{23\pi}{20} - \sin \frac{33\pi}{20}$.

2. Compară:

a) $\sin \frac{\pi}{7}$ și $\cos \frac{5\pi}{13}$;

c) $\sin \sqrt{2}$ și $\cos 1$;

e) $\sin \sqrt{19}$ și $\cos(-4)$;

b) $\sin \frac{19\pi}{14}$ și $\cos \frac{5\pi}{8}$;

d) $\cos 3$ și $\sin 5$;

f) $\sin 3,2$ și $\cos(-3,5)$.

3. Fie $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\operatorname{tg} x = 3$. Calculează:

a) $\frac{3\sin x - 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x}$;

b) $\frac{\sin^2 x + 3\cos^2 x - \sin x \cos x}{3\sin^2 x + 2\sin x \cos x}$.

4. Determină $\operatorname{tg} x$, știind că:

a) $\sin x = \frac{2}{3}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

b) $\cos x = -\frac{1}{3}$, $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

5. Determină $\operatorname{ctg} x$, știind că:

a) $\sin x = -\frac{5}{6}$ și $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$;

b) $\cos x = -\frac{3}{4}$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

6. Determină $\cos x$, știind că:

a) $\operatorname{tg} x = 2$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$;

b) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ și $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$;

d) $\operatorname{ctg} x = -\frac{5}{12}$ și $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

7. Determină $\sin x$, știind că:

a) $\operatorname{tg} x = \frac{7}{4}$ și $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$;

c) $\operatorname{ctg} x = -3$ și $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$;

b) $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

d) $\operatorname{ctg} x = -\frac{8}{15}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

8. Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x = \frac{4}{5}$. Calculează:

a) $\frac{3\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x}{4\operatorname{ctg} x + 2\operatorname{tg} x}$;

b) $\frac{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}{3\operatorname{tg}^2 x}$.



9. Calculează:

- a) $\sin 0^\circ + \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 45^\circ - \cos 46^\circ - \cos 47^\circ - \dots - \cos 90^\circ$;
 b) $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 89^\circ$.

10. Fie $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ astfel încât $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$. Calculează $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

11. Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{5}{2}$. Calculează:

- a) $\sin x + \cos x$; c) $\sin^3 x + \cos^3 x$;
 b) $|\sin x - \cos x|$; d) $\sin^4 x + \cos^4 x$.

12. Calculează $\operatorname{tg} x$.

- a) $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, $\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 4\cos^2 x = 0$;
 b) $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $6\sin^2 x - 7\sin x \cos x = 3\cos^2 x$.

13. Calculează $\operatorname{ctg} x$.

- a) $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $3\sin^2 x - 10\sin x \cos x + 8\cos^2 x = 0$;
 b) $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $2\sin^2 x - 15\cos^2 x = \sin x \cos x$.

14. Fie $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $2\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$. Calculează $\cos x$.

15. Demonstrează că $\frac{2 - \sin^2 x}{2 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{2 - \cos^2 x}{2 + \operatorname{ctg}^2 x} = 1$, pentru orice număr real $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

16. Demonstrează că, pentru orice valoare admisibilă a numărului real x , au loc egalitățile:

- a) $\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} + \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} = 2$;
 b) $\frac{\operatorname{ctg}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x} = \operatorname{ctg}^6 x$;
 c) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = 1$;
 d) $\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x + \cos x$;
 e) $\sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} + \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} = 3$.

17. Demonstrează că:

- a) $\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} - \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} = 2\operatorname{tg} x$, pentru orice număr real $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$;
 b) $\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} - \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = 2\operatorname{ctg} x$, pentru orice număr real $x \in (\pi, 2\pi)$;
 c) $\sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \sin x}} - \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 - \sin x}} + \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}} - \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}} =$
 $= -\frac{2}{\sin x \cos x}$, pentru orice număr real $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.



3. Formule trigonometrice pentru suma/diferența a două numere reale

Descopăr

Elevii vor fi împărțiți în două grupe.

Grupa 1

În figura 1 sunt reprezentate triunghiurile dreptunghice ABC și BDC cu $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ABC = b$, $BD = 1$, $\angle BCD = 90^\circ$, $\angle DBC = a$ și punctele A și D de o parte și de alta a dreptei BC. Punctul M este proiecția punctului D pe dreapta AB, iar punctul N este proiecția punctului C pe dreapta DM.

- Exprimă laturile triunghiului BDC cu ajutorul funcțiilor trigonometrice ale unghiului DBC.
- Arată că $AC = \sin b \cos a$ și $AB = \cos a \cos b$.
- Arată că $\angle NDC = b$.
- Arată că $DN = \sin a \cos b$ și $CN = \sin a \sin b$.
- Exprimă laturile triunghiului BDM cu ajutorul funcțiilor trigonometrice ale unghiului DBM.
- Arată că $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ și $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

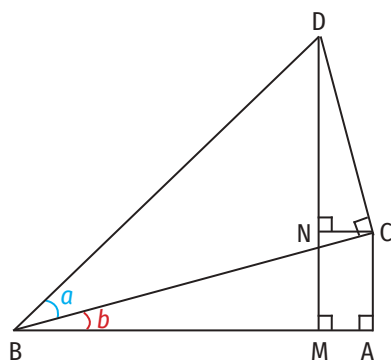


Figura 1

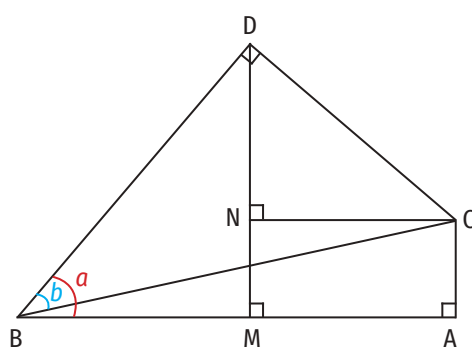


Figura 2

Grupa 2

În figura 2 sunt reprezentate triunghiurile dreptunghice ABC și BDC cu $\angle BAC = 90^\circ$, $BC = 1$, $\angle BDC = 90^\circ$, $\angle DBC = b$, $\angle ABD = a$ și punctele A și D de o parte și de alta a dreptei BC. Punctul M este proiecția punctului D pe dreapta AB, iar punctul N este proiecția punctului C pe dreapta DM.

- Exprimă laturile triunghiului ABC cu ajutorul funcțiilor trigonometrice ale unghiului ABC.
- Exprimă laturile triunghiului DBC cu ajutorul funcțiilor trigonometrice ale unghiului DBC.
- Arată că $DM = \sin a \cos b$ și $BM = \cos a \cos b$.
- Arată că $\angle NDC = a$.
- Arată că $CN = \sin a \sin b$ și $DN = \sin b \cos a$.
- Arată că $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ și $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.





Fie $a, b \in (0, 2\pi)$ cu $a > b$. Punctele M, N și P sunt punctele de pe cercul trigonometric asociate numerelor reale a , b și, respectiv, $a - b$ (figura 3). Așadar, $\angle AON = b$, $\angle AOM = a$, $\angle AOP = a - b$ și $M(\cos a, \sin a)$, $N(\cos b, \sin b)$ și $P(\cos(a - b), \sin(a - b))$.

Triunghiurile MON și AOP sunt congruente (LUL), de unde rezultă $AP \equiv MN$.

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{(\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow MN^2 &= (\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2 = \\ &= \cos^2 b - 2\cos b \cdot \cos a + \cos^2 a + \sin^2 b - 2\sin b \cdot \sin a + \sin^2 a = \\ &= 2 - 2\cos b \cdot \cos a - 2\sin b \cdot \sin a = 2 - 2(\cos b \cdot \cos a + \sin b \cdot \sin a) \quad (1) \end{aligned}$$

$$AP = \sqrt{(\cos(a - b) - 1)^2 + (\sin(a - b) - 0)^2} \Rightarrow AP^2 = \cos^2(a - b) - 2\cos(a - b) + 1 + \sin^2(a - b) = 2 - 2\cos(a - b) \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă $\cos(a - b) = \cos b \cdot \cos a + \sin b \cdot \sin a = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$.

Dacă $a = b$, atunci $\cos(a - b) = \cos 0 = 1$ și $\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b = \cos^2 a + \sin^2 a = 1$, deci, și în acest caz, $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$.

Cum funcția cosinus este pară, egalitatea este adevărată și pentru $a, b \in (0, 2\pi)$ cu $a < b$.

Evident, egalitatea este adevărată pentru $a, b \in [0, 2\pi)$.

Funcțiile sinus și cosinus sunt funcții periodice de perioadă principală 2π , de unde rezultă:

$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$, pentru orice numere reale a și b . (3)

Dacă scriem $a + b = a - (-b)$ și aplicăm formula (3), obținem:

$$\cos(a + b) = \cos(a - (-b)) = \cos a \cdot \cos(-b) + \sin a \cdot \sin(-b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b.$$

Așadar, **$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$** , pentru orice numere reale a și b . (4)

$$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \sin b = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin(a + (-b)) = \sin a \cdot \cos(-b) + \sin(-b) \cdot \cos a = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

Am obținut:

$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$ pentru orice numere reale a și b ; (5)

$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$ pentru orice numere reale a și b . (6)

EXEMPLE:

$$1. \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4};$$

$$2. \cos \frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4};$$

$$3. \sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Dacă în formulele (4) și (5) folosim $a = b = x$, obținem:

$$\cos(x + x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x \Rightarrow \mathbf{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$$
, pentru orice număr real x . (7)

$$\sin(x + x) = \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \mathbf{\sin 2x = 2\sin x \cos x}$$
, pentru orice număr real x . (8)

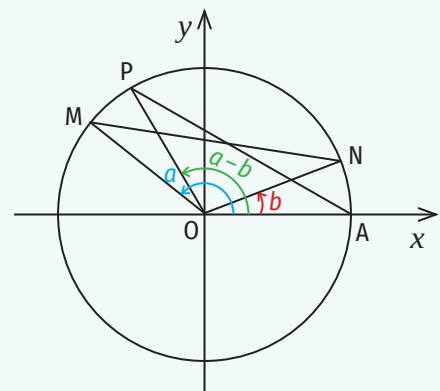


Figura 3

Știm că $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ și $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, pentru orice număr real x . Înlocuind în formula (7), obținem:

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \text{ sau } \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x, \text{ pentru orice număr real } x.$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\cos x| = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}, \text{ pentru orice număr real } x. (9)$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \Rightarrow 2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\sin x| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}, \text{ pentru orice număr real } x. (10)$$

EXAMPLE:

$$1. \cos 120^\circ = \cos(2 \cdot 60^\circ) = \cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2};$$

$$2. \sin 120^\circ = \sin(2 \cdot 60^\circ) = 2 \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Înlocuind x cu $\frac{x}{2}$ în relațiile (9) și (10), obținem:

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \text{ și } \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \text{ pentru orice număr real } x.$$

În continuare vom deduce formulele în care apare funcția tangentă. Vom presupune că sunt excluse din considerații acele valori pentru care expresiile folosite nu au sens.

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b} = \frac{\cos a \cdot \cos b \left(\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} \right)}{\cos a \cdot \cos b \left(1 - \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b} \right)} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} (11)$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \operatorname{tg}(a+(-b)) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(-b)}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg}(-b)} = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \Rightarrow \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

EXAMPLE:

$$1. \operatorname{tg} 105^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}};$$

$$2. \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}.$$

Dacă în formula (11) folosim $a = b = x$, obținem $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

În continuare vom exprima $\sin x$ și $\cos x$ în funcție de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Exerciții rezolvate



1. Calculează $\cos(a + b)$ știind că $\sin a = \frac{1}{4}$, $\cos b = -\frac{1}{5}$, $a \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $b \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$.

Rezolvare:

$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$, pentru orice numere reale a și b

Trebuie să determinăm $\cos a$ și $\sin b$. Pentru aceasta folosim formula fundamentală a trigonometriei.

$$\left. \begin{array}{l} \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \\ \sin a = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = \frac{15}{16} \left\{ \Rightarrow \cos a = -\frac{\sqrt{15}}{4} \right.$$

$$a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \cos a < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin^2 b + \cos^2 b = 1 \\ \cos b = -\frac{1}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \sin^2 b + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 b = \frac{24}{25} \left\{ \Rightarrow \sin b = -\frac{2\sqrt{6}}{5} \right.$$

$$b \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin b < 0$$

$$\cos(a + b) = -\frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) = \frac{\sqrt{15} + 2\sqrt{6}}{20}.$$

2. Calculează $\sin(a - b)$, știind că $\operatorname{tg} a = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} b = -2\sqrt{2}$, $a \in (0, \frac{\pi}{2})$, $b \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \sin(a - b) &= \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a = \cos a \cos b \left(\frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\sin b}{\cos b} \right) = \\ &= \cos a \cos b (\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b) \end{aligned}$$

Folosim formula fundamentală a trigonometriei:

$$\left. \begin{array}{l} \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \\ \operatorname{tg} a = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin a = \frac{3\cos a}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{3\cos a}{4}\right)^2 + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = \frac{16}{25} \left\{ \Rightarrow \right.$$

$$a \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos a > 0$$

$$\Rightarrow \cos a = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2 b + \cos^2 b = 1$$

$$\operatorname{ctg} b = -2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{\cos b}{\sin b} = -2\sqrt{2} \Rightarrow \sin b = -\frac{\cos b}{2\sqrt{2}} \left\{ \Rightarrow \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \left(-\frac{\cos b}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \cos^2 b = 1 \Rightarrow \cos^2 b = \frac{8}{9} \\ b \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow \cos b < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \cos b = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin(a - b) = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{6\sqrt{2} + 4}{15}$$

3. a) Demonstrează că $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$, pentru orice număr real x .
b) Determină imaginea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x + \sin x$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos x + \sin x &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin x \right) = \\ &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ pentru orice număr real } x. \end{aligned}$$

b) Conform punctului a), $f(x) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ pentru orice număr real x .

Cum $-1 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ pentru orice număr real x , rezultă că

$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$ pentru orice număr real x , deci $\text{Im} f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

4. Demonstrează că funcția trigonometrică tangentă este periodică și are perioada principală π .

Rezolvare:

$\text{tg}(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{\cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \text{tg} x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \Rightarrow$ Funcția tangentă este periodică.

Fie $T > 0$ o perioadă a funcției tangentă. Atunci, $\text{tg}(x + T) = \text{tg} x$, pentru orice număr real x pentru care $\cos(x + T) \neq 0$ și $\cos x \neq 0$.

$\text{tg}(x + T) = \text{tg} x \Leftrightarrow \frac{\sin(x + T)}{\cos(x + T)} = \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \sin(x + T) \cdot \cos x = \cos(x + T) \cdot \sin x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sin(x + T)\cos x - \cos(x + T)\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin(x + T - x) = 0 \Leftrightarrow \sin T = 0 \Leftrightarrow T = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Cum $T > 0$, obținem că perioada principală a funcției tangentă este π .

Aplic

1. Calculează:

a) $\cos 75^\circ$; c) $\cos 105^\circ$; e) $\text{tg} \frac{7\pi}{12}$;
 b) $\sin 15^\circ$; d) $\text{tg} 15^\circ$; f) $\text{tg} \frac{5\pi}{12}$.

2. Calculează:

a) $\sin 63^\circ \cos 27^\circ + \sin 27^\circ \cos 63^\circ$; g) $\sin \frac{13\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{13\pi}{15}$;
 b) $\cos 107^\circ \cos 73^\circ - \sin 107^\circ \sin 73^\circ$; h) $\sin \frac{7\pi}{13} \cos \frac{6\pi}{13} + \sin \frac{6\pi}{13} \cos \frac{7\pi}{13}$;
 c) $\sin 73^\circ \cdot \cos 28^\circ - \cos 73^\circ \cdot \sin 28^\circ$; i) $\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}$;
 d) $\cos 83^\circ \cdot \cos 53^\circ + \sin 83^\circ \cdot \sin 53^\circ$; j) $2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$;
 e) $\frac{\text{tg} 52^\circ + \text{tg} 8^\circ}{1 - \text{tg} 52^\circ \cdot \text{tg} 8^\circ}$; k) $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$;
 f) $\frac{\text{tg} 112^\circ - \text{tg} 52^\circ}{1 + \text{tg} 112^\circ \text{tg} 52^\circ}$; l) $2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1$.

3. Calculează $\text{tg} \frac{a}{2}$, știind că:

a) $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin a = \frac{4}{5}$; c) $a \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ și $\text{tg} a = -\sqrt{3}$.
 b) $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\cos a = -\frac{8}{17}$;

4. Calculează $\sin \frac{x}{2}$, știind că:

a) $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$; c) $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ și $\cos x = -\frac{5}{6}$;
 b) $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ și $\sin x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$; d) $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\cos x = -\frac{3}{4}$.





5. Calculează $\cos \frac{x}{2}$, știind că:

a) $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{12}{13}$;

b) $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ și $\sin x = -\frac{4}{5}$;

c) $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ și $\cos x = \frac{2\sqrt{2}}{6}$;

d) $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\cos x = -\frac{1}{3}$.

6. Calculează $2\sin x - 3\cos x + \sin 2x - \operatorname{tg} 2x$, știind că $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$.

7. Calculează $\frac{\cos 2x - 3}{4 + \sin 2x}$, știind că $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$.

8. Demonstrează că $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ și $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, pentru orice număr real x .

9. a) Fie $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $b \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ astfel încât $\sin a = \frac{2}{3}$ și $\cos b = \frac{1}{3}$. Calculează $\cos 2b$, $\sin(a - b)$ și $\sin 2a$.

b) Fie $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $b \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin a = \frac{3}{5}$ și $\cos b = -\frac{12}{13}$. Calculează $\cos 2a$, $\cos(a + b)$ și $\sin(a - 2b)$.

c) Fie $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $b \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ astfel încât $\cos a = -\frac{1}{6}$ și $\sin b = -\frac{1}{4}$. Calculează $\cos(2a + b)$ și $\operatorname{tg}(a + b)$.

10. a) Fie $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $b \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel încât $\operatorname{tg} a = \frac{5}{6}$ și $\operatorname{tg} b = -\frac{5}{12}$. Calculează $\operatorname{tg}(a - b)$, $\cos(a - b)$ și $\sin 2a$.

b) Fie $a \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ și $b \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\operatorname{tg} a = -\frac{3}{4}$ și $\operatorname{ctg} b = \frac{5}{12}$. Calculează $\operatorname{tg} 2a$, $\operatorname{ctg}(a + b)$, $\cos 2b$ și $\sin(a - b)$.

11. Calculează $\sin(a + b + c)$, știind că $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $b \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, $c \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\sin a = \frac{4}{5}$, $\cos b = \frac{1}{5}$ și $\sin c = \frac{3}{5}$.

12. Calculează $\operatorname{tg} c$, știind că $a + b + c = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}$ și $\operatorname{tg} b = \frac{1}{4}$.

13. Demonstrează că:

a) $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, pentru orice număr real x ;

b) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, pentru orice număr real x ;

c) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, pentru orice număr real x ;

d) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, pentru orice număr real x .

14. Determină imaginea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) $f(x) = \sin x - \cos x$;

b) $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$.

15. Calculează $\sin \frac{\pi}{8}$, $\sin \frac{3\pi}{8}$, $\cos \frac{\pi}{8}$ și $\cos \frac{3\pi}{8}$.

16. a) Demonstrează că $\operatorname{tg}(60^\circ - x) \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(60^\circ + x) = \operatorname{tg}(3x)$, pentru orice x pentru care expresia are sens.

b) Calculează $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ$.

17. Fie $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ astfel încât:

$$(1 + \cos a)(1 + \cos b)(1 + \cos c) = \sin a \sin b \sin c. \text{ Calculează } \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{c}{2}.$$

4. Transformarea sumelor în produse și a produselor în sume

Descopăr

Elevii vor fi împărțiți în două grupe.

Grupa 1

Fie $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ astfel încât $y < x$. Punctele M și N sunt punctele de pe cercul trigonometric asociate numerelor reale x și, respectiv, y . Punctul P este mijlocul segmentului MN, iar punctul P' este proiecția punctului P pe axa Ox.

- Determină coordonatele punctelor M, N și P.
- Arată că semidreapta OP este bisectoarea unghiului MON.
- Determină măsura unghiului AOP, unde A este punctul de pe cercul trigonometric cu coordonatele (1, 0).
- Exprimă lungimile segmentelor OP' și PP' în funcție de OP și funcțiile trigonometrice ale unghiului AOP.
- Arată că $\frac{\cos x + \cos y}{2} = OP \cos \frac{x+y}{2}$.
- Calculează lungimea segmentului OP (în triunghiul NOP).
- Arată că $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ și $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.

Grupa 2

Fie $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ astfel încât $y < x$. Punctele M și N sunt punctele de pe cercul trigonometric asociate numerelor reale x și, respectiv, y . Punctul N' este simetricul punctului N față de punctul O, punctul P este mijlocul segmentului MN', iar punctul P' este proiecția punctului P pe axa Ox.

- Determină coordonatele punctelor M, N, N' și P.
- Arată că semidreapta OP este bisectoarea unghiului MON'.
- Determină măsura unghiului AOP, unde A este punctul de pe cercul trigonometric cu coordonatele (1, 0).
- Exprimă lungimile segmentelor OP' și PP' în funcție de OP și funcțiile trigonometrice ale unghiului AOP.
- Arată că $\frac{\cos x - \cos y}{2} = -OP \sin \frac{x+y}{2}$.
- Calculează lungimea segmentului OP (în triunghiul MOP).
- Arată că $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ și $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.



Învăț



Fie x și y numere reale.

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; (1)$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y; (3)$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y; (2)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y. (4)$$

Prin adunarea, respectiv scăderea relațiilor (1) și (2) obținem:

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos x \cos y (5) \text{ și } \cos(x + y) - \cos(x - y) = -2\sin x \sin y. (6)$$

Prin adunarea, respectiv scăderea relațiilor (3) și (4) obținem:

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2\sin x \cos y (7) \text{ și } \sin(x + y) - \sin(x - y) = 2\cos x \sin y. (8)$$

Așadar:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)], \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$$

Aceste formule sunt cunoscute sub denumirea de **formule de transformare a produselor de funcții trigonometrice în sume de funcții trigonometrice**.

EXEMPLE:

$$\begin{aligned} 1. \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{\pi}{8} &= -\frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi}{8} \right) - \cos \left(\frac{5\pi}{24} - \frac{\pi}{8} \right) \right] = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{8\pi}{24} - \cos \frac{2\pi}{24} \right) = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{12} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} - 2}{8}; \end{aligned}$$

$$2. \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin \left(-\frac{4\pi}{12} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$$

Dacă x și y sunt numere reale, atunci există numerele reale a și b astfel încât $x + y = a$ și $x - y = b$, anume $x = \frac{a+b}{2}$ și $y = \frac{a-b}{2}$. Înlocuind în formulele 5-8, obținem:

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

Aceste formule sunt cunoscute sub denumirea de **formule de transformare a sumelor de funcții trigonometrice în produse de funcții trigonometrice**.

EXEMPLE:

$$1. \cos 75^\circ + \cos 15^\circ = 2 \cos \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \cos 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$\begin{aligned} 2. \sin \frac{7\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} &= 2 \cos \frac{\frac{7\pi}{3} + \frac{\pi}{6}}{2} \sin \frac{\frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{6}}{2} = 2 \cos \frac{15\pi}{12} \sin \frac{13\pi}{12} = 2 \cdot \cos \frac{5\pi}{4} \sin \frac{13\pi}{12} = 2 \left(-\cos \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{12} \right) = \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}. \end{aligned}$$

Exercițiu rezolvat

Transformă în produs sumele următoare:

- a) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x$;
 b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$;
 c) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx, n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos x + \cos 2x + \cos 3x &= \cos 2x + 2 \cos \frac{x+3x}{2} \cos \frac{x-3x}{2} = \\ &= \cos 2x + 2 \cos 2x \cos(-x) = 2 \cos 2x \left(\frac{1}{2} + \cos x \right) = 2 \cos 2x \left(\cos \frac{\pi}{3} + \cos x \right) = \\ &= 2 \cos 2x \cdot 2 \cos \frac{\frac{\pi}{3} + x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{3} - x}{2} = 4 \cos 2x \cdot \cos \frac{\pi + 3x}{6} \cos \frac{\pi - 3x}{6}; \\ \text{b) } \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x &= (\sin x + \sin 4x) + (\sin 2x + \sin 3x) = \\ &= 2 \sin \frac{x+4x}{2} \cos \frac{x-4x}{2} + 2 \sin \frac{2x+3x}{2} \cos \frac{2x-3x}{2} = 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{-3x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{-x}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{5x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = \\ &= 2 \sin \frac{5x}{2} \cdot 2 \cos \frac{\frac{3x}{2} + \frac{x}{2}}{2} \cos \frac{\frac{3x}{2} - \frac{x}{2}}{2} = 4 \sin \frac{5x}{2} \cdot \cos x \cos \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

c) Dacă $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, atunci $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = 0$.

Considerăm $x \notin \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{aligned} S &= \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx \Rightarrow S \cdot \sin \frac{x}{2} = \sin x \cdot \sin \frac{x}{2} + \sin 2x \cdot \sin \frac{x}{2} + \dots + \\ &+ \sin nx \cdot \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \left[\cos \left(x + \frac{x}{2} \right) - \cos \left(x - \frac{x}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \left[\cos \left(2x + \frac{x}{2} \right) - \right. \\ &- \cos \left(2x - \frac{x}{2} \right) \right] - \dots - \frac{1}{2} \left[\cos \left(nx + \frac{x}{2} \right) - \cos \left(nx - \frac{x}{2} \right) \right] = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \left(\cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) - \dots - \frac{1}{2} \left(\cos \frac{(2n+1)x}{2} - \cos \frac{(2n-1)x}{2} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{3x}{2} + \dots + \cos \frac{(2n+1)x}{2} - \cos \frac{(2n-1)x}{2} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{(2n+1)x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(-2 \sin \frac{\frac{(2n+1)x}{2} + \frac{x}{2}}{2} \sin \frac{\frac{(2n+1)x}{2} - \frac{x}{2}}{2} \right) = \\ &= \sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2} \Rightarrow S = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Aplic

1. Transformă următoarele sume în produse:

- | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|--|
| a) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$; | e) $\cos 165^\circ - \cos 15^\circ$; | i) $\sin \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$; |
| b) $\sin 40^\circ + \sin 140^\circ$; | f) $\cos 50^\circ + \cos 70^\circ$; | j) $\sin \frac{31\pi}{36} - \sin \frac{5\pi}{8}$; |
| c) $\sin 50^\circ - \sin 40^\circ$; | g) $\cos 70^\circ - \cos 40^\circ$; | k) $\sin \frac{7\pi}{18} - \cos \frac{2\pi}{9}$; |
| d) $\sin 165^\circ - \sin 75^\circ$; | h) $\cos 130^\circ + \cos 50^\circ$; | l) $\cos \frac{13\pi}{18} + \cos \frac{2\pi}{9}$. |





2. Transformă în sume următoarele produse:

- a) $\cos 75^\circ \cdot \sin 15^\circ$; c) $\sin 55^\circ \cdot \sin 35^\circ$; e) $\sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{9}$;
 b) $\cos 155^\circ \cdot \cos 25^\circ$; d) $\sin \frac{3\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{8}$; f) $\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{5\pi}{9}$.

3. Determină semnul numărului real a scriindu-l sub formă de produs.

- a) $a = \cos 1 + \sin 5$; c) $a = \sin \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{7}$;
 b) $a = \cos 72^\circ + \cos 138^\circ$; d) $a = \cos \frac{6\pi}{7} - \cos \frac{7\pi}{6}$.

4. Transformă în produse:

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos 50^\circ$; b) $1 - 2\cos 10^\circ$; c) $2\sin 20^\circ + \sqrt{3}$; d) $\sqrt{2} - 2\sin 35^\circ$.

5. Calculează:

- a) $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$; b) $\sin 10^\circ - \sin 70^\circ + \sin 130^\circ$.

6. Calculează:

- a) $\frac{\cos 35^\circ + \cos 155^\circ}{\sin 65^\circ - \sin 55^\circ}$; b) $\frac{\cos 40^\circ + \cos 80^\circ}{\sin 10^\circ + \sin 50^\circ}$; c) $\frac{\cos \frac{\pi}{9} - \cos \frac{7\pi}{18}}{\sin \frac{17\pi}{36} - \sin \frac{7\pi}{36}}$; d) $\frac{\sin \frac{7\pi}{18} + \cos \frac{4\pi}{9}}{\cos \frac{\pi}{18} - \sin \frac{\pi}{9}}$.

7. Calculează:

- a) $\left(\cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{11}$; c) $\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{3\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9}$.
 b) $\cos \frac{\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} + \cos \frac{7\pi}{13} + \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{11\pi}{13}$;

8. Calculează:

- a) $\sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$; b) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$.

9. Arată că, pentru orice valoare a lui x pentru care au sens expresiile, sunt adevărate egalitățile:

- a) $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \operatorname{tg} 3x$; c) $\frac{\cos x + \cos 2x + \cos 4x + \cos 5x}{\sin x + \sin 2x + \sin 4x + \sin 5x} = \operatorname{ctg} 3x$;
 b) $\frac{\sin x + 2\sin 2x + \sin 3x}{\cos x + 2\cos 2x + \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x$; d) $\frac{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x + \sin 8x}{\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x} = \operatorname{tg} 5x$.

10. Demonstrează că:

$$a) \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{\cos \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \text{ pentru orice număr real}$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$b) \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \dots + \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \cdot \sin nx}{2\sin x}, \text{ pentru orice}$$

$$\text{număr real } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$c) \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \dots + \cos^2 nx = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1)x \cdot \sin nx}{2\sin x}, \text{ pentru orice}$$

$$\text{număr real } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

11. Demonstrează că $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos(2^2 x) \cdot \dots \cdot \cos(2^n x) = \frac{\sin(2^{n+1} x)}{2^{n+1} \cdot \sin x}$, pentru orice număr real $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

12. Fie un triunghi oarecare ABC. Demonstrează că:

$$a) \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2};$$

$$b) \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

5. Funcții trigonometrice inverse

Descopăr

Elevii vor fi împărțiți în trei grupe.

Grupa 1

1. Scrie trei valori ale lui x pentru care $\sin x = \frac{1}{2}$. Câte astfel de valori există?
2. Folosește aplicația *Calculator* de pe telefonul mobil și calculează $\sin^{-1}(0,5)$. Ce observi?
3. Reprezintă grafic funcția sinus folosind un instrument digital.
4. Funcția sinus este bijectivă?
5. Dă exemple de intervale astfel încât restricțiile funcției sinus pe acele intervale să fie bijective.

Grupa 2

1. Scrie trei valori ale lui x pentru care $\cos x = \frac{1}{2}$. Câte astfel de valori există?
2. Folosește aplicația *Calculator* de pe telefonul mobil și calculează $\cos^{-1}(0,5)$. Ce observi?
3. Reprezintă grafic funcția cosinus folosind un instrument digital.
4. Funcția cosinus este bijectivă?
5. Dă exemple de intervale astfel încât restricțiile funcției cosinus pe acele intervale să fie bijective.

Grupa 3

1. Scrie trei valori ale lui x , $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, pentru care $\operatorname{tg} x = 1$. Câte astfel de valori există?
2. Folosește aplicația *Calculator* de pe telefonul mobil și calculează $\tan^{-1}1$. Ce observi?
3. Reprezintă grafic funcția tangentă folosind un instrument digital.
4. Funcția tangentă este bijectivă?
5. Dă exemple de intervale astfel încât restricțiile funcției tangentă pe acele intervale să fie bijective.



Învăț

În figurile 1-4 sunt reprezentate grafic funcțiile trigonometrice $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ (figura 1), $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ (figura 2), $\operatorname{tg}: \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ (figura 3) și $\operatorname{ctg}: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ (figura 4). Aceste funcții nu sunt inversabile, deoarece nu sunt injective. Totuși, pornind de la graficul lor, putem găsi restricții care sunt inversabile.

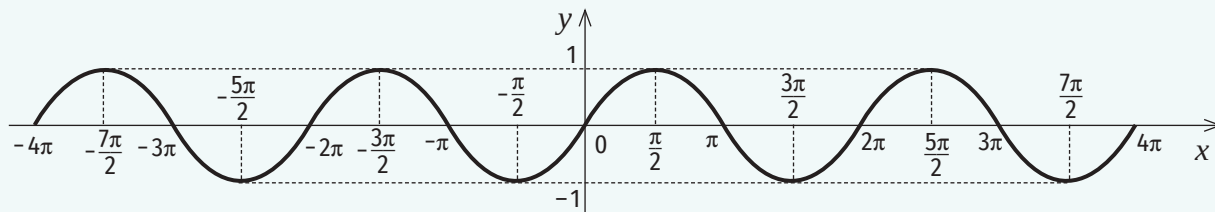


Figura 1

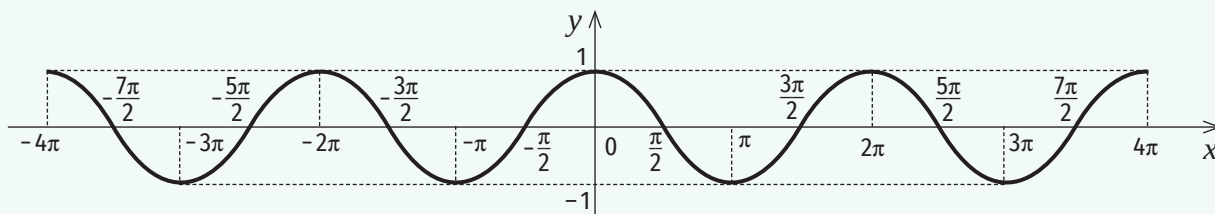


Figura 2

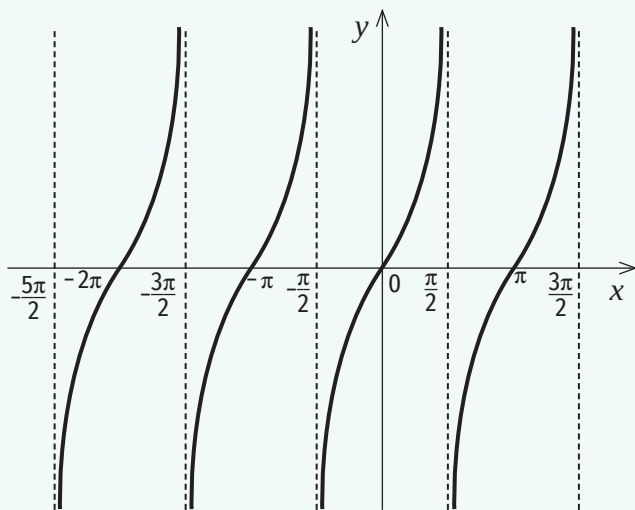


Figura 3

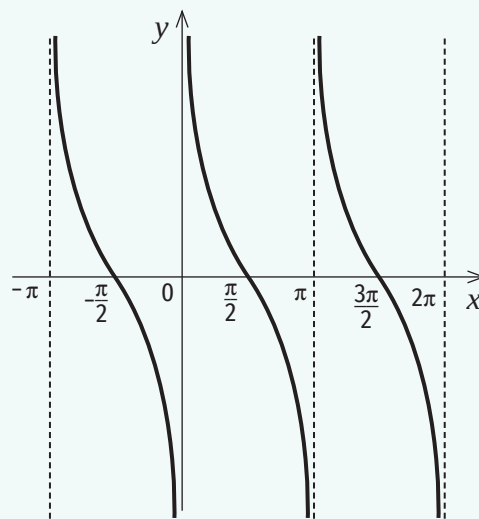


Figura 4

Funcția arcsinus

Restricția funcției sinus la intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este bijectivă, deci inversabilă.

Inversa funcției $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$, este funcția $\operatorname{arcsin}: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (funcția arcsinus).

EXEMPLE:

1. $\operatorname{arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, deoarece $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ și $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
2. $\operatorname{arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$, deoarece $-\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ și $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Din definiția funcției inverse rezultă egalitățile:

$$\sin(\arcsin x) = x, \text{ pentru orice număr real } x \in [-1, 1]$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \text{ pentru orice număr real } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Reprezentările grafice ale funcțiilor $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ și $\arcsin$, în reperul cartezian xOy , sunt simetrice în raport cu dreapta de ecuație $y = x$ (figura 5).

Examinând reprezentarea grafică a funcției $\arcsin$, deducem următoarele **proprietăți** ale acesteia:

- Funcția $\arcsin$ este strict crescătoare;
- Funcția $\arcsin$ este convexă pe intervalul $[0, 1]$ și concavă pe intervalul $[-1, 0]$;
- $\arcsin x > 0$, pentru orice număr real $x \in (0, 1]$;
- $\arcsin x < 0$, pentru orice număr real $x \in [-1, 0)$;
- $\arcsin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- Cea mai mică valoare a funcției $\arcsin$ este $-\frac{\pi}{2}$, iar cea mai mare valoare este $\frac{\pi}{2}$.

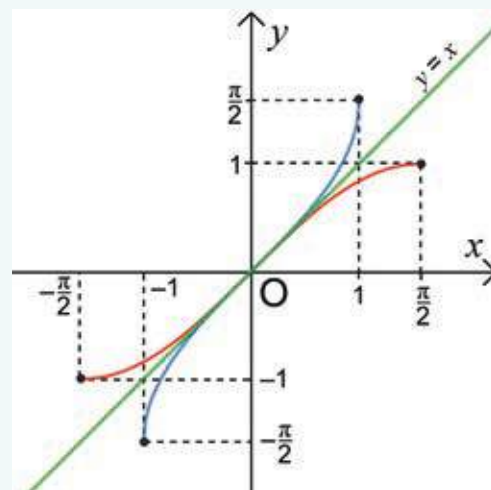


Figura 5

Propoziția 1. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, pentru orice număr real $x \in [-1, 1]$.

Demonstrație:

Fie $x \in [-1, 1]$. Notăm $\arcsin(-x) = y$ și obținem $-x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. De aici rezultă $x = -\sin y$, ceea ce e echivalent cu $x = \sin(-y)$, de unde rezultă $\arcsin(\sin(-y)) = \arcsin x$. Cum $-y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, obținem $-y = \arcsin x$, deci $y = -\arcsin x$.

Funcția arccosinus

Restricția funcției cosinus la intervalul $[0, \pi]$ este bijectivă, deci inversabilă.

Inversa funcției $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$, este funcția $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ (funcția arccosinus).

EXEMPLE:

1. $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, deoarece $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$ și $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
2. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, deoarece $\frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$ și $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Din definiția funcției inverse rezultă egalitățile:

$$\cos(\arccos x) = x, \text{ pentru orice număr real } x \in [-1, 1]$$

$$\arccos(\cos x) = x, \text{ pentru orice număr real } x \in [0, \pi]$$

Reprezentările grafice ale funcțiilor $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ și $\arccos$, în reperul cartezian xOy , sunt simetrice în raport cu dreapta de ecuație $y = x$ (a se vedea figura 6 la pagina următoare).

Examinând reprezentarea grafică a funcției $\arccos$, deducem următoarele **proprietăți** ale acesteia:

- Funcția $\arccos$ este strict descrescătoare;
- Funcția $\arccos$ este convexă pe intervalul $[-1, 0]$ și concavă pe intervalul $[0, 1]$;

- $\arccos x > 0$, pentru orice număr real $x \in [-1, 1]$;
- $\arccos x = 0 \Leftrightarrow x = 1$;
- Cea mai mică valoare a funcției $\arccos$ este 0, iar cea mai mare valoare este π .

Propoziția 2. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, pentru orice număr real $x \in [-1, 1]$.

Demonstrație:

Fie $x \in [-1, 1]$. Notăm $\arccos(-x) = y$ și obținem $-x = \cos y$, $y \in [0, \pi]$. De aici rezultă $-\cos y = x$, ceea ce este echivalent cu $\cos(\pi - y) = x$, de unde rezultă $\arccos(\cos(\pi - y)) = \arccos x$. Cum $\pi - y \in [0, \pi]$, obținem $\pi - y = \arccos x$, deci $y = \pi - \arccos x$.

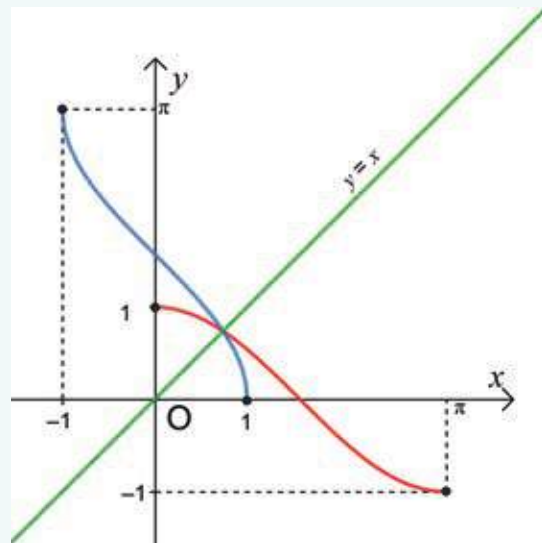


Figura 6

Propoziția 3. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, pentru orice număr real $x \in [-1, 1]$.

Demonstrație:

Fie $x \in [-1, 1]$. Notăm $\arcsin x = a$ și $\arccos x = b$ și obținem $x = \sin a$ și $x = \cos b$, $a \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $b \in [0, \pi]$, de unde rezultă $\sin a = \cos b$, ceea ce este echivalent cu $\sin a = \sin(\frac{\pi}{2} - b)$. Cum $\sin a = \sin(\frac{\pi}{2} - b)$, $(\frac{\pi}{2} - b) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ și funcția $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ este injectivă, rezultă că $a = \frac{\pi}{2} - b$, adică $a + b = \frac{\pi}{2}$.

Funcția arctangentă

Restricția funcției tangentă la intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ este bijectivă, deci inversabilă.

Inversa funcției $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, este funcția $\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (funcția arctangentă).

EXEMPLE:

1. $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, deoarece $\frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ și $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;
2. $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, deoarece $-\frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ și $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4}) = -1$.

Din definiția funcției inverse rezultă egalitățile:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \text{ pentru orice număr real } x$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \text{ pentru orice număr real } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

Reprezentările grafice ale funcțiilor $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ și arctg în reperul cartezian xOy sunt simetrice în raport cu dreapta de ecuație $y = x$ (figura 7).

Examinând reprezentarea grafică a funcției arctg , deducem următoarele **proprietăți** ale acesteia:

- Funcția arctg este strict crescătoare;
- Funcția arctg este convexă pe intervalul $(-\infty, 0]$ și concavă pe intervalul $[0, +\infty)$;
- $\operatorname{arctg} x > 0$, pentru orice număr real $x \in (0, +\infty)$;
- $\operatorname{arctg} x < 0$, pentru orice număr real $x \in (-\infty, 0)$;
- $\operatorname{arctg} x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

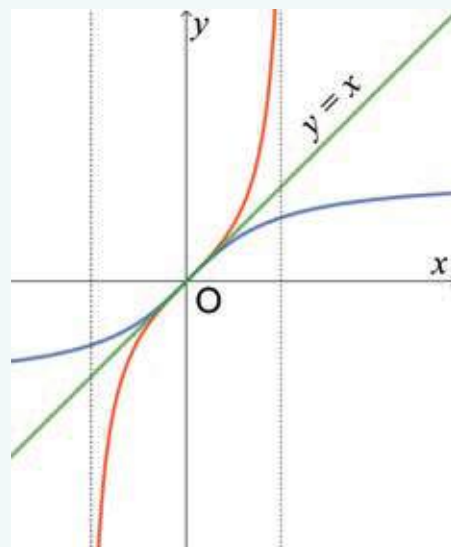


Figura 7

Propoziția 4. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, pentru orice număr real x .

Demonstrație:

Fie $x \in \mathbb{R}$. Notăm $\operatorname{arctg}(-x) = y$ și obținem $-x = \operatorname{tg} y$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. De aici rezultă $x = -\operatorname{tg} y$, ceea ce este echivalent cu $x = \operatorname{tg}(-y)$, de unde rezultă $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-y)) = \operatorname{arctg} x$. Cum $-y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $-y = \operatorname{arctg} x$, deci $y = -\operatorname{arctg} x$.

Funcția arccotangentă 

Restricția funcției cotangentă la intervalul $(0, \pi)$ este bijectivă, deci inversabilă.

Inversa funcției $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x$, este funcția $\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ (funcția arccotangentă).

EXEMPLE:

1. $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$, deoarece $\frac{\pi}{6} \in (0, \pi)$ și $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$;
2. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}$, deoarece $\frac{2\pi}{3} \in (0, \pi)$ și $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Din definiția funcției inverse rezultă egalitățile:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = x, \text{ pentru orice număr real } x$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \text{ pentru orice număr real } x \in (0, \pi)$$

Reprezentările grafice ale funcțiilor $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x$ și arctg în reperul cartezian xOy sunt simetrice în raport cu dreapta de ecuație $y = x$ (figura 8).

Examinând reprezentarea grafică a funcției arctg , deducem următoarele **proprietăți** ale acesteia:

- Funcția arctg este strict descrescătoare;
- Funcția arctg este concavă pe intervalul $(-\infty, 0]$ și convexă pe intervalul $[0, +\infty)$;
- $\operatorname{arctg} x > 0$, pentru orice număr real x .

Propoziția 5. $\operatorname{arctg}(-x) = \pi - \operatorname{arctg} x$, pentru orice număr real x .

Demonstrație:

Fie $x \in \mathbb{R}$. Notăm $\operatorname{arctg}(-x) = y$ și obținem $-x = \operatorname{ctg} y$, $y \in (0, \pi)$. De aici rezultă $-\operatorname{ctg} y = x$, ceea ce este echivalent cu $\operatorname{ctg}(\pi - y) = x$, de unde rezultă $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(\pi - y)) = \operatorname{arctg} x$. Cum $\pi - y \in (0, \pi)$, obținem $\pi - y = \operatorname{arctg} x$, deci $y = \pi - \operatorname{arctg} x$.

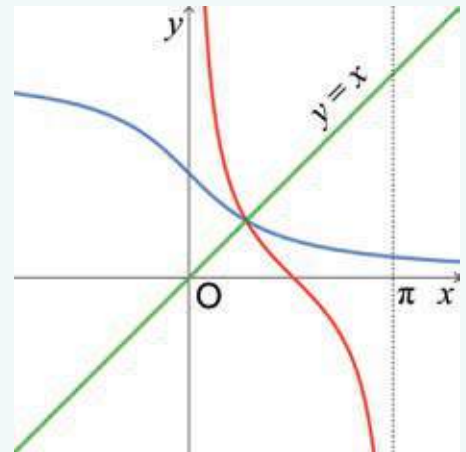


Figura 8

Exerciții rezolvate



1. Demonstrează că:

- a) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$, pentru orice număr real $x \in [-1, 1]$;
- b) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$, pentru orice număr real $x \in [-1, 1]$;
- c) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, pentru orice număr real $x \in (-1, 1)$;
- d) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$, pentru orice număr real $x \in [-1, 1], x \neq 0$.



Rezolvare:

a) Fie $x \in [-1, 1]$.

$$\left. \begin{aligned} \cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) &= 1 \Rightarrow \cos^2(\arcsin x) = 1 - x^2 \\ \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\Rightarrow \cos(\arcsin x) \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}, \text{ pentru orice } x \in [-1, 1].$$

b) Fie $x \in [-1, 1]$.

$$\left. \begin{aligned} \cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) &= 1 \Rightarrow \sin^2(\arccos x) = 1 - x^2 \\ \arccos x \in [0, \pi] &\Rightarrow \sin(\arccos x) \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, \forall x \in [-1, 1].$$

c) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ pentru orice } x \in (-1, 1);$

d) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \text{ pentru orice } x \in [-1, 1], x \neq 0.$

2. Calculează:

a) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{5}\right);$

c) $\arcsin\frac{7}{25} - \arcsin\frac{8}{17};$

b) $\sin\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{1}{5}\right);$

d) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$

Rezolvare:

a) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{5}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{5}\right) = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{23}{25};$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{1}{5}\right) &= \sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\cos\left(\arccos\frac{1}{5}\right) + \\ &+ \cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\sin\left(\arccos\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} + \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{4}{25} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = \\ &= \frac{4 + 6\sqrt{6}}{25}; \end{aligned}$$

c) Fie $a = \arcsin\frac{7}{25} - \arcsin\frac{8}{17}.$

$$\begin{aligned} \sin a &= \sin\left(\arcsin\frac{7}{25} - \arcsin\frac{8}{17}\right) = \sin\left(\arcsin\frac{7}{25}\right)\cos\left(\arcsin\frac{8}{17}\right) - \\ &- \cos\left(\arcsin\frac{7}{25}\right)\sin\left(\arcsin\frac{8}{17}\right) = \frac{7}{25} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} \cdot \frac{8}{17} = \\ &= \frac{7}{25} \cdot \frac{15}{17} - \frac{24}{25} \cdot \frac{8}{17} = -\frac{87}{425} \Rightarrow a = -\arcsin\frac{87}{425} \Rightarrow \arcsin\frac{7}{25} - \arcsin\frac{8}{17} = -\arcsin\frac{87}{425}; \end{aligned}$$

d) Fie $a = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} a &= \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 \\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} &\in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

3. Calculează:

a) $\arcsin\left(\sin\frac{23\pi}{3}\right);$

b) $\arccos(\cos 10).$

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{23\pi}{3} &= \frac{5\pi}{3} + 3 \cdot 2\pi \Rightarrow \sin\frac{23\pi}{3} = \sin\frac{5\pi}{3} = -\sin\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right), \\ \arcsin\left(\sin\frac{23\pi}{3}\right) &= \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}; \end{aligned}$$

b) $10 \in (3\pi, 4\pi) \Rightarrow 10 = (10 - 4\pi) + 2 \cdot 2\pi \Rightarrow \cos 10 = \cos(10 - 4\pi) = \cos(4\pi - 10)$

Cum $4\pi - 10 \in [0, \pi]$, obținem $\arccos(\cos(4\pi - 10)) = 4\pi - 10.$

Aplic

1. Determină domeniul maxim de definiție al funcției f , definită prin:
 a) $f(x) = \arcsin(5 - 2x)$; b) $f(x) = \arcsin(3x + 2)$; c) $f(x) = \arccos(6 - 5x)$.

2. Calculează:

a) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; g) $\arctg \frac{1}{\sqrt{3}}$; j) $\text{arcctg } 1$;
 b) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; e) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; h) $\arctg(-\sqrt{3})$; k) $\text{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
 c) $\arcsin 0$; f) $\arccos(-1)$; i) $\arctg(-1)$; l) $\text{arcctg } 0$.

3. Compară numerele reale:

a) $\arcsin \frac{1}{3}$ și $\arcsin \frac{1}{4}$; e) $\arctg 2$ și $\arctg 5$;
 b) $\arccos \frac{1}{5}$ și $\arccos \frac{2}{7}$; f) $\arctg(-7)$ și $\arctg(-5)$;
 c) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$ și $\arcsin\left(-\frac{5}{6}\right)$; g) $\text{arcctg } 3$ și $\text{arcctg}(-2)$;
 d) $\arccos\left(-\frac{2}{9}\right)$ și $\arccos\left(-\frac{5}{23}\right)$; h) $\text{arcctg}(-\sqrt{10})$ și $\text{arcctg}(-2\sqrt{3})$.

4. Calculează:

a) $\cos\left(\arcsin \frac{1}{2}\right) + \sin(\arctg 1)$;
 b) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) - \cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;
 c) $\text{tg}\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \text{ctg}\left(\arctg \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
 d) $\cos(\arctg 1) + \sin(\text{arcctg}(-1))$;
 e) $\cos(\text{arcctg}(-\sqrt{3})) + \sin\left(\arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$;
 f) $\text{tg}(\text{arcctg } 1) - \text{ctg}(\arctg(-1))$;
 g) $\cos\left(\arcsin \frac{1}{4}\right) + \sin\left(\arccos \frac{1}{3}\right)$;
 h) $\text{tg}\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) + \text{tg}\left(\arccos \frac{5}{13}\right)$;
 i) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) - \sin\left(\arccos \frac{2}{3}\right)$;
 j) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)\right) + \cos\left(\arcsin\left(-\frac{3}{7}\right)\right)$;
 k) $\text{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right) + \text{tg}\left(\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$;
 l) $\text{ctg}\left(\arcsin \frac{1}{4}\right) + \text{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$.

5. Calculează:

a) $\arcsin\left(\sin \frac{19\pi}{4}\right)$; e) $\arcsin(\sin 5)$;
 b) $\arccos\left(\cos \frac{25\pi}{4}\right)$; f) $\arccos(\cos 9)$;
 c) $\arctg\left(\text{tg} \frac{23\pi}{6}\right)$; g) $\arctg(\text{tg } 7)$;
 d) $\text{arcctg}\left(\text{ctg} \frac{121\pi}{3}\right)$; h) $\text{arcctg}(\text{ctg } 10)$.





6. Demonstrează că:

- $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, pentru orice număr real x ;
- $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, pentru orice număr real x ;
- $\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, pentru orice număr real x ;
- $\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ pentru orice număr real x ;
- $\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, pentru orice număr real $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$;
- $\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, pentru orice număr real $x \in (-1, 1)$;
- $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$, pentru orice număr real nenul x ;
- $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$, pentru orice număr real nenul x .

7. Calculează:

- $\sin\left(\arcsin \frac{1}{3} - \arccos \frac{2}{3}\right)$;
- $\sin\left(\arccos \frac{12}{13} + \arccos \frac{5}{13}\right)$;
- $\cos\left(\arccos \frac{2}{5} - \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$;
- $\cos\left(\arccos \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{5}\right)$;
- $\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right) - \arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right)$;
- $\sin\left(2 \arcsin \frac{2}{3}\right)$;
- $\sin\left(2 \arccos \frac{1}{4}\right)$;
- $\sin\left(2 \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$;
- $\sin\left(2 \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;
- $\cos\left(2 \arccos \frac{1}{5}\right)$;
- $\cos\left(3 \arcsin \frac{3}{4}\right)$;
- $\cos\left(2 \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$;
- $\cos\left(2 \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$;
- $\operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right)$;
- $\operatorname{tg}\left(2 \arcsin \frac{1}{3}\right)$;
- $\operatorname{tg}\left(2 \arccos\left(-\frac{2}{5}\right)\right)$;
- $\sin\left(2 \operatorname{arctg} \frac{2}{3}\right)$;
- $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{6}\right)$;
- $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}\right)$;
- $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$;
- $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{5}\right)$;
- $\operatorname{ctg}\left(\arccos \frac{1}{5} - \arcsin \frac{2}{5}\right)$.

8. Calculează:

- $\arcsin \frac{11}{14} + \arcsin \frac{1}{7}$;
- $\arcsin \frac{3}{5} - \arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)$;
- $\arccos \frac{5}{13} - \arccos\left(-\frac{12}{13}\right)$;
- $\arccos\left(-\frac{5}{6}\right) + \arccos \frac{5}{6}$;
- $\arcsin \frac{2}{3} - \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$;
- $\operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$;
- $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg}(-3)$;
- $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$;
- $\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right) - \operatorname{arctg} 2$;
- $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) - \operatorname{arctg} \frac{4}{5}$.

9. Arată că $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x .

6. Ecuații trigonometrice

Descopăr

Elevii vor fi împărțiți în 4 grupe.

Grupa 1

1. Reprezintă grafic, folosind un instrument digital, funcția $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$.
2. Rezolvă în mulțimea $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ecuațiile:
 - a) $\sin t = 3$;
 - b) $\sin t = 0$;
 - c) $\sin t = -2$;
 - d) $\sin t = \frac{1}{2}$;
 - e) $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Câte soluții au următoarele ecuații în mulțimea numerelor reale?
 - a) $\sin t = 0$;
 - b) $\sin t = \frac{1}{2}$;
 - c) $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Grupa 2

1. Reprezintă grafic, folosind un instrument digital, funcția $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$.
2. Rezolvă în mulțimea $[0, \pi]$ ecuațiile:
 - a) $\cos t = 2$;
 - b) $\cos t = 0$;
 - c) $\cos t = -3$;
 - d) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 - e) $\cos t = -\frac{1}{2}$.
3. Câte soluții au următoarele ecuații în mulțimea numerelor reale?
 - a) $\cos t = 0$;
 - b) $\cos t = \frac{1}{2}$;
 - c) $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Grupa 3

1. Reprezintă grafic, folosind un instrument digital, funcția $\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$.
2. Rezolvă în mulțimea $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ecuațiile:
 - a) $\operatorname{tg} t = 0$;
 - b) $\operatorname{tg} t = 1$;
 - c) $\operatorname{tg} t = -\sqrt{3}$.
3. Câte soluții au următoarele ecuații în mulțimea numerelor reale?
 - a) $\operatorname{tg} t = 0$;
 - b) $\operatorname{tg} t = 1$;
 - c) $\operatorname{tg} t = -\sqrt{3}$.

Grupa 4

1. Reprezintă grafic, folosind un instrument digital, funcția $\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$.
2. Rezolvă în mulțimea $(0, \pi)$ ecuațiile:
 - a) $\operatorname{ctg} t = 0$;
 - b) $\operatorname{ctg} t = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
 - c) $\operatorname{ctg} t = -1$.
3. Câte soluții au următoarele ecuații în mulțimea numerelor reale?
 - a) $\operatorname{ctg} t = 0$;
 - b) $\operatorname{ctg} t = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
 - c) $\operatorname{ctg} t = -1$.



Învăță

O ecuație în care necunoscuta este argument al unei funcții trigonometrice se numește **ecuație trigonometrică**.

Ecuații trigonometrice fundamentale

Fie a un număr real. Ecuațiile următoare se numesc **ecuații trigonometrice fundamentale**:

$$\sin x = a, x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{tg} x = a, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cos x = a, x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ctg} x = a, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

1. Ecuația $\sin x = a, a \in \mathbb{R}$

Mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) este formată din abscisele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ cu dreapta de ecuație $y = a$.

Examinând reprezentarea grafică a funcției sinus, deducem că:

- Dacă $|a| > 1$, atunci reprezentarea grafică a funcției sinus nu intersectează dreapta de ecuație $y = a$ (figura 1), deci **ecuația $\sin x = a$ nu are soluții**.

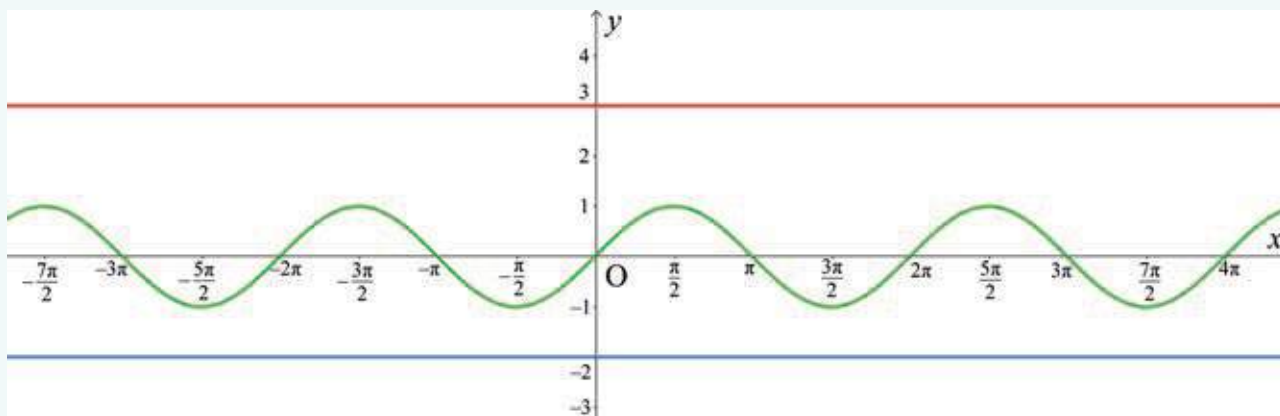


Figura 1

- Dacă $a = 1$, atunci reprezentarea grafică a funcției sinus intersectează dreapta de ecuație $y = a$ în punctele ale căror abscise sunt de forma $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (figura 2), deci **mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = a$ este $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$** .

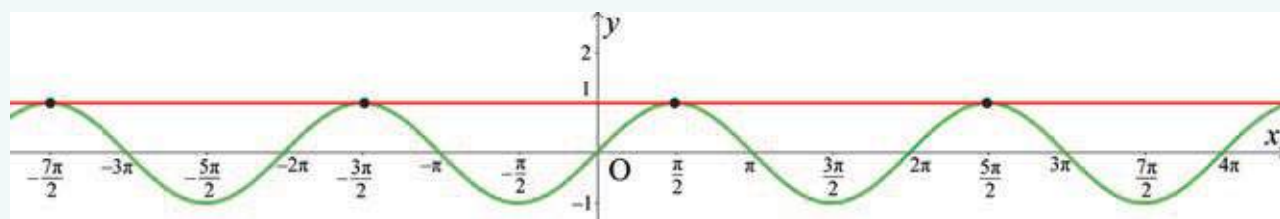


Figura 2

- Dacă $a = -1$, atunci reprezentarea grafică a funcției sinus intersectează dreapta de ecuație $y = a$ în punctele ale căror abscise sunt de forma $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (figura 3), deci **mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = a$ este $\left\{ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.**

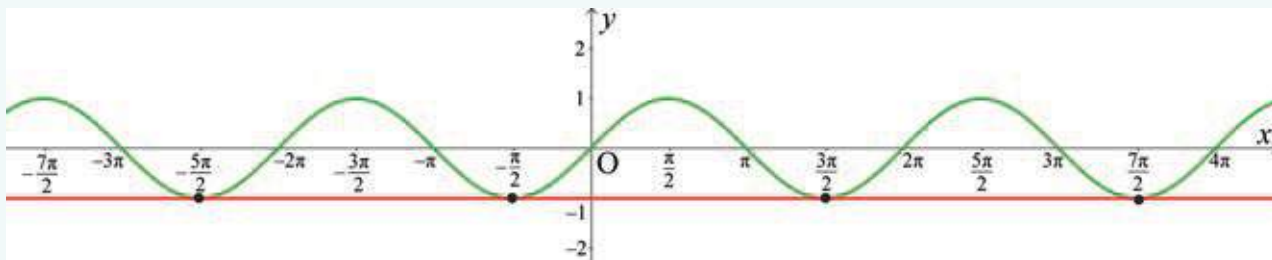


Figura 3

- Dacă $|a| < 1$, atunci reprezentarea grafică a funcției sinus intersectează dreapta de ecuație $y = a$ în punctele ale căror abscise sunt de forma $\arcsin a + 2k\pi$, $\pi - \arcsin a + 2n\pi$, $n, k \in \mathbb{Z}$ (figura 4), deci **ecuația $\sin x = a$ are soluțiile $x \in \{\arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin a + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.**

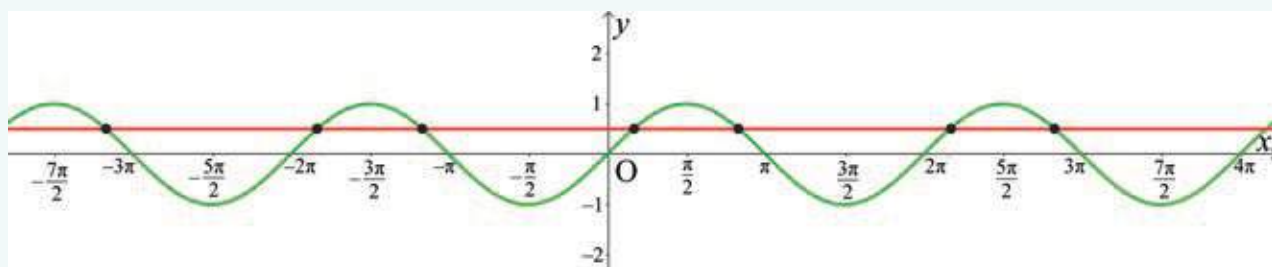


Figura 4

OBSERVAȚIE.

Pentru $|a| < 1$, ecuația $\sin x = a$ are soluțiile $x \in \{(-1)^k \arcsin a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

EXEMPLE:

1. Ecuația $\sin x = 2$, $x \in \mathbb{R}$, nu are soluție deoarece $-1 \leq \sin x \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Ecuația $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, are soluțiile $x \in \left\{ \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$,
adică $x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Putem spune că ecuația are soluțiile $x \in \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. Ecuația $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, are soluțiile $x \in \left\{ (-1)^k \cdot \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, adică
 $x \in \left\{ (-1)^k \cdot \left(-\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, de unde rezultă $x \in \left\{ (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. Ecuația $\cos x = a$, $a \in \mathbb{R}$

Mulțimea soluțiilor ecuației $\cos x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) este formată din abscisele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ cu dreapta de ecuație $y = a$.

Examinând reprezentarea grafică a funcției cosinus, deducem că:

- Dacă $|a| > 1$, atunci reprezentarea grafică a funcției cosinus nu intersectează dreapta de ecuație $y = a$ (a se vedea figura 5 pe pagina următoare), deci **ecuația $\cos x = a$ nu are soluții.**

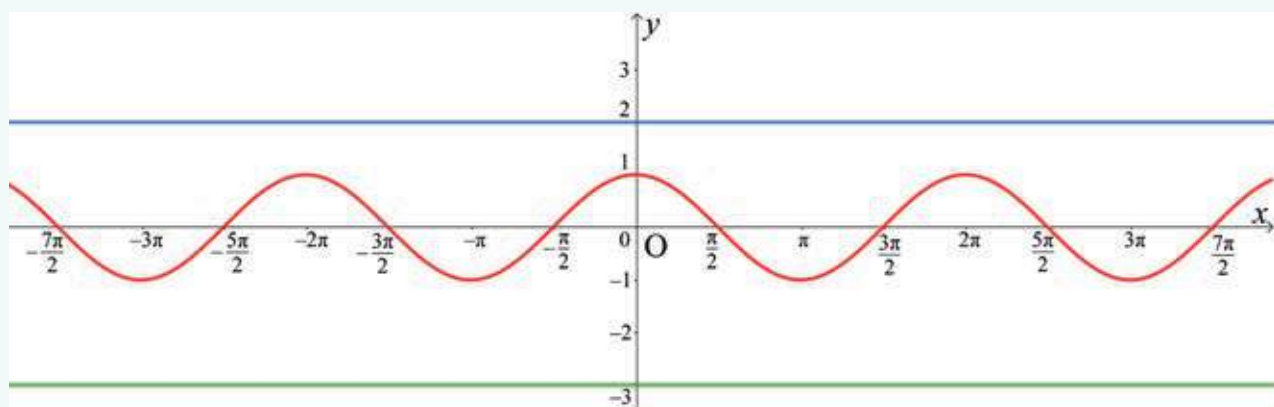


Figura 5

- Dacă $a = 1$, atunci reprezentarea grafică a funcției cosinus intersectează dreapta de ecuație $y = a$ în punctele ale căror abscise sunt de forma $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (figura 6), deci **mulțimea soluțiilor ecuației $\cos x = a$ este $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.**

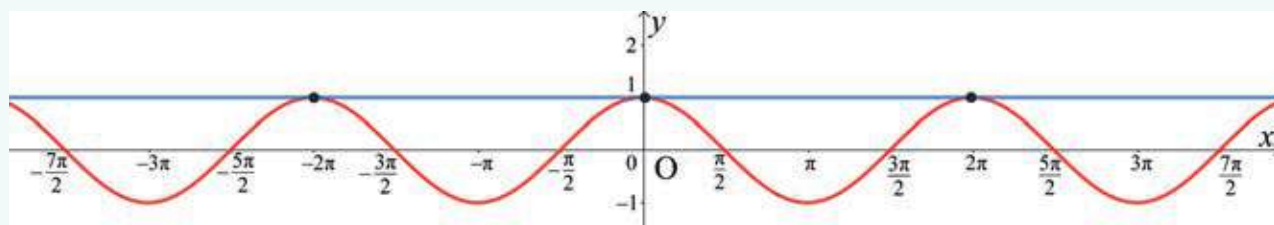


Figura 6

- Dacă $a = -1$, atunci reprezentarea grafică a funcției cosinus intersectează dreapta de ecuație $y = a$ în punctele ale căror abscise sunt de forma $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (figura 7), deci **mulțimea soluțiilor ecuației $\cos x = a$ este $\{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.**

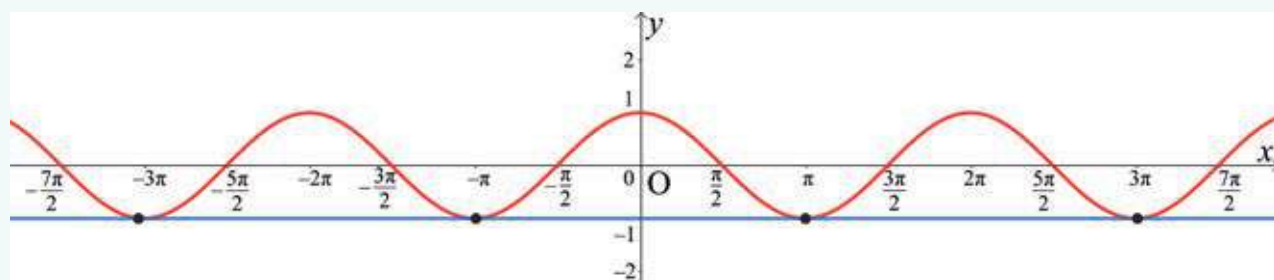


Figura 7

- Dacă $|a| < 1$, atunci reprezentarea grafică a funcției cosinus intersectează dreapta de ecuație $y = a$ în punctele ale căror abscise sunt de forma $\arccos a + 2k\pi$, $-\arccos a + 2n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$ (figura 8), deci **ecuația $\cos x = a$ are soluțiile $x \in \{\arccos a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos a + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.**

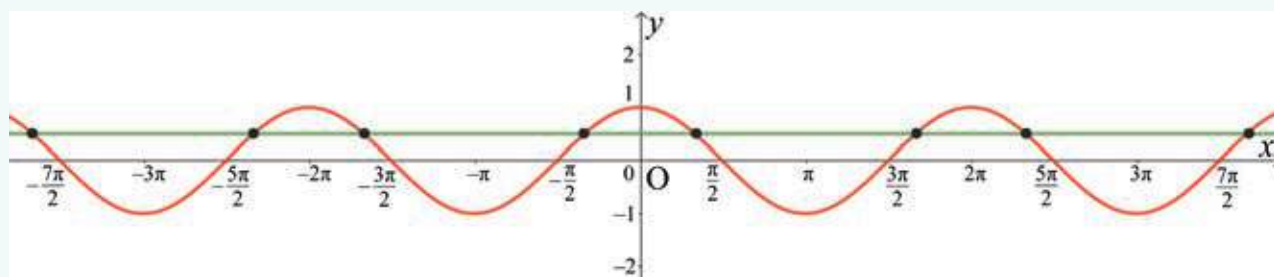


Figura 8

EXEMPLE:

1. Ecuația $\cos x = -3, x \in \mathbb{R}$, nu are soluție deoarece $-1 \leq \cos x \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Ecuația $\cos x = \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}$, are soluțiile $x \in \left\{ \arccos \frac{1}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\arccos \frac{1}{2} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$, adică $x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. Ecuația $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x \in \mathbb{R}$, are soluțiile

$$x \in \left\{ \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}, \text{ adică}$$

$$x \in \left\{ \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\pi + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}, \text{ de unde rezultă}$$

$$x \in \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3. Ecuația $\operatorname{tg} x = a, a \in \mathbb{R}$

Mulțimea soluțiilor ecuației $\operatorname{tg} x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) este formată din abscisele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției $\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ cu dreapta de ecuație $y = a$.

Examinând reprezentarea grafică a funcției tangentă, deducem că aceasta intersectează dreapta de ecuație $y = a$ în punctele ale căror abscise sunt de forma $\operatorname{arctg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (figura 9), deci **ecuația $\operatorname{tg} x = a$ are soluțiile $x \in \{\operatorname{arctg} a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.**

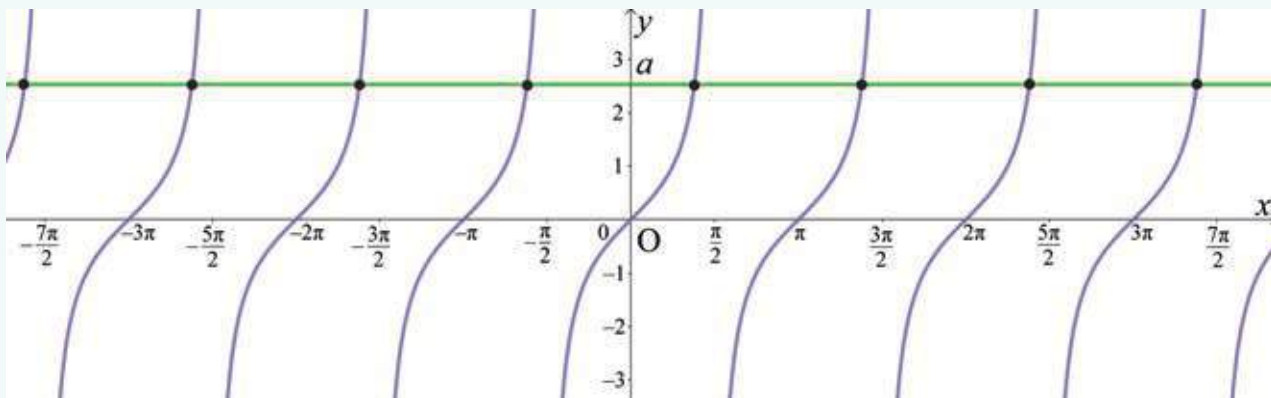


Figura 9

EXEMPLE:

1. Ecuația $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}, x \in \mathbb{R}$, are soluțiile $x \in \left\{ \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, adică $x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. Ecuația $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}, x \in \mathbb{R}$, are soluțiile $x \in \left\{ \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, adică $x \in \left\{ -\operatorname{arctg} \sqrt{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, de unde rezultă $x \in \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

4. Ecuația $\operatorname{ctg} x = a, a \in \mathbb{R}$

Mulțimea soluțiilor ecuației $\operatorname{ctg} x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) este formată din abscisele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției $\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ cu dreapta de ecuație $y = a$.

Examinând reprezentarea grafică a funcției cotangentă, deducem că aceasta intersectează dreapta de ecuație $y = a$ în punctele ale căror abscise sunt de forma $\operatorname{arctg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (figura 10), deci **ecuația $\operatorname{ctg} x = a$ are soluțiile $x \in \{\operatorname{arctg} a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.**

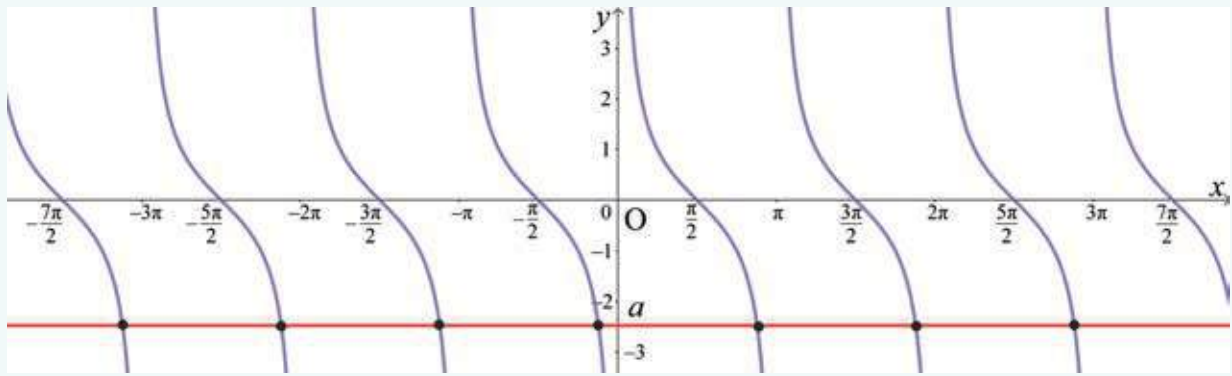


Figura 10

EXEMPLE:

1. Ecuația $\text{ctg } x = 1$, $x \in \mathbb{R}$, are soluțiile $x \in \{\arccotg 1 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, adică $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Ecuația $\text{ctg } x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x \in \mathbb{R}$, are soluțiile $x \in \left\{\arccotg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, adică $x \in \left\{\pi - \arccotg \frac{1}{\sqrt{3}} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, de unde rezultă $x \in \left\{\frac{2\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

OBSERVAȚIE.

Ecuația $\text{ctg } x = a$, $a \in \mathbb{R}^*$, este echivalentă cu ecuația $\text{tg } x = \frac{1}{a}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Ecuații de forma $\sin f(x) = \sin g(x)$

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \sin f(x) - \sin g(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{f(x) - g(x)}{2} \cos \frac{f(x) + g(x)}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{f(x) - g(x)}{2} = 0 \text{ sau } \cos \frac{f(x) + g(x)}{2} = 0$$

$$\sin \frac{f(x) - g(x)}{2} = 0 \Rightarrow \frac{f(x) - g(x)}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) - g(x) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \frac{f(x) + g(x)}{2} = 0 \Rightarrow \frac{f(x) + g(x)}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) + g(x) = \pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Așadar, $\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ sau } f(x) + g(x) = \pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

EXEMPLU:

$$\sin 5x = \sin 7x \Leftrightarrow \sin 5x - \sin 7x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{5x - 7x}{2} \cos \frac{5x + 7x}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin(-x) \cos 6x = 0 \Leftrightarrow \sin(-x) = 0 \text{ sau } \cos 6x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ sau } x = \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Soluțiile ecuației sunt } x \in \left\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{(2n+1)\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Ecuații de forma $\cos f(x) = \cos g(x)$

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \cos f(x) - \cos g(x) = 0 \Leftrightarrow -2 \sin \frac{f(x) - g(x)}{2} \sin \frac{f(x) + g(x)}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{f(x) - g(x)}{2} = 0 \text{ sau } \sin \frac{f(x) + g(x)}{2} = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ sau } f(x) + g(x) = +2n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Așadar, $\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ sau } f(x) + g(x) = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

EXEMPLU:

$$\cos 4x = \cos x \Leftrightarrow \cos 4x - \cos x = 0 \Leftrightarrow -2 \sin \frac{4x - x}{2} \sin \frac{4x + x}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{5x}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{3x}{2} = 0 \text{ sau } \sin \frac{5x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \text{ sau } x = \frac{2n\pi}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

Soluțiile ecuației sunt $x \in \left\{ \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2n\pi}{5} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Ecuații de forma $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x)$, $f(x), g(x) \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x) &\Leftrightarrow \operatorname{tg} f(x) - \operatorname{tg} g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin f(x)}{\cos f(x)} - \frac{\sin g(x)}{\cos g(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin f(x) \cos g(x) - \sin g(x) \cos f(x)}{\cos f(x) \cos g(x)} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin(f(x) - g(x))}{\cos f(x) \cos g(x)} = 0 \Leftrightarrow \sin(f(x) - g(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Așadar, $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = k\pi, k \in \mathbb{Z} \left(f(x), g(x) \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$.

EXEMPLU:

$$\operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(4x - x)}{\cos 4x \cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Pentru ca $\operatorname{tg} 4x$ și $\operatorname{tg} x$ să existe, trebuie ca $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ și $x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{4}, m \in \mathbb{Z}$. Cum valorile $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$, nu coincid cu valorile $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$, și cu valorile $x = \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{4}, m \in \mathbb{Z}$, ecuația are soluțiile $x \in \left\{ \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Ecuații de forma $\operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} g(x)$, $f(x), g(x) \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} g(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Așadar, $\operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} g(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) = k\pi, k \in \mathbb{Z} \left(f(x), g(x) \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \right)$.

Ecuații de forma $a \sin x + b \cos x = c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

Dacă $a = 0$ sau $b = 0$, ecuația se reduce la o ecuație trigonometrică fundamentală.

În continuare vom presupune $a \neq 0$ și $b \neq 0$. Există mai multe metode de rezolvare a acestei ecuații, dar vom prezenta numai două dintre ele.

Metoda 1.

- Dacă ecuația nu are soluții de forma $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, atunci $a \sin(2k+1)\pi + b \cos(2k+1)\pi \neq c$, adică $b + c \neq 0$.

Se notează $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Cum $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ și $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, ecuația devine $a \cdot \frac{2t}{1+t^2} + b \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = c$.

După aducerea la același numitor și efectuarea calculelor, obținem ecuația echivalentă

$$(b+c)t^2 - 2at + c - b = 0 \quad (1), \text{ care este o ecuație de gradul al doilea în necunoscuta } t.$$

Pentru ca această ecuație să aibă rădăcini reale este necesar ca $\Delta \geq 0$, adică $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Prin urmare, ecuația (1) are soluțiile:

$$x \in \left\{ 2 \operatorname{arctg} \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b+c} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ 2 \operatorname{arctg} \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b+c} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- Dacă ecuația are o soluție de forma $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, atunci $b + c = 0$. În acest caz, ecuația se poate scrie $a \sin x + b \cos x = -b$ sau $a \sin x + b(1 + \cos x) = 0$.

$$\begin{aligned} a \sin x + b(1 + \cos x) = 0 &\Leftrightarrow 2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2b \cos^2 \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{x}{2} \left(a \sin \frac{x}{2} + b \cos \frac{x}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = 0 \text{ sau} \\ &a \sin \frac{x}{2} + b \cos \frac{x}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{(2m+1)\pi}{2}, m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = (2m+1)\pi, m \in \mathbb{Z}$$

$$a \sin \frac{x}{2} + b \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x = 2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{b}{a} \right) + 2p\pi, p \in \mathbb{Z}$$

Metoda 2.

$$a \sin x + b \cos x = c \Leftrightarrow \sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$$

Există un unic $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ astfel încât $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha$, deci $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$, de unde rezultă $\cos \alpha = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

$$\text{Atunci } \sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \sin x + \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{a} \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ecuția $\sin(x + \alpha) = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ are soluție dacă și numai dacă $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$, adică $c^2 \leq a^2 + b^2$.

EXEMPLE:

1. $\sin x + 2 \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x + 2 \cos x = 2$

Ecuția nu are soluții de forma $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ($a = 1$, $b = 2$, $c = 2 \Rightarrow b + c \neq 0$).

Notăm $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Cum $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ și $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, ecuația devine $\frac{2t}{1+t^2} + 2 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = 2$. După aducerea la același numitor și efectuarea calculelor, obținem ecuația echivalentă $4t^2 - 2t = 0$.

$$4t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow 2t(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ sau } t = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Așadar, ecuația are soluțiile $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos x =$
 $= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

Prin urmare, ecuația are soluțiile $x \in \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. $\sin x - \cos x = 1$

Cum $\sin(2k+1)\pi - \cos(2k+1)\pi = 1$, pentru orice număr întreg k , rezultă că ecuația are soluții de forma $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x - (1 + \cos x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = 0 \text{ sau } \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 0$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{(2m+1)\pi}{2}, m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = (2m+1)\pi, m \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 2 \cdot \frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Prin urmare, ecuația are soluțiile $x \in \{(2m+1)\pi \mid m \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercițiu rezolvat

Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile următoare:

- a) $\cos 2x = \sin 5x$; c) $2\sin^2 x - 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$;
b) $-6\sin^2 x + 11\cos x = 1$; d) $3\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 8\cos^2 x = 2$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos 2x = \sin 5x &\Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) \Leftrightarrow \cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\sin \frac{2x - (\frac{\pi}{2} - 5x)}{2} \sin \frac{2x + (\frac{\pi}{2} - 5x)}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{7x - \frac{\pi}{2}}{2} \sin \frac{-3x + \frac{\pi}{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin \frac{7x - \frac{\pi}{2}}{2} = 0 \text{ sau } \sin \frac{-3x + \frac{\pi}{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{7x - \frac{\pi}{2}}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ sau } \frac{-3x + \frac{\pi}{2}}{2} = n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z} \text{ sau } x = \frac{\pi}{6} - \frac{2n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Soluțiile ecuației sunt $x \in \left\{ \frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} - \frac{2n\pi}{3} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$\text{b) } -6\sin^2 x + 11\cos x = 1 \Leftrightarrow -6(1 - \cos^2 x) + 11\cos x = 1 \Leftrightarrow 6\cos^2 x + 11\cos x - 7 = 0$$

Notăm $\cos x = t$. Ecuația devine $6t^2 + 11t - 7 = 0$, care este o ecuație de gradul al doilea cu soluțiile $t_1 = \frac{1}{2}$ și $t_2 = -\frac{7}{3}$.

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ sau } x = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Ecuația $\cos x = -\frac{7}{3}$ nu are soluție (deoarece $-\frac{7}{3} < -1$).

Soluțiile ecuației sunt $x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$\text{c) } 2\sin^2 x - 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$$

Observăm că ecuația nu are soluții de forma $\frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Împărțim ambii membri ai ecuației la $\cos^2 x$ și obținem:

$$\begin{aligned} \frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} &= 0 \Rightarrow 2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 1 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x + 1 = 0 \Rightarrow 2\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 1) - (\operatorname{tg} x - 1) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\operatorname{tg} x - 1)(2\operatorname{tg} x - 1) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x - 1 = 0 \text{ sau } 2\operatorname{tg} x - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$2\operatorname{tg} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \arctg \frac{1}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Soluțiile ecuației sunt $x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \arctg \frac{1}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$\begin{aligned} \text{d) } 3\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 8\cos^2 x &= 2 \Leftrightarrow 3\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 8\cos^2 x = \\ &= 2\sin^2 x + 2\cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x - 5\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 0 \end{aligned}$$

Observăm că ecuația nu are soluții de forma $\frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Împărțim ambii membri ai ecuației la $\cos^2 x$ și obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5\sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{6\cos^2 x}{\cos^2 x} &= 0 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 6 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3\operatorname{tg} x + 6 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 2) - 3(\operatorname{tg} x - 2) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\operatorname{tg} x - 2)(\operatorname{tg} x - 3) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x - 2 = 0 \text{ sau } \operatorname{tg} x - 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} x - 2 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 2 \Rightarrow x = \arctg 2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x - 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 3 \Rightarrow x = \arctg 3 + n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Soluțiile ecuației sunt $x \in \{ \arctg 2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \arctg 3 + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \}$.



Aplic

I. Rezolvă ecuațiile:

1. a) $\sin 2x = 1, x \in [0, \pi]$; c) $\cos x = -\frac{1}{2}, x \in [0, 2\pi]$; e) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;
b) $\sin x = -\frac{1}{2}, x \in [0, 2\pi]$; d) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [0, \pi]$; f) $\operatorname{ctg} x = -1, x \in (0, \pi)$.
2. a) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), x \in [0, \pi]$; d) $\sin x = \cos x, x \in [0, 2\pi]$;
b) $\cos 5x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), x \in [0, \pi]$; e) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right), x \in [0, 2\pi]$.
c) $\cos 2x = -\cos 7x, x \in [0, \pi]$;

II. Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

1. a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\cos\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
b) $\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = -\frac{1}{2}$; f) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$;
2. a) $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $\operatorname{tg}(4x + \pi) = -1$; e) $\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$;
b) $\operatorname{tg}(3x - \pi) = \sqrt{3}$; d) $\operatorname{ctg} 2x = \sqrt{3}$; f) $\operatorname{ctg}\left(-2x + \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
3. a) $2\sin^2 x - 1 = 0$; c) $\operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 3 = 0$;
b) $4\cos^2 3x - 3 = 0$; d) $\operatorname{ctg}^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$.
4. a) $\sin 7x = \sin 2x$; e) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 4x$;
b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; f) $\operatorname{tg}\left(\frac{4x}{5} - \frac{\pi}{10}\right) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
c) $\cos x = \cos 4x$; g) $\operatorname{ctg} 5x = \operatorname{ctg} 3x$;
d) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$; h) $\operatorname{ctg}\left(7x - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
5. a) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$; c) $\operatorname{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3})\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$;
b) $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$; d) $2\operatorname{ctg} x - 3\operatorname{tg} x - 5 = 0$.
6. a) $2\sin x + 2\sqrt{3}\cos x = 4$; e) $3\sin x + 4\cos x = 5$;
b) $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 3$; f) $\sqrt{3}\sin 4x - \cos 4x = 1$.
c) $\sin x - \cos x = 1$; g) $\sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$;
d) $2\sin x - \cos x = 1$; h) $\sin\frac{5x}{3} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5x}{3}\right) = \sqrt{2}$.
7. a) $\sin 2x = \cos 5x$; c) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; e) $\sin 6x = -\sin 2x$;
b) $\sin 4x = \cos 4x$; d) $\sin 3x = -\cos 3x$; f) $\cos 3x = -\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$.
8. a) $\sin 2x + \sin x = 0$; c) $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$; e) $\sin 3x - \sin x = \cos 2x$;
b) $\cos 3x + \cos x = 0$; d) $\sin 2x + \cos x = 0$; f) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.
9. a) $\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$;
b) $\sqrt{3}\sin^2 x + (1 - \sqrt{3})\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$;
c) $3\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 2$;
d) $\sin^2 x + \frac{3}{2}\sin 2x + 2\cos^2 x = 3$.

Codul termic al corpului uman

Vei lucra ca un biostatistician (adică specialist atât în biometrie, știința care presupune cercetarea organismelor și organelor prin măsurare, cât și în statistică, adică știința care se ocupă cu analiza și interpretarea datelor colectate) pentru a cartografia ritmul interior al organismului uman. Misiunea ta este să demonstrezi că temperatura corpului nu este un număr static, ci o „undă vie” care pulsează predictibil.

Vei colecta date termice corporale personale și le vei prelucra pentru a genera o funcție trigonometrică, menită să anticipeze fluctuațiile de energie ale corpului tău și momentul în care odihna devine o necesitate.

Viața noastră este guvernată de un ceas biologic de 24 de ore. Datorită acestui mecanism, înțelegem de ce temperatura corpului scade noaptea pentru a favoriza somnul și crește ziua pentru a susține activitatea. Mișcarea temperaturii este „lină” (continuă), nu bruscă. Funcțiile trigonometrice pot descrie cu precizie această armonie a echilibrului natural, unde fiecare creștere este urmată de o scădere simetrică.

1. Colectarea datelor

Alege o zi de weekend (pentru un ritm relaxat) și măsoară-ți temperatura de 4-5 ori în momente-cheie: imediat după trezire, la prânz, după-amiaza (când, de obicei, ar trebui să fie maximă) și înainte de culcare.

Identifică în setul de date cea mai mare valoare ($T_{\max}$), cea mai mică valoare ($T_{\min}$) și orele corespunzătoare.

2. Scrierea modelului matematic

$f: [0, 24] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = A \cos(B(t - C)) + D$, unde:

- A este amplitudinea – reprezintă intensitatea oscilației termice. Se obține prin formula $\frac{T_{\max} - T_{\min}}{2}$;
- D este linia de referință – reprezintă nivelul termic de bază, punctul în jurul căruia corpul „gravitează”.
Se obține prin formula $\frac{T_{\max} + T_{\min}}{2}$;
- B este factorul temporal – deoarece corpul revine la aceeași stare la fiecare 24 de ore, folosim frecvența $B = \frac{2\pi}{24}$;
- C este ora la care temperatura este maximă;
- t este ora exactă la care dorești să afli temperatura corpului.

3. Proiecția digitală

- Accesează aplicația *Desmos* și introdu formula.
- Folosește butoanele [All] pentru a ajusta parametrii conform datelor tale.
- Configurarea vizualizării: Pentru o claritate optimă, setează axa Ox (*timpul*) între -1 și 24 și axa Oy (*temperatura*) între 35 și 38.

Atenție! Asigură-te că lucrezi în *Radians* (radiani).

4. Verificarea acurateții predicției

- Alege o oră la care nu ai făcut măsurători.
- Calculează valoarea temperaturii corpului folosind punctul corespunzător pe graficul din *Desmos*.
- Dacă valoarea „prezisă” matematic se apropie la câteva zecimi de grad de măsurătoarea reală pe care ai făcut-o, atunci ai descifrat cu succes formula propriului ritm circadian.
- Ce semnificație au abaterile majore de la modelul matematic?

Exerciții recapitulative

1. Determină măsura în grade sexagesimale a unui unghi, știind că măsura sa în radiani este egală cu:

a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{7\pi}{4}$; c) $-\frac{5\pi}{12}$; d) $\frac{11\pi}{6}$; e) $-\frac{13\pi}{3}$; f) $\frac{29\pi}{8}$.

2. Determină măsura în radiani a unui unghi, știind că măsura sa în grade sexagesimale este egală cu:

a) 60° ; b) 150° ; c) 225° ; d) 315° ; e) -120° ; f) -330° .

3. Precizează cadranul în care se află unghiurile cu măsura egală cu:

a) 60° ; b) $\frac{5\pi}{6}$; c) $\frac{7\pi}{4}$; d) 225° ; e) $\frac{13\pi}{6}$; f) $-\frac{29\pi}{6}$; g) 7

b) Determină coordonatele punctelor de pe cercul trigonometric asociate unghiurilor cu măsura egală cu:

a) 60° ; c) $\frac{7\pi}{4}$; e) $\frac{13\pi}{6}$; g) 150° ; i) 90° ; k) $\frac{17\pi}{6}$; m) $-\frac{19\pi}{6}$;

b) $\frac{5\pi}{6}$; d) 225° ; f) $-\frac{29\pi}{6}$; h) 330° ; j) 4π ; l) $-\frac{11\pi}{3}$; n) $\frac{14\pi}{3}$.

4. Determină semnul numerelor:

a) $\sin \frac{11\pi}{8}$; d) $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{5}$; g) $\operatorname{tg} 3$; j) $\cos \frac{8\pi}{5} \cdot \operatorname{tg} \frac{14\pi}{3}$;

b) $\cos \frac{15\pi}{7}$; e) $\sin 4$; h) $\operatorname{ctg} 10$; k) $\sin 2 \cdot \sin 12$;

c) $\operatorname{tg} \frac{21\pi}{4}$; f) $\cos 5$; i) $\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{7\pi}{5}$; l) $\operatorname{tg} \frac{12\pi}{5} \cdot \operatorname{ctg} \frac{311\pi}{7}$.

5. Determină $\operatorname{tg} x$, știind că:

a) $\sin x = \frac{1}{6}$ și $x \in (0, \frac{\pi}{2})$; c) $\cos x = \frac{8}{17}$ și $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$;

b) $\cos x = -\frac{1}{3}$ și $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$; d) $\sin x = -\frac{24}{25}$ și $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

6. a) Calculează $\sin x + \cos x$, știind că $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ și $\operatorname{tg} x = 2$.

b) Calculează $\sin 2x + \cos 2x$, știind că $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ și $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$.

7. Calculează $\cos(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\operatorname{tg} 2a$, $\sin \frac{a}{2}$, $\cos \frac{b}{2}$, știind că $a \in (0, \frac{\pi}{2})$, $b \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, $\sin a = \frac{3}{5}$ și $\cos b = -\frac{4}{5}$.

8. Arată că:

a) $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8} = 2$;

c) $\frac{1}{\sin 40^\circ} - \frac{1}{\cos 40^\circ} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sin 5^\circ}{\cos 10^\circ}$;

b) $\frac{\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - \sin 20^\circ} = \frac{\sqrt{3} \cos 5^\circ + \sin 5^\circ}{\cos 5^\circ - \sqrt{3} \sin 5^\circ}$;

d) $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$.

9. Studiază paritatea fiecărei funcții:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x + \cos x$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x \cdot \sin x$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin^2 x$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

10. Arată că T este perioadă pentru funcția f :

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin 3x, T = \frac{2\pi}{3}$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2\sin x - \cos 2x, T = 2\pi$.

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos \frac{x}{2}, T = 4\pi$;

11. Transformă în produs următoarele sume:

a) $\sin 80^\circ + \sin 40^\circ$;

c) $\cos 70^\circ + \cos 10^\circ$;

b) $\sin 100^\circ - \sin 20^\circ$;

d) $\cos 140^\circ - \cos 20^\circ$.

12. Transformă în sumă următoarele produse:

a) $\sin 50^\circ \cos 10^\circ$;

b) $\cos 40^\circ \cos 20^\circ$;

c) $\sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{14}$;

d) $\sin \frac{5\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}$.

13. Determină domeniul maxim de definiție al funcției f :

a) $f(x) = \arcsin(2x - 1)$;

b) $f(x) = \arccos(3 - 4x)$;

c) $f(x) = \arcsin(5x + 2)$.

14. Calculează:

a) $\arcsin \frac{1}{2} - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

g) $\cos\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) + \sin\left(\arccos \frac{5}{13}\right)$;

b) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

h) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{4}{5}\right) - \operatorname{tg}^2\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$;

c) $\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \operatorname{arctg}(-1)$;

i) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{5}\right) - \arcsin \frac{2}{5}$;

d) $\operatorname{arcctg} 1 - \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$;

j) $\operatorname{arcctg}(-2) - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)$;

e) $\arcsin\left(\sin \frac{7\pi}{6}\right) - \arccos\left(\cos \frac{11\pi}{6}\right)$;

k) $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arcctg} \frac{4}{7}$;

f) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}\right)$;

l) $\arccos \frac{2}{5} - \operatorname{arcctg} \frac{3}{2}$.

15. Rezolvă ecuațiile următoare:

a) $\sin x = \frac{1}{2}, x \in [0, 2\pi]$;

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x \in [0, 2\pi]$;

c) $\operatorname{tg} x = -1, x \in [-\pi, \pi]$;

d) $\operatorname{ctg} 2x = 1, x \in [0, 2\pi]$.

16. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $\sin(2x - 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$;

e) $4\sin^2 x - 3 = 0$;

g) $\operatorname{tg}^2(-x + 1) - 3 = 0$;

b) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2}$;

d) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) = 1$;

f) $4\cos^2 3x - 1 = 0$;

h) $\operatorname{ctg}^2 6x - \frac{1}{3} = 0$.

17. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$;

f) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;

b) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$;

g) $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$;

c) $\operatorname{tg}\left(\frac{4x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

h) $4\sin x + 3\cos x = 5$;

d) $\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

i) $2\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$;

e) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 3x$;

j) $2\sin^2 x - 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 1$.

18. Demonstrează că, pentru orice număr real x pentru care au sens expresiile, au loc egalitățile:

a) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = 1$;

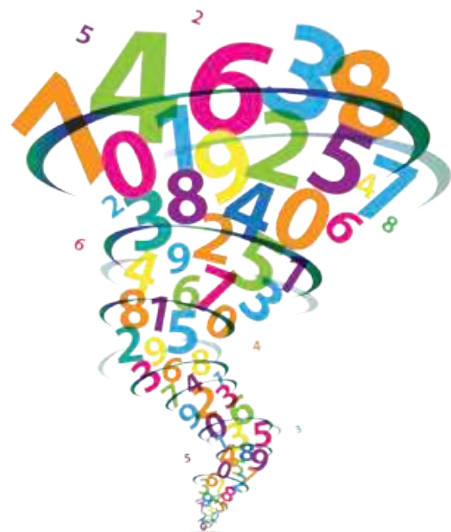
b) $(\sin x + \cos x)^4 + (\sin x - \cos x)^4 = 2 + 8\sin^2 x \cos^2 x$;

c) $1 + \cos x + \sin x = 2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$;

d) $1 - \cos x - \sin x = 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$;

e) $\sin x(\sin 3x + \sin 5x) + \cos 2x \cos 8x = \cos 4x \cos 6x$;

f) $\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \cos \frac{x}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \cdot \sin \frac{x}{2^n}}$.



Timp de lucru: 45 de minute

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I

30 de puncte

30 de puncte	1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.
(10 p.)	A. Valoarea numărului real $a = \cos\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ este: a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) 1.
(10 p.)	B. Dacă $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$), atunci $\sin 2x$ este egal cu: a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{3}{2}$; d) 3.
(10 p.)	C. Valoarea numărului real $a = \arcsin\left(\sin \frac{7\pi}{6}\right) + \arccos\left(\cos \frac{7\pi}{6}\right)$ este: a) 0; b) $\frac{2\pi}{3}$; c) $\frac{7\pi}{3}$; d) $\frac{7\pi}{6}$.

Subiectul al II-lea

60 de puncte

Scrie rezolvările complete.

20 de puncte	1. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:
(10 p.)	a) $1 - 2\sin^2 x + \cos x = 0$;
(10 p.)	b) $\sin 2x = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$.
10 puncte	2. Compară numerele reale $\sin 1$ și $\cos 5$.
10 puncte	3. Demonstrează că: $1 + \cos x - \sin x = 2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, pentru orice număr real x .
10 puncte	4. Determină $a + 2b$, știind că $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg} a = \frac{1}{7}$ și $\operatorname{tg} b = \frac{1}{3}$.
10 puncte	5. Arată faptul că $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din această unitate.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	5 foarte bine	4 bine	3 mediu	2 slab	1 foarte slab
Mi-a fost ușor să rezolv exercițiile.					
Am înțeles criteriile de rezolvare.					
Mi-am amintit conținuturile învățate.					

Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Relații metrice

- ▶ 1. Teorema cosinusului, teorema sinusurilor, rezolvarea triunghiurilor
- ▶ 2. Raza cercului înscris și raza cercului circumscris unui triunghi. Aria unui triunghi
- ▶ 3. Teorema bisectoarei; relația lui Stewart; lungimile unor segmente importante din triunghi
- ▶ 4. Concurență și coliniaritate în geometria plană: teorema lui Menelaus, teorema lui Ceva



1. Teorema cosinusului, teorema sinusurilor, rezolvarea triunghiurilor

Descopăr

Elevii vor fi împărțiți în două grupe.

Grupa 1

1. Un alpinist dorește să determine distanța dintre două vârfuri muntoase, A și B. El se află într-un punct de observație C și știe că distanțele de la el la vârfurile A și B sunt egale cu 6 km și, respectiv, 10 km, iar măsura unghiului format de liniile sale de vizibilitate către cele două vârfuri ($\angle ACB$) este egală cu 60° . Determină distanța dintre cele două vârfuri muntoase A și B.
2. Fie ABC un triunghi cu laturile $AB = c$, $BC = a$ și $AC = b$. Punctul D este proiecția punctului A pe dreapta BC.
 - a) Arată că $AD = b \sin C$.
 - b) Determină lungimea segmentului AB în funcție de lungimile segmentelor AC și BC și $\cos C$.

Grupa 2

1. Două stații de salvamar situate în punctele A și B pe malul mării se află la o distanță de 12 km una de cealaltă. Ambele recepționează un semnal de urgență de la o navă aflată în larg, în punctul C. Pentru a localiza nava, operatorii măsoară unghiurile față de linia dreaptă care unește cele două stații (AB): din stația A, se formează un unghi de 45° , iar din stația B se formează un unghi de 75° .
 - a) Determină distanțele de la stațiile de salvamar la navă.
 - b) Arată că $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$.
2. Fie ABC un triunghi cu laturile $AB = c$, $BC = a$ și $AC = b$. Punctul D este proiecția punctului A pe dreapta BC.
 - a) Arată că $AD = c \sin B$.
 - b) Arată că $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.



Învăț

În clasele anterioare ați învățat cum puteți calcula lungimea unei laturi a unui triunghi dreptunghic în funcție de celelalte două laturi ale acestuia sau folosind funcțiile trigonometrice ale unghiurilor ascuțite ale triunghiului. În această lecție vom determina o relație între laturile unui triunghi oarecare, folosind și funcții trigonometrice ale unghiurilor triunghiului.

Teorema cosinusului

În continuare, pentru un triunghi ABC, vom considera notațiile consacrate $AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$.

- Fie ABC un triunghi ascuțitunghic (figura 1). Punctul D este proiecția punctului A pe dreapta BC.

În triunghiul dreptunghic ABD ($\angle ADB = 90^\circ$) avem:

$$\sin B = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \sin B = \frac{AD}{c} \Rightarrow AD = c \cdot \sin B;$$

$$\cos B = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \cos B = \frac{BD}{c} \Rightarrow BD = c \cdot \cos B.$$

Cum $BD = c \cdot \cos B$, rezultă că $DC = BC - BD = a - c \cdot \cos B$.

În triunghiul dreptunghic ADC ($\angle ADC = 90^\circ$), aplicăm teorema lui Pitagora și obținem:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow b^2 = (c \cdot \sin B)^2 + (a - c \cdot \cos B)^2 \Rightarrow b^2 = c^2 \cdot \sin^2 B + a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B + c^2 \cdot \cos^2 B \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 \cdot (\sin^2 B + \cos^2 B) - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B.$$

În mod asemănător deducem și celelalte relații pentru lungimile laturilor BC și AB.

- Fie ABC un triunghi dreptunghic în B (figura 2).

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ABC, obținem $AC^2 = BC^2 + AB^2$, adică $b^2 = a^2 + c^2$.

- Fie ABC un triunghi obtuzunghic cu $\angle B > 90^\circ$ (figura 3).

Punctul D este proiecția punctului A pe dreapta BC.

În triunghiul dreptunghic ADB ($\angle ADB = 90^\circ$) avem:

$$\sin(\angle ABD) = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \sin(\pi - B) = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \sin B = \frac{AD}{c} \Rightarrow AD = c \cdot \sin B;$$

$$\cos(\angle ABD) = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \cos(\pi - B) = \frac{BD}{AB} \Rightarrow -\cos B = \frac{BD}{c} \Rightarrow BD = -c \cdot \cos B.$$

Cum $BD = -c \cdot \cos B$, rezultă că $DC = BD + BC = -c \cdot \cos B + a = a - c \cdot \cos B$.

În triunghiul dreptunghic ADC ($\angle ADC = 90^\circ$), aplicăm teorema lui Pitagora și obținem $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$.

Astfel, am obținut unul dintre cele mai importante rezultate din matematică, care stabilește o relație între lungimile laturilor unui triunghi și cosinusul unuia dintre unghiurile acestuia.

Teorema cosinusului. În orice triunghi ABC cu $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, avem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

Consecință. În orice triunghi ABC, cu $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, avem:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

EXEMPLE: 

1. Dacă ABC este un triunghi cu $AB = 5$ cm, $AC = 7$ cm și $\cos A = \frac{1}{7}$, atunci:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos A \Rightarrow BC^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{1}{7} \Rightarrow BC^2 = 49 + 25 - 10 \Rightarrow BC^2 = 64 \Rightarrow BC = 8 \text{ cm}.$$

2. Dacă ABC este un triunghi cu $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm și $BC = 7$ cm, atunci:

$$\cos A = \frac{6^2 + 4^2 - 7^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{1}{16}, \cos B = \frac{7^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{29}{56}, \cos C = \frac{7^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{23}{28}.$$

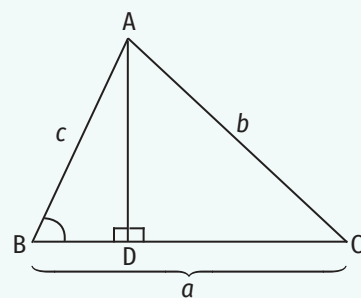


Figura 1

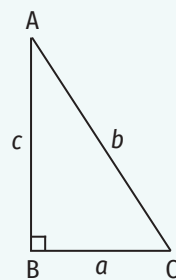


Figura 2

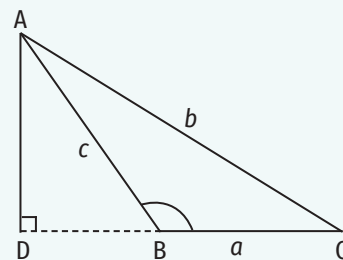


Figura 3

Teorema sinusurilor

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A (figura 4). Dacă R este lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, atunci $BC = 2R$.

În triunghiul ABC avem:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \sin B = \frac{AC}{2R} \Rightarrow \frac{AC}{\sin B} = 2R;$$

$$\sin C = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sin C = \frac{AB}{2R} \Rightarrow \frac{AB}{\sin C} = 2R.$$

$$\text{Așadar, } \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R.$$

În cele ce urmează, vom arăta că nu numai în triunghiul dreptunghic avem astfel de rapoarte constante, ci în orice triunghi, indiferent de natura sa.

Teorema sinusurilor. În orice triunghi ABC, cu $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, avem $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, unde R este lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.

Demonstrație:

Fie ABC un triunghi oarecare cu $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ și R lungimea razei cercului circumscris acestuia (figura 5).

Considerăm punctul M diametral opus punctului B, deci $\angle BCM = 90^\circ$.

În triunghiul dreptunghic BCM avem $\sin(\angle BMC) = \frac{BC}{BM} = \frac{a}{2R}$ (1). Unghiurile BAC și BMC sunt unghiuri înscrise în cerc și au măsura egală cu jumătate din măsura arcului BC, prin urmare sunt congruente. Astfel, relația (1) se poate scrie: $\sin(\angle BAC) = \frac{a}{2R}$, de unde rezultă $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

Construind diametrul CN, demonstrăm asemănător că $\frac{b}{\sin B} = 2R$, iar construind diametrul AP, obținem $\frac{c}{\sin C} = 2R$.

$$\text{Așadar, am obținut } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

EXEMPLU:

Dacă ABC este un triunghi cu $AB = 18$ cm, $A = \frac{5\pi}{12}$ și $C = \frac{\pi}{4}$, atunci:

$$B = \pi - A - C = \frac{\pi}{3} \text{ și } \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin A = \sin \frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4};$$

$$\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow \frac{a}{\sin \frac{5\pi}{12}} = \frac{b}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{18}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2R \Leftrightarrow \frac{a}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{18}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R \Leftrightarrow \frac{a}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 18\sqrt{2} = 2R$$

Obținem $a = 9(\sqrt{3} + 1)$, $b = 9\sqrt{6}$ și $R = 9\sqrt{2}$.

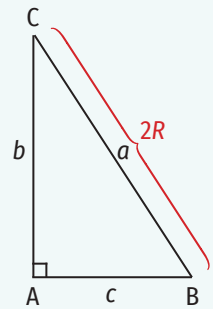


Figura 4

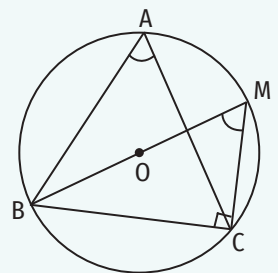


Figura 5

Rezolvarea triunghiurilor

A rezolva un triunghi înseamnă a determina toate elementele sale (lungimile laturilor și măsurile unghiurilor), atunci când se cunosc trei dintre ele, dintre care cel puțin o latură.

OBSERVAȚIE.

Deoarece, în practică, măsurile unghiurilor nu sunt întotdeauna valori remarcabile (precum 30° , 45° , 60°), este necesar să apelăm la instrumente de calcul pentru a obține valorile funcțiilor trigonometrice. În acest scop, putem folosi aplicația *Calculator* de pe telefonul mobil, tabletă sau computer astfel: deschidem aplicația, selectăm modul științific, setăm unitatea de măsură pe *Deg* (pentru grade sexagesimale) sau *Rad* (pentru radiani), introducem funcția trigonometrică și apoi măsura unghiului. Pentru calculul funcțiilor trigonometrice inverse la anumite telefoane, este necesară activarea opțiunii *Inv* sau 2^{nd} . După introducerea valorilor, rezultatul afișat va fi o fracție zecimală, pe care, de obicei, o rotunjim la două, trei sau patru zecimale, pentru a asigura precizia necesară în calculele ulterioare.

1. Rezolvarea triunghiului dreptunghic

Rezolvarea unui triunghi dreptunghic constă în determinarea lungimilor laturilor și a măsurilor unghiurilor sale cunoscând două elemente ale triunghiului, dintre care cel puțin o latură.

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A cu $AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$ (figura 6).

Distingem mai multe cazuri:

- **Se cunosc lungimile catetelor triunghiului ABC ($AB = c$, $AC = b$) și se cer: lungimea ipotenuzei și măsurile unghiurilor ascuțite ale triunghiului.**

În acest caz, $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, $\sin B = \frac{b}{a}$, $C = 90^\circ - B$.

EXEMPLU:

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, cu $c = 8$, $b = 6$. Atunci, $a = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ și $\sin B = \frac{3}{5}$, de unde rezultă că $B = \arcsin \frac{3}{5}$, deci $B \approx 37^\circ$ și $C \approx 53^\circ$.

- **Se cunosc lungimea ipotenuzei ($BC = a$) și lungimea unei catete a triunghiului ABC și se cer: lungimea celeilalte catete și măsurile unghiurilor ascuțite ale triunghiului.**

Dacă se cunoaște $AB = c$, atunci $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $\sin C = \frac{c}{a}$ și $B = 90^\circ - C$.

EXEMPLU:

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, cu $a = 17$, $c = 8$. Atunci, $b = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ și $\sin C = \frac{8}{17}$, de unde rezultă că $C = \arcsin \frac{8}{17}$, deci $C \approx 28^\circ$ și $B \approx 62^\circ$.

- **Se cunosc lungimea unei catete și măsura unghiului ascuțit opus acesteia și se cer: lungimea celeilalte catete, lungimea ipotenuzei și măsura celuilalt unghi ascuțit.**

Dacă se cunosc $AC = b$ și măsura unghiului B, atunci:

$$C = 90^\circ - B;$$

$$\sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\sin B};$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{\operatorname{tg} B}.$$

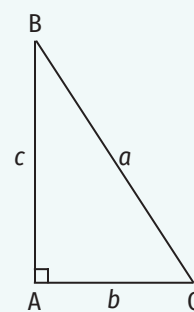


Figura 6

EXEMPLU:

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A cu $b = 12$ și $B = 15^\circ$.

Atunci, $a = \frac{b}{\sin B}$ și $c = \frac{b}{\operatorname{tg} B}$, de unde rezultă $a = \frac{12}{\sin 15^\circ}$ și $c = \frac{12}{\operatorname{tg} 15^\circ}$.

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4},$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Cum $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}$ și $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$, obținem $a = 12\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$ și $c = 12(2 + \sqrt{3})$.

$$C = 90^\circ - 15^\circ \Rightarrow C = 75^\circ$$

OBSERVAȚIE.

Calculul lungimilor segmentelor BC și AB se poate face folosind aplicația *Calculator* de pe telefonul mobil, tabletă sau computer astfel:

$$a = \frac{12}{\sin 15^\circ} \approx 46,36; \quad c = \frac{12}{\operatorname{tg} 15^\circ} \approx 44,78.$$

- **Se cunosc lungimea unei catete și măsura unghiului ascuțit alăturat acesteia și se cer: lungimea celeilalte catete, lungimea ipotenuzei și măsura celuiilalt unghi ascuțit.**

Dacă se cunosc $AC = b$ și măsura unghiului C, atunci:

$$B = 90^\circ - C; \cos C = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\cos C}; \operatorname{tg} C = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b \cdot \operatorname{tg} C.$$

EXEMPLU:

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A cu $b = 10$ și $C = 40^\circ$.

Atunci, $a = \frac{b}{\cos C}$ și $c = b \cdot \operatorname{tg} C$, de unde rezultă $a = \frac{10}{\cos 40^\circ}$ și $c = 10 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ$. Folosind aplicația *Calculator* de pe telefonul mobil, tabletă sau computer, obținem $a \approx 13$ și $c \approx 8,4$.

$$B = 90^\circ - 40^\circ \Rightarrow B = 50^\circ$$

2. Rezolvarea triunghiului oarecare

Fie ABC un triunghi cu $AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$ (figura 7).

Distingem trei cazuri:

- **Se cunosc lungimile laturilor triunghiului ABC ($AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$) și se cer măsurile unghiurilor acestuia.**

În acest caz, folosim consecința teoremei cosinusului:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}.$$

EXEMPLU:

Fie ABC un triunghi cu $a = 5$, $b = 3$, $c = 7$. Atunci:

$$\cos A = \frac{3^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 7} \Rightarrow \cos A = \frac{11}{14} \Rightarrow A = \arccos \frac{11}{14} \Rightarrow A \approx 38^\circ;$$

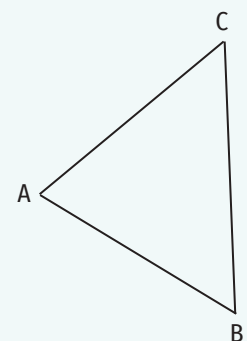


Figura 7

$$\cos B = \frac{5^2 + 7^2 - 3^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} \Rightarrow \cos B = \frac{13}{14} \Rightarrow B = \arccos \frac{13}{14} \Rightarrow B \approx 22^\circ;$$

$$\cos C = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} \Rightarrow \cos C = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow C = 120^\circ.$$

- **Se cunosc lungimea unei laturi a triunghiului ABC și măsurile unghiurilor alăturate acesteia și se cer lungimile celorlalte două laturi și măsura celui de-al treilea unghi.**

Dacă se cunosc $AB = c$ și măsurile unghiurilor A și B , atunci $C = 180^\circ - A - B$, iar pentru determinarea lungimilor laturilor AC și BC ale triunghiului ABC folosim teorema sinusurilor, de unde rezultă $a = \frac{c \sin A}{\sin C}$ și $b = \frac{c \sin B}{\sin C}$.

EXEMPLU:

Fie ABC un triunghi cu $c = 10$, $\angle A = 30^\circ$ și $\angle B = 100^\circ$. Atunci:

$$\angle C = 180^\circ - 30^\circ - 100^\circ = 50^\circ;$$

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} \Rightarrow a = \frac{10 \sin 30^\circ}{\sin 50^\circ} \approx 6,53;$$

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} \Rightarrow b = \frac{10 \sin 100^\circ}{\sin 50^\circ} = \frac{10 \cdot 2 \sin 50^\circ \cos 50^\circ}{\sin 50^\circ} = 20 \cos 50^\circ \approx 12,86.$$

OBSERVAȚIE.

Cazul în care într-un triunghi se cunosc lungimea unei laturi și măsurile a două unghiuri, dintre care unul este cel opus laturii, se reduce la cazul precedent (se poate calcula măsura celui de-al doilea unghi alăturat laturii respective).

- **Se cunosc lungimile a două laturi ale triunghiului ABC și măsura unghiului cuprins între ele și se cer lungimea celei de-a treia laturi a triunghiului și măsurile celorlalte două unghiuri.**

Dacă se cunosc $AB = c$, $AC = b$ și măsura unghiului A , atunci folosim teorema cosinusului pentru a determina lungimea laturii BC a triunghiului ($a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$) și consecința acesteia pentru a determina unghiurile B și C .

EXEMPLU:

Fie ABC un triunghi cu $b = 3$, $c = 8$ și $A = 60^\circ$. Atunci:

$$a^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow a^2 = 49 \Rightarrow a = 7;$$

$$\cos B = \frac{7^2 + 8^2 - 3^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} \Rightarrow \cos B = \frac{13}{14} \Rightarrow B = \arccos \frac{13}{14} \Rightarrow B \approx 22^\circ;$$

$$\cos C = \frac{7^2 + 3^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 3} \Rightarrow \cos C = -\frac{1}{7} \Rightarrow C = \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) \Rightarrow C \approx 98^\circ.$$

- **Se cunosc lungimile a două laturi ale triunghiului ABC și măsura unghiului opus uneia dintre ele și se cer lungimea celei de-a treia laturi a triunghiului și măsurile celorlalte două unghiuri.**

Dacă se cunosc $AB = c$, $AC = b$ și măsura unghiului B , atunci folosim teorema sinusurilor pentru a determina unghiul C și obținem $\sin C = \frac{c \sin B}{b}$. În acest caz, există mai multe situații:

– Dacă $c \sin B > b$, problema nu are soluție.

– Dacă $c \sin B = b$, atunci $\sin C = 1$, deci $C = 90^\circ$, $A = 180^\circ - B - C$ și $a = \sqrt{b^2 - c^2}$.

– Dacă $c \sin B < b$, atunci ecuația $\sin C = \frac{c \sin B}{b}$ are două soluții, $C' < 90^\circ$ și $C'' > 90^\circ$, și $A = 180^\circ - B - C$, iar $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$.

ȘTIAI CĂ...?

Teorema cosinusului este cunoscută și sub numele de **Teorema lui Pitagora generalizată**. Enunțul și demonstrația acestei teoreme au fost găsite în lucrarea *Elemente* a lui Euclid, material scris în anii 300 î.H. Această teoremă constituie un rezultat important în matematică, fiind la baza demonstrării mai multor alte teoreme, printre cele mai importante fiind Relația (teorema) lui Stewart sau Teorema paralelogramului.



EXEMPLU:

Fie ABC un triunghi cu $b = 5$, $c = 8$ și $B = 30^\circ$. Atunci, $\sin C = \frac{8 \sin 30^\circ}{5} = \frac{4}{5}$, de unde rezultă $C \approx 53^\circ$ sau $C \approx 127^\circ$.

Dacă $C \approx 53^\circ$, atunci $A = 97^\circ$ și $a = \frac{5 \sin 97^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 9,93$.

Dacă $C \approx 127^\circ$, atunci $A = 23^\circ$ și $a = \frac{5 \sin 23^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 3,9$.

Exerciții rezolvate

1. Se consideră triunghiul isoscel MNP cu $\angle M = 120^\circ$ și $NP = 4\sqrt{3}$ cm. Rezolvă triunghiul MNP.

Rezolvare:

Triunghiul MNP este isoscel cu $\angle M = 120^\circ$. Atunci $\angle N = \angle P = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$ și segmentele MN și MP sunt congruente.

I. Aplicăm teorema cosinusului și obținem:

$$NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2 \cdot MN \cdot MP \cdot \cos M \Rightarrow (4\sqrt{3})^2 = MN^2 + MN^2 - 2 \cdot MN \cdot MN \cdot \cos 120^\circ \\ \Rightarrow 48 = 2 \cdot MN^2 - 2 \cdot MN^2 \cdot (-\cos 60^\circ) \Rightarrow 48 = 2 \cdot MN^2 + 2 \cdot MN^2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 48 = 3MN^2 \Rightarrow MN^2 = 16 \Rightarrow MN = 4$$

Așadar, $\angle N = \angle P = 30^\circ$ și $MN = MP = 4$ cm.

II. Aplicăm teorema sinusurilor și obținem $\frac{MN}{\sin P} = \frac{MP}{\sin N} = \frac{NP}{\sin M}$, de unde rezultă $\frac{MN}{\sin 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$, și, de aici, $MN = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = 4$ cm.

2. Se consideră triunghiul MNP, dreptunghic în M, cu $MN = 9$ cm și $\angle N = 30^\circ$. Rezolvă triunghiul MNP.

Rezolvare:

În triunghiul MNP avem $\angle M = 90^\circ$ și $\angle N = 30^\circ$, de unde rezultă $\angle P = 60^\circ$.

$$\cos N = \frac{MN}{NP} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{9}{NP} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{NP} \Rightarrow NP = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

Aplicăm teorema lui Pitagora și obținem: $MP = \sqrt{NP^2 - MN^2} = 3\sqrt{3}$ cm.

Aplic

- Se consideră triunghiul ABC cu $AC = 8$ cm, $AB = 6$ cm și $\angle A = 45^\circ$. Determină lungimea segmentului BC.
- Se consideră triunghiul MNP cu $MN = 3$ cm, $NP = 12$ cm și $\angle N = 120^\circ$. Determină lungimea segmentului MP.
- Se consideră triunghiul DEF cu $DE = 5$ cm, $EF = 9$ cm și $DF = 10$ cm. Determină măsura unghiului D.
- Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm și $\angle A = 30^\circ$. Determină lungimea segmentului BC.

5. Se consideră triunghiul DEF cu $DE = 8$ cm, $\angle F = 30^\circ$ și $\angle E = 75^\circ$. Determină lungimea segmentului DF.
6. Se consideră triunghiul ABC cu $AC = 12$ cm, $\angle A = 21^\circ$ și $\angle C = 24^\circ$. Determină lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.
7. Se consideră triunghiul ABC cu $BC = 9$ cm și raza cercului circumscris triunghiului ABC egală cu 6 cm. Determină măsura unghiului BAC.
8. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu baza BC, $AB = 6$ cm și $\angle B = 75^\circ$. Determină perimetrul triunghiului ABC și lungimea razei cercului circumscris acestuia.
9. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm și $BC = 12$ cm. Demonstrează că triunghiul ABC este obtuzunghic.
10. Rezolvă triunghiul ABC, știind că:

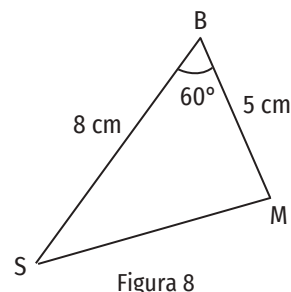
a) $a = 12, b = 13, c = 5$;	e) $a = 8\sqrt{2}, b = 6\sqrt{2}, A = 60^\circ$;
b) $a = 8, b = 9, c = 6$;	f) $b = 10, c = 6, A = 45^\circ$;
c) $a = 8, B = 50^\circ, C = 60^\circ$;	g) $a = 8, b = 6, A = 40^\circ$;
d) $b = 12, B = 45^\circ, C = 70^\circ$;	h) $b = 10, c = 7, B = 50^\circ$.
11. Rezolvă triunghiul ABC, cu perimetrul egal cu 15 cm, știind că, exprimate în cm, lungimile laturilor sale sunt numere naturale consecutive.
12. Rezolvă triunghiul ABC, dreptunghic în A, știind că:

a) $b = 3, c = 4$;	c) $a = 10, C = 30^\circ$;	e) $b = 8, B = 30^\circ$;
b) $a = 15, b = 9$;	d) $b = 15, B = 75^\circ$;	f) $c = 7, C = 40^\circ$.
13. Rezolvă triunghiul dreptunghic ABC, știind că:
 - a) două dintre laturile sale au lungimile egale cu $6\sqrt{5}$ cm, respectiv $120\sqrt{5}$ mm;
 - b) două dintre laturile sale au lungimile egale cu $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm.
14. Se consideră pătratul ABCD cu $BD = 9\sqrt{6}$ cm. Punctul M aparține segmentului BD astfel încât $\frac{BM}{MD} = \frac{1}{2}$.
 - a) Determină măsura unghiului ABD și perimetrul pătratului ABCD.
 - b) Rezolvă triunghiul ABM.
15. Se consideră trapezul isoscel ABCD cu $AB \parallel CD$, $AB = 3CD$, $B = \frac{\pi}{4}$ și înălțimea egală cu 12 cm.
 - a) Determină perimetrul trapezului ABCD.
 - b) Rezolvă triunghiul ABC.
 - c) Determină lungimea razei cercului circumscris triunghiului ADC.
16. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 0,4$ dm, $BC = 0,6$ dm și $B = \frac{\pi}{3}$. Rezolvă triunghiurile ABC și AMC, unde punctul M este mijlocul segmentului BC.
17. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = a$, $AC = \frac{3a}{2}$ și $BC = \frac{a\sqrt{19}}{2}$. Determină măsura unghiului A.
18. Se consideră paralelogramul ABCD cu $AB = 12$ cm, $AD = 10$ cm și $\angle BAD = 60^\circ$.
 - a) Determină lungimile diagonalelor paralelogramului ABCD.
 - b) Determină măsurile unghiurilor triunghiului BDC.
 - c) Determină lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.





19. Demonstrează că în orice triunghi ABC avem:
- $a \cos B + b \cos A = c$;
 - $b c \cos A + c a \cos B + a b \cos C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$;
 - $a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B) = 0$.
20. Fie ABC un triunghi cu $c = 2a \cos B$. Demonstrează că triunghiul ABC este isoscel.
21. Fie ABC un triunghi cu $\cos A + \cos B = \sin C$. Demonstrează că triunghiul ABC este dreptunghic.
22. Se consideră triunghiul ABC cu $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$. Demonstrează că triunghiul ABC este dreptunghic.
23. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A. Demonstrează că $\operatorname{ctg}^2 B + \sin^2 B = \operatorname{ctg}^2 B \cdot \cos^2 B + 1$.
24. Asupra unui corp acționează două forțe concurente $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, care formează un unghi cu măsura egală cu 60° și au intensitățile $F_1 = 30$ N și $F_2 = 40$ N. Determină intensitatea rezultantei celor două forțe și măsurile unghiurilor pe care rezultanta le formează cu fiecare dintre forțe.
25. Un balon cu aer cald se deplasează orizontal la înălțimea constantă de 1 000 m. Un observator îl vede sub un unghi față de orizontală de 30° , iar după patru minute sub un unghi de 45° . Determină viteza balonului. Analizează toate cazurile posibile.
26. Pe o hartă a unui oraș, biblioteca (B), o școală (S) și un magazin (M) sunt unite două câte două prin străzi, ca în figura 8. Pe hartă, distanța dintre bibliotecă și școală este egală cu 8 cm ($BS = 8$ cm), distanța dintre bibliotecă și magazin este egală cu 5 cm ($BM = 5$ cm) și $\angle SBM = 60^\circ$. Scara hărții este 1:10 000. Determină distanța dintre școală și magazin în teren.



27. Un arcaș țintește centrul unui panou vertical aflat la o distanță de 34,38 metri. Din cauza vântului, traiectoria săgeții suferă o deviere unghiulară constantă de $5'$ față de direcția perpendiculară pe panou. La ce distanță de centrul țintei, exprimată în centimetri, va lovi săgeata?
28. Un stâlp de electricitate este montat pe versantul unui deal care are o înclinație de 20° față de linia orizontului. Într-un anumit moment al zilei, razele soarelui formează cu linia orizontului un unghi cu măsura egală cu 50° , iar umbra stâlpului are lungimea egală cu 8 m. Determină înălțimea stâlpului. Analizează toate cazurile posibile.
29. Un turn de observație este construit pe coasta unui deal care are o înclinație de 10° față de planul orizontal. Un turist se află pe potecă, în josul pantei, la o distanță de 30 m de baza turnului. Din acel punct, turistul vede vârful turnului sub un unghi de 45° . Ce înălțime are turnul?
30. O echipă de ingineri vrea să construiască un pod peste un râu, între punctele A și C, situate pe maluri opuse. Aceștia fixează un punct B pe același mal cu punctul A, astfel încât $AB = 150$ m. Măsurând cu un teodolit, inginerii determină $\angle ABC = 60^\circ$ și $\angle ACB = 45^\circ$. Calculează lungimea aproximativă a podului.

31. O echipă de ingineri proiectează un pod suspendat peste un canion adânc și trebuie să determine distanța dintre două puncte de ancorare, A și B, situate pe versantul opus. Pentru măsurători, pe marginea accesibilă a canionului se stabilesc două stații C și D, aflate la o distanță de 100 de metri una de alta (punctele B și C sunt de aceeași parte a dreptei AD). Folosind un teodolit, se măsoară unghiurile: $\angle ACD = 40^\circ$, $\angle BCD = 70^\circ$, $\angle BDC = 35^\circ$ și $\angle ADC = 80^\circ$. Calculează distanța aproximativă dintre punctele de ancorare A și B.



Proiect în echipe: Cât de înaltă este clădirea?



Ce veți face?

Veți lucra în echipe de câte trei elevi pentru a determina înălțimea aproximativă a unei clădiri din localitatea voastră. Pentru aceasta, veți utiliza telefoanele mobile pe post de instrumente topografice, descărcând una dintre aplicațiile *Dioptra*, *Theodolite* sau *Clinometer*.

De ce veți elabora proiectul?

Veți vedea modul în care conceptele teoretice de trigonometrie sunt utilizate în inginerie și topografie pentru a afla dimensiuni care nu pot fi măsurate direct cu o ruletă.

Cum veți face?

- Alegeți clădirea pentru care veți determina înălțimea și marcați pe sol două puncte, A și B, la o distanță de câțiva metri unul de celălalt. Măsurați distanța dintre ele cu o ruletă și notați valoarea obținută.
- Stați în punctul A, deschideți aplicația și vizați punctul B, apoi rotiți telefonul (menținându-l la nivelul orizontului) către baza clădirii (punctul N). Notați măsura unghiului $\angle NAB$.
- Stați în punctul B, vizați punctul A, apoi rotiți telefonul către baza clădirii (punctul N). Notați măsura unghiului $\angle NBA$.
- Stați în punctul B, îndreptați camera telefonului către vârful clădirii (punctul M). Notați măsura unghiului format $\angle MBN$.
- Măsurați înălțimea de la sol până la nivelul ochilor colegului care a ținut telefonul.
- Faceți o fotografie a clădirii și, folosind editorul foto, trasați liniile între punctele A, B, N și M.
- Desenați pe o coală schița clădirii și calculați lungimea segmentului MN.
- Determinați înălțimea clădirii.

Cum veți ști dacă ați reușit?

Veți prezenta în fața clasei fotografia editată cu punctele A, B, N și M clar marcate, capturile de ecran din aplicație care confirmă măsurătorile și rezolvarea matematică completă a problemei.



2. Raza cercului înscris și raza cercului circumscris unui triunghi. Aria unui triunghi

Descopăr



Fie ABC un triunghi.

1. Desenează triunghiul ABC și cercul înscris în acest triunghi.
2. Notează cu I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și cu M, N, P punctele de intersecție dintre acest cerc și dreptele BC, AC, respectiv AB.
3. Demonstrează că $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2}$.
4. Determină măsura unghiului IMB.
5. Exprimă ariile triunghiurilor ABI, AIC, BCI și ABC în funcție de lungimile laturilor triunghiului ABC și lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC.

Învăț



Se consideră un triunghi ABC cu $AB = a$, $AC = b$, $BC = a$ și R lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

Din teorema sinusului avem $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, de unde rezultă

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}.$$

În figura 1 este reprezentat triunghiul ABC cu $AB = a$, $AC = b$ și $BC = a$. Punctul I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar r este lungimea razei acestui cerc. Punctele M, N și P sunt punctele de intersecție dintre cercul înscris în triunghiul ABC și dreptele BC, AC, respectiv BC.

Atunci:

$$A_{ABC} = A_{BIC} + A_{AIC} + A_{AIB} = \frac{IM \cdot BC}{2} + \frac{IN \cdot AC}{2} + \frac{IP \cdot AB}{2} = \frac{r \cdot a}{2} + \frac{r \cdot b}{2} + \frac{r \cdot c}{2} = \frac{r \cdot (a + b + c)}{2} = p \cdot r, \text{ unde } p = \frac{a + b + c}{2}$$

reprezintă semiperimetrul triunghiului ABC.

$$\text{De aici rezultă } r = \frac{A_{ABC}}{p}.$$

În orice triunghi ABC cu $AB = a$, $AC = b$ și $BC = a$, lungimea razei cercului înscris în triunghi este egală cu raportul dintre aria triunghiului (S) și semiperimetrul acestuia (p): $r = \frac{S}{p}$.

În continuare vom obține alte formule pentru calculul ariei unui triunghi.

În figura 2 este reprezentat triunghiul ABC cu $AB = a$, $AC = b$ și $BC = a$. Punctul D este proiecția punctului A pe dreapta BD.

În triunghiul ABD, dreptunghic în D, $\sin B = \frac{AD}{AB}$, de unde rezultă $AD = c \sin B$. (1)

În triunghiul ACD, dreptunghic în D, $\sin C = \frac{AD}{AC}$, de unde rezultă $AD = b \sin C$. (2)

Segmentul AD este înălțime în triunghiul ABC și $A_{ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2}$. (3)

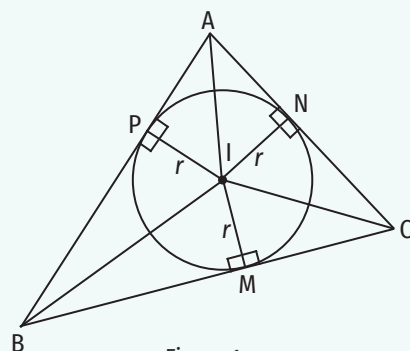


Figura 1

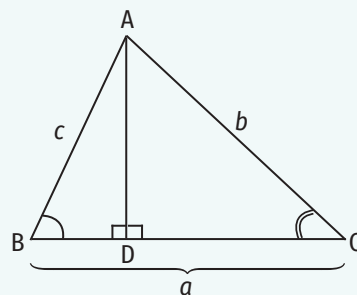


Figura 2

Din relațiile (1) și (3) obținem $A_{ABC} = \frac{ac \sin B}{2}$, iar din relațiile (2) și (3) obținem $A_{ABC} = \frac{ab \sin C}{2}$.

În mod analog, folosind o altă înălțime a triunghiului ABC, obținem $A_{ABC} = \frac{bc \sin A}{2}$.

Notând aria triunghiului ABC cu S , obținem $S = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{ac \sin B}{2}$. (4)

Din teorema sinusurilor avem $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, de unde rezultă $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$, $b = \frac{c \sin B}{\sin C}$, $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$. (5)

Din relațiile (4) și (5) obținem $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}$.

Din teorema sinusurilor avem $\frac{a}{\sin A} = 2R$, de unde rezultă $R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{abc}{2bc \sin A} = \frac{abc}{4 \cdot \frac{bc \sin A}{2}} = \frac{abc}{4S}$.

Am obținut astfel o nouă formulă pentru calculul ariei unui triunghi: $S = \frac{abc}{4R}$.

Cum $S = \frac{bc \sin A}{2}$ și $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, rezultă $b = 2R \sin B$ și $c = 2R \sin C$ și, prin urmare,

$S = \frac{2R \sin B \cdot 2R \sin C \cdot \sin A}{2}$, ceea ce conduce la o altă formulă pentru aria unui triunghi:

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{A}{2} &= \frac{1}{2}(1 - \cos A) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc} = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{4bc} \\ &= \frac{(a + b + c - 2b)(a + b + c - 2c)}{4bc} = \frac{(2p - 2b)(2p - 2c)}{4bc} = \frac{(p - b)(p - c)}{bc} \Rightarrow \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}}, \end{aligned}$$

unde p reprezintă semiperimetrul triunghiului ABC;

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{A}{2} &= \frac{1}{2}(1 + \cos A) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{4bc} = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{4bc} \\ &= \frac{(a + b + c)(a + b + c - 2a)}{4bc} = \frac{2p(2p - 2a)}{4bc} = \frac{p(p - a)}{bc} \Rightarrow \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}}, \text{ unde } p \text{ reprezintă semiperimetrul} \\ &\text{triunghiului ABC.} \end{aligned}$$

Calculăm acum aria triunghiului ABC astfel:

$$S = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{bc}{2} \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = bc \cdot \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}} = bc \cdot \frac{\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}{bc}, \text{ unde } p \text{ reprezintă}$$

semiperimetrul triunghiului ABC.

Așadar, am obținut o formulă pentru calculul ariei unui triunghi în funcție de lungimile laturilor acestuia, numită **Formula lui Heron**:

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

unde p reprezintă semiperimetrul triunghiului ABC.



Exerciții rezolvate



1. Se consideră un triunghi ABC cu $AB = a$, $AC = b$ și $BC = a$.

a) Exprimă $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$ în funcție de semiperimetrul triunghiului ABC și lungimile laturilor acestuia.

b) Dedu o formulă pentru calculul ariei unui triunghi în funcție de $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$.

Rezolvare:

$$a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \cdot \frac{bc}{p(p-a)} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$b) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2(p-a)^2}} = \frac{S}{p(p-a)} \Rightarrow S = p(p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

2. Demonstrează că în orice triunghi ABC avem:

$$a) S = 4Rp \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}; \quad b) S = \frac{abc}{p} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Rezolvare:

a) Știm că în orice triunghi ABC avem $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$, ceea ce e echivalent cu $S^2 = 16R^2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$.

Cum $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, $\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$ și $\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$, obținem:

$$S = 16R^2 \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} =$$

$$= 16R \cdot \frac{abc}{4S} \cdot \frac{p \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} =$$

$$= 16R \cdot \frac{abc}{4S} \cdot \frac{S \cdot p}{abc} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 4Rp \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

b) Cum $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, $\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ și $\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$, obținem:

$$S = 16R^2 \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} =$$

$$= 16 \cdot \frac{a^2 b^2 c^2}{16S^2} \cdot \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} =$$

$$= \frac{abc}{S^2} \cdot \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{abc}{S^2} \cdot \frac{S^2}{p} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} =$$

$$= \frac{abc}{p} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$



Aplic

- Calculează raza cercului înscris, raza cercului circumscris și aria triunghiului ABC, știind că:
 - $a = 5, b = 6, c = 7$;
 - $a = 8, b = 12, c = 6$;
 - $a = 10 + 10\sqrt{3}, B = 45^\circ, C = 30^\circ$;
 - $b = 12, A = 60^\circ, C = 45^\circ$;
 - $a = 3\sqrt{2}, b = 6\sqrt{2}, C = 60^\circ$;
 - $b = 10, c = 6, A = 45^\circ$.
- Calculează raza cercului înscris și raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că:
 - $AB = 0,6 \text{ dm}, AC = 8 \text{ cm}$ și $B = \frac{\pi}{2}$;
 - triunghiul ABC este echilateral și perimetrul său este egal cu 24 cm;
 - $AB = AC = 3\sqrt{2} \text{ cm}$ și $B = \frac{5\pi}{12}$.
- Calculează aria triunghiului ABC, știind că:
 - lungimile segmentelor AB și AC sunt direct proporționale cu 5, respectiv 13, $AB + AC = 54 \text{ cm}$ și $B = \frac{\pi}{2}$;
 - lungimile laturilor triunghiului, exprimate în cm, sunt numere naturale consecutive, iar perimetrul său este egal cu 24 cm;
 - două laturi ale sale au lungimile egale cu $4\sqrt{5} \text{ cm}$ și formează un unghi cu măsura egală cu $\frac{\pi}{4}$;
 - triunghiul este echilateral și lungimea unei laturi este egală cu $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \text{ cm}$;
 - $AB = 2 - \sqrt{3} \text{ cm}, P_{\triangle ABC} = 6 + 2\sqrt{3} \text{ cm}, C = \frac{\pi}{3}$.
- Determină valoarea numărului $E = 4R - 3r$, unde R și r reprezintă lungimile razelor cercului circumscris, respectiv cercului înscris unui triunghi, ale cărui laturi au lungimile egale cu 26 cm, 28 cm și 30 cm.
- Se consideră triunghiul ABC cu $BC = \sqrt{2} \text{ cm}, AC = 2\sqrt{2} \text{ cm}$ și $C = \frac{\pi}{4}$.
 - Rezolvă triunghiul ABC.
 - Determină perimetrul și aria triunghiului ABC.
 - Determină lungimea razei cercului înscris și lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.
 - Determină lungimile înălțimilor triunghiului ABC corespunzătoare laturilor BC și AC.
- Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 3 \text{ cm}, AC = 5 \text{ cm}$ și $P_{\triangle ABC} = (8 + \sqrt{19}) \text{ cm}$. Rezolvă triunghiul ABC și determină aria acestuia.
- Măsurile unghiurilor triunghiului ABC sunt în progresie aritmetică având rația 30° , iar lungimea celei mai mici laturi este egală cu 10 cm. Determină perimetrul, aria, lungimile razei cercului înscris și a razei cercului circumscris triunghiului ABC.
- Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în C. Rezolvă triunghiul ABC și determină perimetrul, aria și lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, dacă:
 - $A = \frac{\pi}{12}$ și $AB = 4 \text{ cm}$;
 - $A = \frac{\pi}{8}$ și $AB = 6 \text{ cm}$.





9. Determină aria triunghiului ABC, știind că suma lungimilor a două dintre laturile sale este egală cu $(3 + \sqrt{3})$ cm, măsura unghiului format de cele două laturi este egală cu $\frac{\pi}{3}$, iar perimetrul triunghiului este egal cu $(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6})$ cm.
10. Se consideră rombul MNPQ cu $MN = 6$ cm și $P_{\Delta MNQ} = 18$ cm. Punctul R este mijlocul segmentului MN.
- Rezolvă triunghiul PQR.
 - Determină $\cos(\angle NPR)$.
 - Determină aria triunghiului NPR.
11. Fie ABCD un patrulater convex cu $AC \cap BD = \{O\}$. Demonstrează că:
- $$A_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin(\angle AOB)}{2}.$$
12. Fie ABC un triunghi cu $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ și $h_b + b = h_c + c$, unde h_b și h_c reprezintă lungimile înălțimilor triunghiului ABC corespunzătoare laturilor AC, respectiv AB. Demonstrează că triunghiul ABC este isoscel sau dreptunghic.
13. Fie S aria triunghiului ABC. Demonstrează că $b^2 \sin 2A + a^2 \sin 2B = 4S$.
14. Demonstrează că, în orice triunghi ABC, avem următoarele identități:
- $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$;
 - $\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$;
 - $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}$;
 - $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$;
 - $\cos A + \cos B + \cos C$.
15. În triunghiul ABC notăm cu h_a , h_b și h_c lungimile înălțimilor corespunzătoare laturilor BC, AC și, respectiv, AB. Demonstrează că $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$, unde r este lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC.
16. Demonstrează că, în orice triunghi ABC, avem egalitățile:
- $\frac{a^2 \sin(B - C)}{\sin A} + \frac{b^2 \sin(C - A)}{\sin B} + \frac{c^2 \sin(A - B)}{\sin C} = 0$;
 - $\frac{a^2 \sin(B - C)}{\sin B + \sin C} + \frac{b^2 \sin(C - A)}{\sin C + \sin A} + \frac{c^2 \sin(A - B)}{\sin A + \sin B} = 0$;
 - $(a + b)\cos C + (b + c)\cos A + (c + a)\cos B = 2p$, unde p este semiperimetrul triunghiului.



3. Teorema bisectoarei; relația lui Stewart; lungimile unor segmente importante din triunghi

Descopăr

În figura 1, punctele B și C marchează două sate legate printr-o șosea (BC) cu lungimea egală cu 25 km. O stație de emisie-recepție este construită într-un punct A astfel încât distanța de la punctul A la satul B este egală cu 12 km, iar distanța de la punctul A la satul C este egală cu 18 km. Inginerii doresc să plaseze un releu de semnal într-un punct D, situat pe șoseaua BC, care să fie echidistant față de dreptele AB și AC. Determină distanțele de la releu la satul B și la stația de emisie-recepție.

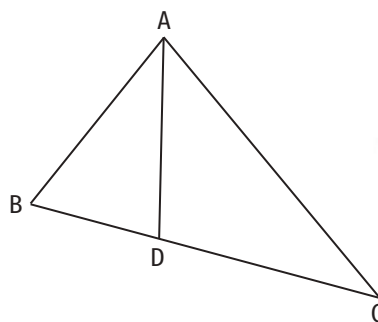


Figura 1



Învăț

Teorema bisectoarei. Fie un triunghi ABC și D punctul de intersecție dintre bisectoarea unghiului A și dreapta BC. Atunci $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Demonstrație:

Construim paralela prin punctul C la dreapta AD. Aceasta intersectează dreapta AB în punctul E. (figura 2)

Semidreapta AD e bisectoarea $\angle A \Rightarrow \angle BAD \equiv \angle DAC$
 $AD \parallel CE \Rightarrow \angle BAD \equiv \angle AEC$ (unghiuri corespondente)
 $AD \parallel CE \Rightarrow \angle DAC \equiv \angle ACE$ (unghiuri alterne interne)
 $\Rightarrow \triangle ACE$ e isoscel cu $AE \equiv AC$

$AD \parallel CE \xrightarrow{\text{(teorema lui Thales)}} \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$
 $AE \equiv AC \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

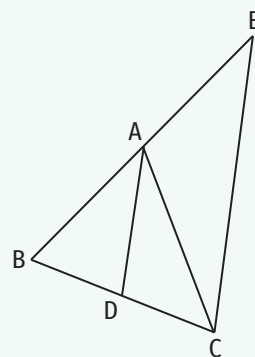


Figura 2

OBSERVAȚIE.

Cunoscând lungimile laturilor unui triunghi, putem calcula și lungimile segmentelor determinate de bisectoarele unghiurilor interioare pe laturile opuse. Astfel, dacă semidreapta AD este bisectoarea unghiului BAC ($D \in BC$), atunci, aplicând proporții derivate, obținem:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{BD + DC} = \frac{AB}{AB + AC} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AB + AC} \Rightarrow BD = \frac{AB \cdot BC}{AB + AC} \Rightarrow BD = \frac{a \cdot c}{b + c}.$$

$$\text{Analog, } CD = \frac{a \cdot b}{b + c}.$$

Relația lui Stewart. Fie un triunghi ABC. Pentru orice punct M care aparține segmentului BC este adevărată relația:

$$AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB - BC \cdot BM \cdot CM$$

Demonstrație:

Aplicăm teorema cosinusului în triunghiurile ABM și ABC și obținem (figura 3):

$$\begin{aligned} AM^2 &= AB^2 + BM^2 - 2 \cdot AB \cdot BM \cdot \cos B \quad | \cdot BC \Rightarrow \\ \Rightarrow AM^2 \cdot BC &= AB^2 \cdot BC + BM^2 \cdot BC - 2 \cdot AB \cdot BM \cdot \cos B \cdot BC; (1) \\ AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B \quad | \cdot BM \Rightarrow \\ \Rightarrow AC^2 \cdot BM &= AB^2 \cdot BM + BC^2 \cdot BM - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B \cdot BM. (2) \end{aligned}$$

Scăzând relațiile (1) și (2), obținem:

$$\begin{aligned} AM^2 \cdot BC - AC^2 \cdot BM &= AB^2 \cdot BC - AB^2 \cdot BM + BM^2 \cdot BC - BC^2 \cdot BM \Rightarrow \\ \Rightarrow AM^2 \cdot BC - AC^2 \cdot BM &= AB^2 \cdot (BC - BM) + BM \cdot BC \cdot (BM - BC) \Rightarrow \\ \Rightarrow AM^2 \cdot BC - AC^2 \cdot BM &= AB^2 \cdot CM + BM \cdot BC \cdot (-CM) \Rightarrow AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB - BC \cdot BM \cdot CM. \end{aligned}$$

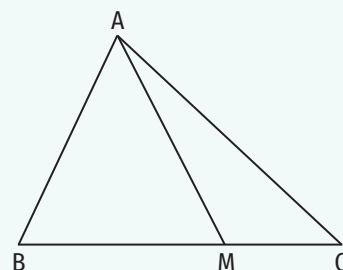


Figura 3

Calculul lungimilor bisectoarelor interioare ale unui triunghi

Fie un triunghi ABC cu $AB = c$, $BC = a$ și $AC = b$. Bisectoarea unghiului A intersectează dreapta BC în punctul D (figura 4). Aplicând Relația lui Stewart, avem:

$$AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD - BC \cdot BD \cdot CD.$$

$$\text{Cum } BD = \frac{a \cdot c}{b+c} \text{ și } CD = \frac{a \cdot b}{b+c}, \text{ obținem } AD^2 \cdot a = c^2 \cdot \frac{a \cdot b}{b+c} + b^2 \cdot \frac{a \cdot c}{b+c} - a \cdot \frac{a \cdot c}{b+c} \cdot \frac{a \cdot b}{b+c},$$

$$\text{de unde rezultă } AD^2 = \frac{c^2 \cdot b}{b+c} + \frac{b^2 \cdot c}{b+c} - \frac{a \cdot c}{b+c} \cdot \frac{a \cdot b}{b+c} = \frac{bc \cdot (b+c)}{b+c} - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2}.$$

$$\text{Dacă notăm } AD = l_a, \text{ atunci } l_a^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} [(b+c)^2 - a^2].$$

Teorema 1. Fie ABC un triunghi cu $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Bisectoarea unghiului A intersectează dreapta BC în punctul D. Atunci $AD^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} [(b+c)^2 - a^2]$.

EXEMPLU:

Fie ABC un triunghi cu $AB = 10$ cm, $BC = 15$ cm și $AC = 20$ cm. Dacă bisectoarea unghiului A intersectează dreapta BC în punctul D, atunci $AD^2 = \frac{20 \cdot 10}{(20+10)^2} [(20+10)^2 - 15^2]$, de unde rezultă $AD = 5\sqrt{6}$ cm.

OBSERVAȚIE.

Fie ABC un triunghi cu $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Bisectoarea unghiului B intersectează dreapta AC în punctul E și bisectoarea unghiului C intersectează dreapta AB în punctul F. Dacă $BE = l_b$ și $CF = l_c$, atunci:

$$l_b^2 = \frac{ac}{(a+c)^2} [(a+c)^2 - b^2] \text{ și } l_c^2 = \frac{ab}{(a+b)^2} [(a+b)^2 - c^2]$$

Calculul lungimilor medianelor unui triunghi

Teorema 2. Fie ABC un triunghi cu $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Dacă notăm cu m_a , m_b , m_c lungimile medianelor triunghiului corespunzătoare laturilor cu lungimile a , b , respectiv c , atunci:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}, m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}, m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

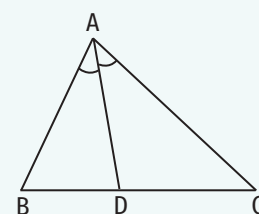


Figura 4

Demonstrație:

Fie M mijlocul laturii BC (figura 5). Atunci $BM = CM = \frac{a}{2}$.

Aplicăm teorema cosinusului în triunghiurile ABM și ACM și obținem:

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2 \cdot AM \cdot BM \cdot \cos(\angle AMB);$$

$$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2 \cdot AM \cdot CM \cdot \cos(\angle AMC).$$

Cum unghiurile AMB și AMC sunt suplementare, $\cos(\angle AMC) = -\cos(\angle AMB)$, și, prin urmare:

$$c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot m_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(\angle AMB); \quad b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot m_a \cdot \frac{a}{2} \cdot [-\cos(\angle AMB)].$$

Adunând cele două relații, obținem $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{4}$, de unde rezultă $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$.

Analog se obțin și celelalte relații.

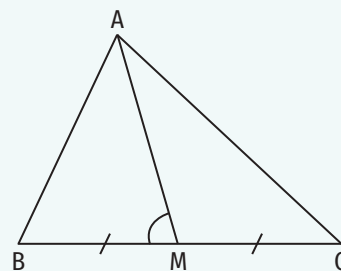


Figura 5

EXEMPLU:

Fie ABC un triunghi cu $AB = 10$ cm, $BC = 7$ cm și $AC = 9$ cm. Dacă m_a , m_b , m_c sunt lungimile medianelor triunghiului ABC corespunzătoare laturilor cu lungimile a , b , respectiv c , atunci:

$$m_a^2 = \frac{2(9^2 + 10^2) - 7^2}{4} \Rightarrow m_a^2 = \frac{313}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{313}}{2} \text{ cm};$$

$$m_b^2 = \frac{2(7^2 + 10^2) - 9^2}{4} \Rightarrow m_b^2 = \frac{217}{4} \Rightarrow m_b = \frac{\sqrt{217}}{2} \text{ cm};$$

$$m_c^2 = \frac{2(7^2 + 9^2) - 10^2}{4} \Rightarrow m_c^2 = 40 \Rightarrow m_c = 2\sqrt{10} \text{ cm}.$$

Calculul lungimilor înălțimilor într-un triunghi

Fie ABC un triunghi cu $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Atunci aria triunghiului ABC este $S = \frac{h_a \cdot a}{2} = \frac{h_b \cdot b}{2} = \frac{h_c \cdot c}{2}$, unde h_a , h_b și h_c reprezintă lungimile înălțimilor triunghiului corespunzătoare laturilor BC, AC, respectiv AB.

De aici rezultă $h_a = \frac{2S}{a}$; $h_b = \frac{2S}{b}$; $h_c = \frac{2S}{c}$.

Cum $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, obținem:

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}; \quad h_b = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b}; \quad h_c = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$$

EXEMPLU:

Fie ABC un triunghi cu $AB = 13$ cm, $AC = 14$ cm, $BC = 15$ cm. Atunci:

$$p = 21 \text{ cm și } S = \sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84;$$

$$h_a = \frac{2 \cdot 84}{15} = 11,2 \text{ cm}, \quad h_b = \frac{2 \cdot 84}{14} = 12 \text{ cm}, \quad h_c = \frac{2 \cdot 84}{13} = \frac{168}{13} \text{ cm}.$$

OBSERVAȚIE.

În orice triunghi, produsul dintre lungimea unei înălțimi și lungimea laturii corespunzătoare este constant ($h_a \cdot a = h_b \cdot b = h_c \cdot c$).

ȘTIAI CĂ...?

În geometria triunghiului, se poate stabili o legătură directă între lungimile laturilor (a, b, c) și lungimile medianelor asociate (m_a, m_b, m_c), cunoscută ca **relația lui Cesaro**:

$$m_a^4 + m_b^4 + m_c^4 = \frac{9}{16} (a^4 + b^4 + c^4)$$

EXERSEAZĂ!

Fie ABC un triunghi și D un punct pe segmentul BC. Determină lungimea segmentului AD știind că:

- AB = 13 cm, AC = 15 cm, BC = 14 cm și $\frac{BD}{DC} = \frac{3}{4}$;
- AB = 13 cm, AC = 15 cm, BC = 16 cm, BD = 6 cm, DC = 10 cm;
- AB = 10 cm, AC = 17 cm, BC = 21 cm, $\frac{BD}{BC} = \frac{2}{7}$;
- AB = 8 cm, AC = 8 cm, $\angle BAC = 60^\circ$, $\frac{BD}{BC} = \frac{1}{4}$;
- AB = 12 cm, $\angle ABC = \angle BCA = 30^\circ$, $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{3}$.

Exercițiu rezolvat

Fie ABC un triunghi cu AB = c , AC = b , BC = a și m_a, m_b și m_c lungimile medianelor triunghiului corespunzătoare laturilor cu lungimile a, b , respectiv c .

a) Dacă triunghiul ABC este oarecare, demonstrează că:

$$m_a^4 + m_b^4 + m_c^4 = \frac{9}{16} (a^4 + b^4 + c^4) \text{ (Relația lui Cesaro).}$$

b) Dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A, demonstrează că:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3a^2}{2}.$$

Rezolvare:

a) Vom ridica la puterea a doua pătratul lungimilor medianelor, scrise sub forma: $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, $m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$, $m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$. Adunăm relațiile obținute și obținem:

$$\begin{aligned} m_a^4 + m_b^4 + m_c^4 &= \frac{(b^2 + c^2)^2}{4} - 2 \cdot \frac{b^2 + c^2}{2} \cdot \frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{16} + \frac{(a^2 + c^2)^2}{4} - 2 \cdot \frac{a^2 + c^2}{2} \cdot \frac{b^2}{4} + \frac{b^4}{16} + \\ &+ \frac{(a^2 + b^2)^2}{4} - 2 \cdot \frac{a^2 + b^2}{2} \cdot \frac{c^2}{4} + \frac{c^4}{16} = \frac{b^4 + 2b^2c^2 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2}{4} + \frac{a^4}{16} + \\ &+ \frac{a^4 + 2a^2c^2 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2}{4} + \frac{b^4}{16} + \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2}{4} + \frac{c^4}{16} = \\ &= \frac{2a^4 + 2b^4 + 2c^4}{4} + \frac{a^4 + b^4 + c^4}{16} = \frac{9a^4 + 9b^4 + 9c^4}{16} = \frac{9}{16} (a^4 + b^4 + c^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 &= \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} + \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} = \\ &= \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2}{4} = \frac{3a^2 + 3a^2}{4} = \frac{6a^2}{4} = \frac{3a^2}{2}. \end{aligned}$$

Aplic

- Demonstrează că, în orice triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este media proporțională între lungimea proiecției acesteia pe ipotenuză și lungimea ipotenuzei (teorema catetei).
- Demonstrează că, în orice paralelogram, suma pătratelor lungimilor diagonalelor este egală cu suma pătratelor lungimilor laturilor paralelogramului.
- Fie triunghiul ABC cu AB = c , AC = b , BC = a , bisectoarea unghiului A intersectează dreapta BC în punctul D. Demonstrează că $AD = \frac{2bc}{b+c} \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$.
- Se consideră triunghiul MNP cu MN = 10,5 cm, NP = 9 cm și MP = 6 cm. Bisectoarea unghiului P intersectează dreapta MN în punctul Q. Calculează lungimea segmentului PQ și lungimea medianei din P a triunghiului MNP.
- Se consideră paralelogramul ABCD cu AB = $3\sqrt{2}$ cm și BC = $4\sqrt{2}$ cm.
 - Calculează perimetrul și aria paralelogramului ABCD, știind că unghiul B are măsura egală cu $\frac{\pi}{3}$.
 - Bisectoarea unghiului BAD intersectează dreapta BD în punctul E. Calculează lungimea segmentului AE, știind că unghiul ABD este drept.
 - Calculează lungimile diagonalelor paralelogramului ABCD, știind că perimetrul triunghiului ADC este egal cu $13\sqrt{2}$ cm.

6. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu baza $BC = 8$ cm și lungimea înălțimii corespunzătoare laturii BC egală cu 3 cm.
- Rezolvă triunghiul ABC.
 - Calculează perimetrul și aria triunghiului ABC.
 - Bisectoarea unghiului C intersectează dreapta AB în punctul D. Calculează lungimea segmentului CD și lungimea medianei din C a triunghiului ABC.
7. Se consideră dreptunghiul ABCD cu $AB = 12$ cm și $BD = 13$ cm. Bisectoarea unghiului ABC intersectează dreapta AC în punctul M. Determină lungimea segmentului BM.
8. Se consideră triunghiul echilateral ABC cu $AB = 12$ cm. Pe laturile acestuia se consideră punctele $D \in BC$, $E \in AC$ și $F \in AB$ astfel încât $BD = CE = AF = 8$ cm. Pe laturile triunghiului DEF se consideră punctele $M \in DE$, $N \in EF$ și $P \in FD$ astfel încât $\frac{DM}{ME} = \frac{EN}{NF} = \frac{FP}{PD} = 2$. Bisectoarea unghiului ABC intersectează dreapta AC în punctul B', bisectoarea unghiului DEF intersectează dreapta DF în punctul E', iar bisectoarea unghiului MNP intersectează dreapta MP în punctul N'.
- Determină perimetrul și aria triunghiului MNP.
 - Determină lungimile segmentelor BB', EE' și NN'.
 - Calculează valoarea expresiei $E = x^2 + y^2$, unde $BB' = x \cdot EE' = y \cdot NN'$.
9. Se consideră un patrulater convex ABCD. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AC și BD.
- Demonstrează că $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$.
 - Demonstrează că patrulaterul ABCD este paralelogram dacă și numai dacă $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$.
10. Se consideră triunghiul ABC. Bisectoarea unghiului B intersectează dreapta AC în punctul D. Demonstrează că $BD \leq \frac{AB + BC}{2}$.
11. Punctul G este centrul de greutate al triunghiului ABC cu $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Demonstrează că, dacă $BG \perp CG$, atunci $b^2 + c^2 = 5a^2$.

EXERSEAZĂ!

Construiește triunghiul ABC știind că:

- $AB = 7$ cm, $AC = 9$ cm, $m_a = 7$ cm;
- $AB = 8$ cm, $AC = 9$ cm, $m_a = 6,5$ cm;
- $AB = 13$ cm, $AC = 15$ cm, $BC < AB$ și $\cos C = \frac{3}{5}$;
- $AB = 13$ cm, $AC = 15$ cm, $AB < BC$ și $\cos C = \frac{3}{5}$.

Portofoliu

Se consideră triunghiul ABC și D punctul de intersecție dintre bisectoarea unghiului A și dreapta BC.

- Demonstrează că $\frac{A_{ABD}}{A_{ACD}} = \frac{AB}{AC}$.
- Demonstrează că $\frac{A_{ABD}}{A_{ACD}} = \frac{BD}{CD}$.
- Demonstrează că $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.



4. Concurență și coliniaritate în geometria plană: teorema lui Menelaus, teorema lui Ceva

Descopăr



- Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M și N astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$ și $\frac{CN}{NA} = \frac{3}{4}$. Dreapta MN intersectează dreapta BC în punctul P.
 - Determină raportul $\frac{BP}{PC}$.
 - Calculează $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{NA}$.
- Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M și N astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$ și $\frac{CN}{NA} = \frac{3}{4}$. Segmentele BN și CM se intersectează în punctul D și $AD \cap BC = \{P\}$.
 - Determină raportul $\frac{BP}{PC}$.
 - Calculează $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{NA}$.

Învăț



Teorema lui Menelaus: Fie un triunghi ABC și trei puncte $D \in BC$, $E \in AC$ și $F \in AB$, diferite de vârfurile triunghiului. Dacă punctele D, E și F sunt coliniare, atunci $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$.

Demonstrație:

Există două situații posibile:

- două dintre punctele D, E, F se află pe laturile triunghiului ABC, iar al treilea se află pe prelungirea celei de-a treia laturi (figura 1);
- toate cele trei puncte D, E, F se află pe prelungirile laturilor triunghiului ABC (figura 2).

Ne ocupăm în continuare de prima situație. Presupunem că punctele E și F aparțin segmentelor AC, respectiv AB, iar punctul D se află pe prelungirea segmentului BC. Construim paralela prin punctul C la dreapta AB. Fie P punctul de intersecție dintre aceasta și dreapta EF. Cum $CP \parallel BF$, conform teoremei fundamentale a asemănării, avem $\triangle DPC \sim \triangle DFB$, de unde rezultă $\frac{DC}{BD} = \frac{DP}{DF} = \frac{CP}{FB}$ și, de aici, $CP = \frac{FB \cdot DC}{BD}$. (1)

Aplicând tot teorema fundamentală a asemănării, rezultă că $\triangle EPC \sim \triangle EFA$, deci $\frac{CE}{EA} = \frac{CP}{AF} = \frac{EP}{EF}$ și, de aici, $CP = \frac{AF \cdot CE}{EA}$. (2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă $\frac{FB \cdot DC}{BD} = \frac{AF \cdot CE}{EA}$, ceea ce este echivalent cu $\frac{AF \cdot CE}{EA} \cdot \frac{BD}{FB \cdot DC} = 1$, adică $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$.

Cazul în care toate cele trei puncte D, E, F se află pe prelungirile laturilor triunghiului ABC se tratează analog.

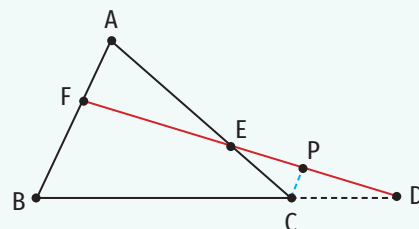


Figura 1

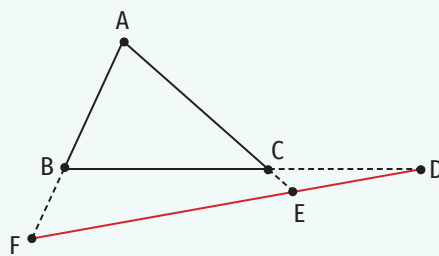


Figura 2

Reciproca Teoremei lui Menelaus. Fie triunghiul ABC și trei puncte $D \in BC$, $E \in AC$ și $F \in AB$, diferite de vârfurile triunghiului, astfel încât două din aceste puncte sunt situate pe laturile triunghiului, iar cel de-al treilea pe prelungirea celei de-a treia laturi sau toate cele trei puncte sunt situate pe prelungirile laturilor triunghiurilor. Dacă $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$, atunci punctele D , E și F sunt coliniare.

Demonstrație:

Presupunem că punctul D nu aparține segmentului BC , iar punctele E și F aparțin segmentelor AC și, respectiv, AB (figura 3). Dacă $EF \parallel BC$, atunci, conform teoremei lui Thales, $\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC}$, de unde rezultă că $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{EC}{AE} = 1$. Cum $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$, rezultă că $\frac{BD}{DC} = 1$, ceea ce este imposibil (deoarece punctele B , C și D sunt coliniare și punctul D nu aparține segmentului BC). Așadar, dreptele EF și BC sunt concurente. Fie D' punctul de intersecție a dreptelor EF și BC . Punctul D' nu aparține segmentului BC , deoarece o dreaptă nu poate intersecta toate laturile unui triunghi.

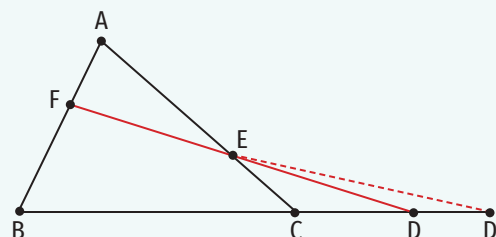


Figura 3

Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul ABC pentru punctele coliniare F , E și D' și obținem $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$. Cum $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$, rezultă că $\frac{BD'}{D'C} = \frac{BD}{DC}$, și de aici $\frac{BD'}{BC} = \frac{BD}{BC}$, ceea ce implică $D = D'$. Am demonstrat astfel că punctele D , E și F sunt coliniare.

Teorema lui Ceva. Fie un triunghi ABC și trei puncte $D \in BC$, $E \in AC$ și $F \in AB$, diferite de vârfurile triunghiului. Dacă dreptele AD , BE și CF sunt concurente, atunci $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$.

Demonstrație:

Există două situații posibile:

- toate cele trei puncte D , E , F se află pe laturile triunghiului ABC (figura 4).
- două dintre punctele D , E , F se află pe prelungirile laturilor triunghiului ABC , iar al treilea se află pe cea de-a treia latură a triunghiului (figura 5);

Ne ocupăm în continuare de prima situație. Presupunem că punctele D , E și F aparțin segmentelor BC , AC , respectiv AB .

Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul ABD , pentru punctele coliniare F , M și C și obținem $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{DM}{MA} = 1$. (3)

Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul ADC , pentru punctele coliniare B , M și E , și obținem $\frac{AM}{MD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$. (4)

Din relațiile (3) și (4) obținem $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$.

Cazul în care două dintre punctele D , E , F se află pe prelungirile laturilor triunghiului ABC , iar al treilea se află pe cea de-a treia latură a triunghiului, se tratează analog.

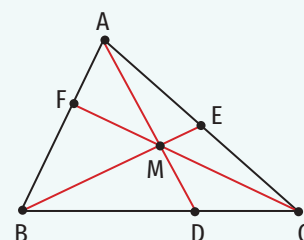


Figura 4

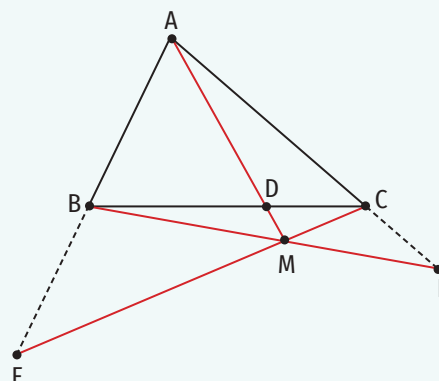


Figura 5

Reciproca teoremei lui Ceva. Fie un triunghi ABC și trei puncte $D \in BC$, $E \in AC$ și $F \in AB$, diferite de vârfurile triunghiului. Dacă $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$, atunci dreptele AD , BE și CF sunt concurente.

Demonstrație:

Fie $BE \cap CF = \{M\}$ și $AM \cap BC = \{D'\}$ (figura 6).

Conform teoremei lui Ceva, pentru dreptele concurente AD' , BE și CF ,

avem $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$. Cum $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$, obținem $\frac{BD'}{D'C} = \frac{BD}{DC}$.

$$\frac{BD'}{D'C} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BD'}{BD' + D'C} = \frac{BD}{BD + DC} \Rightarrow \frac{BD'}{BC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow BD' = BD \Rightarrow D' = D$$

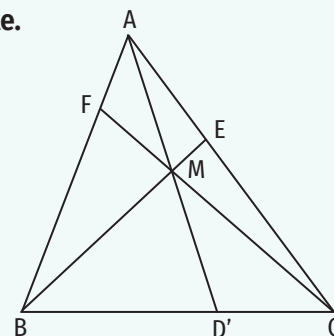


Figura 6

Aplicații ale teoremei lui Ceva

Teorema 1. Dreptele suport ale bisectoarelor interioare ale unghiurilor unui triunghi sunt concurente.

Demonstrație:

Fie triunghiul ABC și AD , BE și CF bisectoarele interioare ale unghiurilor triunghiului ABC , $D \in BC$, $E \in AC$ și $F \in AB$ (figura 7).

Aplicând teorema bisectoarei, obținem:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} \\ \frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} \\ \frac{BF}{FA} = \frac{BC}{AC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{BC}{AC} = 1 \xrightarrow{\text{(reciproca teoremei lui Ceva)}}$$

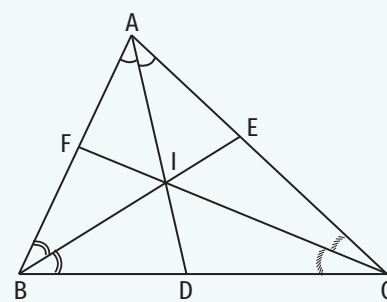


Figura 7

$\Rightarrow$ Dreptele AD , BE și CF sunt concurente.

Teorema 2. Dreptele suport ale medianelor unui triunghi sunt concurente.

Demonstrație:

Fie triunghiul ABC și AM , BN și CP medianele triunghiului ABC (figura 8). Atunci, $AN \equiv NC$, $BM \equiv MC$ și $AP \equiv PB$.

În acest caz, $\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CM}{MB} \cdot \frac{BP}{PA} = \frac{AN}{AN} \cdot \frac{CM}{CM} \cdot \frac{BP}{BP} = 1$ și, conform reciprocei teoremei lui Ceva, dreptele AM , BN și CP sunt concurente.

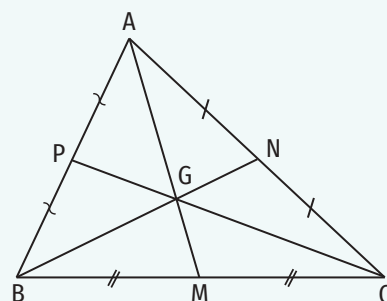


Figura 8

Teorema 3. Dreptele suport ale înălțimilor unui triunghi sunt concurente.

Demonstrație:

Fie triunghiul ascuțitunghic ABC și AA' , BB' , CC' înălțimile sale (figura 9).

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABA' \sim \triangle CBC' \Rightarrow \frac{BA'}{BC'} = \frac{AB}{BC} \\ \triangle BB'C \sim \triangle AA'C \Rightarrow \frac{CB'}{A'C} = \frac{BC}{AC} \\ \triangle CC'A \sim \triangle BB'A \Rightarrow \frac{AC'}{B'A} = \frac{CA}{BA} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{BA'}{BC'} \cdot \frac{CB'}{A'C} \cdot \frac{AC'}{B'A} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{CA}{BA} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1 \xrightarrow{\text{(reciproca teoremei lui Ceva)}} \text{Dreptele } AA', BB' \text{ și } CC' \text{ sunt concurente.}$$

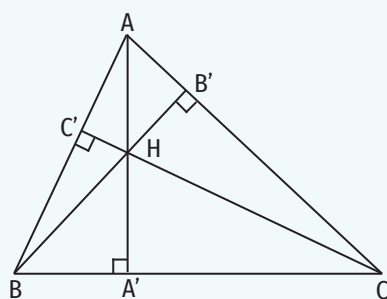


Figura 9

Cazul în care triunghiul ABC este obtuzunghic se tratează analog.

Dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A , atunci dreptele suport ale înălțimilor triunghiului ABC sunt concurente în A .

Exerciții rezolvate

1. Se consideră triunghiul ABC. Punctul M este mijlocul segmentului BC, iar punctul N este punctul de intersecție dintre bisectoarea unghiului B și segmentul AC. Determină raportul $\frac{BP}{PN}$ în funcție de lungimile laturilor triunghiului ABC.

Rezolvare:

În figura 10 este reprezentat triunghiul ABC cu $AB = c$, $BC = a$ și $CA = b$.

Aplicăm teorema lui Menelaus pentru triunghiul BNC și punctele coliniare M, P, A și obținem $\frac{BP}{PN} \cdot \frac{NA}{AC} \cdot \frac{CM}{MB} = 1$. (5)

Semidreapta BN este bisectoarea unghiului ABC, de unde rezultă, conform teoremei bisectoarei, $\frac{AN}{NC} = \frac{c}{a}$.

Folosind proporții derivate obținem $\frac{AN}{AC} = \frac{c}{a+c}$. (6)

Punctul M este mijlocul segmentului BC, de unde rezultă că $BM \equiv MC$, deci $\frac{CM}{MB} = 1$. (7)

Din relațiile (5), (6) și (7) rezultă $\frac{BP}{PN} = \frac{a+c}{c}$.

2. Se consideră triunghiul ABC. Punctul D este mijlocul segmentului AC, punctul E este mijlocul segmentului BD, punctul F aparține segmentului BC astfel încât $\frac{BF}{BC} = \frac{1}{3}$, punctul G aparține segmentului AB astfel încât $AG = 2GB$.

- a) Demonstrează că punctele A, E și F sunt coliniare.
b) Demonstrează că dreptele AF, BD și CG sunt concurente.

Rezolvare:

- a) În figura 11 este reprezentat triunghiul ABC.

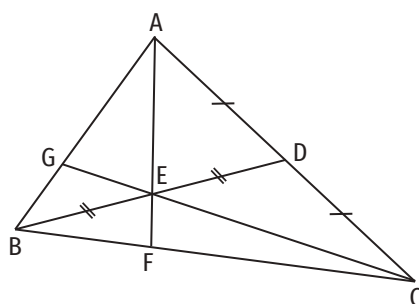


Figura 11

$\frac{BF}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BF}{FC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CA}{AD} \cdot \frac{DE}{EB} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow$ Punctele A, E și F sunt coliniare conform reciprocei teoremei lui Menelaus.

b) $\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CD}{DA} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 \Rightarrow$ Dreptele AF, BD și CG sunt concurente conform reciprocei teoremei lui Ceva.

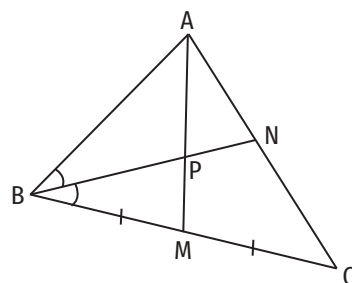


Figura 10



Aplic

- Se consideră triunghiul ABC. Punctele M și N aparțin segmentelor AB, respectiv AC, astfel încât $\frac{AM}{MB} = 2$ și $\frac{AN}{CN} = \frac{1}{3}$. Dreptele MN și BC se intersectează în punctul F. Determină raportul $\frac{BF}{FC}$.
- Se consideră triunghiul MNP. Punctele B și C aparțin segmentelor MN, respectiv NP, astfel încât $\frac{BM}{MN} = \frac{2}{5}$ și $\frac{CP}{CN} = \frac{3}{4}$. Dreptele MP și BC se intersectează în punctul A. Determină raportul $\frac{AB}{AC}$.
- Se consideră triunghiul ABC. Punctele D și F aparțin segmentelor AB, respectiv AC, iar punctul E aparține dreptei BC astfel încât punctul B aparține segmentului EC și $\frac{DB}{AD} = \frac{1}{2}$, $\frac{BE}{EC} = \frac{1}{6}$, $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{4}$. Demonstrează că punctele D, E și F sunt coliniare.
- Se consideră triunghiul ABC. Punctele M și N aparțin segmentelor AB, respectiv AC, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{2}$ și $\frac{AN}{CN} = \frac{4}{5}$. Dreptele BN și CM se intersectează în punctul Q, iar dreptele AQ și BC se intersectează în punctul P. Determină raportul $\frac{BP}{PC}$.
- Se consideră triunghiul ABC. Punctele D, E și F aparțin segmentelor AB, BC, respectiv AC, astfel încât $\frac{DB}{AB} = \frac{1}{3}$, $\frac{BE}{EC} = \frac{1}{6}$ și $\frac{AF}{FC} = \frac{1}{3}$. Demonstrează că dreptele AE, BF și CD sunt concurente.
- Se consideră triunghiul ABC. Punctele M și N aparțin segmentelor AC, respectiv BC, astfel încât $\frac{CM}{AM} = \frac{1}{3}$ și $\frac{CB}{CN} = \frac{5}{2}$. Punctul D este mijlocul segmentului AB și $CD \cap MN = \{P\}$. Determină raportul $\frac{CP}{CD}$.
- Fie ABCD un patrulater convex care nu e trapez sau paralelogram și $AB \cap CD = \{M\}$, $AD \cap BC = \{N\}$. Demonstrează că $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{MC}{MD} = \frac{NA}{NB} \cdot \frac{NC}{ND}$.
- Demonstrați că punctul de intersecție a laturilor neparalele, punctul de intersecție a diagonalelor și mijloacele bazelor unui trapez sunt coliniare.
- Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M și N astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NA}$. Demonstrează că mijloacele segmentelor AB, AC și MN sunt puncte coliniare.
- Cercul înscris în triunghiul ABC intersectează segmentele BC, CA și AB în punctele D, E și, respectiv, F. Demonstrează că dreptele AD, BE și CF sunt concurente (punctul lor de intersecție se numește *punctul lui Gergonne*).
- Se consideră triunghiul ABC. Bisectoarea unghiului A intersectează dreapta BC în punctul D. Pe segmentul AD se consideră punctul M astfel încât $AM = 2MD$. Determină raportul $\frac{NA}{NC}$ în funcție de lungimile laturilor triunghiului ABC, unde $BM \cap AC = \{N\}$.
- Pe latura BC a triunghiului ABC se consideră un punct D. Bisectoarele unghiurilor ADB și ADC intersectează segmentele AB și, respectiv, AC, în punctele M și N. Demonstrează că dreptele AD, CM și BN sunt concurente.

13. Se consideră un patrulater convex $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$. O dreaptă care conține punctul O intersectează dreptele AB și CD în punctele M , respectiv N . Demonstrează că produsul $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC}$ este constant.
14. Se consideră triunghiul ABC . Punctul D aparține segmentului BC astfel încât $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{5}$, punctele E și F aparțin segmentului AB astfel încât $BE = 2EF = FA$ și $CE \cap AD = \{M\}$, $CF \cap AD = \{N\}$. Determină rapoartele $\frac{DM}{AM}$ și $\frac{AN}{MN}$.
15. Fie $ABCD$ un patrulater convex și punctele coliniare M, N, P și Q care aparțin dreptelor AB, BC, CD , respectiv AD . Demonstrează că $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1$.
16. În interiorul triunghiului ABC se consideră un punct M . Bisectoarele unghiurilor BMC, AMC și AMB intersectează segmentele BC, AC și, respectiv, AB , în punctele D, E și F . Demonstrează că dreptele AD, BE și CF sunt concurente.
17. Se consideră triunghiul ABC și punctele $A' \in BC, B' \in AC$ și $C' \in AB$, diferite de vârfurile triunghiului, astfel încât dreptele AA', BB' și CC' sunt concurente într-un punct P . Demonstrează că $\frac{B'A}{B'C} + \frac{C'A}{C'B} = \frac{PA}{PA'}$ (relația lui Van Aubel).
18. Se consideră triunghiul ABC , G centrul său de greutate și M un punct oarecare din planul triunghiului.
- a) Demonstrează că $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{3} + 3MG^2$ (teorema lui Leibniz).
- b) Demonstrează că $OG^2 = R^2 - \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{9}$, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC .
19. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = c, AC = b, BC = a$ și R raza cercului circumscris triunghiului. Demonstrează că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă $a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2$.



Exerciții recapitative

1. Fie ABC un triunghi cu $AB = AC = 5\sqrt{2}$ cm și $BC = 4\sqrt{2}$ cm.

Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a) Perimetrul triunghiului ABC este egal cu ____ cm.

b) $\cos A =$ ____.

c) Aria triunghiului ABC este egală cu ____ cm^2 .

d) $\sin \frac{A}{2} =$ ____, $\cos \frac{A}{2} =$ ____, $\tan \frac{A}{2} =$ ____.

e) Lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC este egală cu ____ cm, iar lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu ____ cm.

2. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile următoare. Este corectă o singură variantă de răspuns.

A. Fie ABC un triunghi și $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$ trei puncte coliniare astfel încât $\frac{BD}{CD} = 1,5$ și $\frac{AF}{BF} = 4, (3)$.

Raportul $\frac{EC}{EA}$ este egal cu raportul:

a) $\frac{20}{13}$; b) $\frac{13}{9}$; c) $\frac{2}{13}$; d) $\frac{200}{13}$.

B. Fie ABC un triunghi. Punctele D, E și F aparțin segmentelor BC, AC, respectiv AC, astfel încât dreptele AD, BE și CF sunt concurente, $AF = \frac{1}{5}AB$ și $AE = \frac{2}{5}EC$. Raportul $\frac{BD}{DC}$ este egal cu raportul:

a) $\frac{8}{15}$; b) $\frac{7}{18}$; c) $\frac{80}{7}$; d) $\frac{8}{5}$.

3. a) Calculează latura AB a triunghiului ABC știind că $BC = 10$ cm, $AC = 10$ cm și $C = \frac{\pi}{6}$.

b) Calculează latura AB a triunghiului ABC știind că $AC = 15\sqrt{3}$ cm, $B = \frac{\pi}{4}$ și $C = \frac{\pi}{6}$.

c) Calculează perimetrul triunghiului isoscel ABC cu baza $BC = 16\sqrt{2}$ cm și $B = \frac{\pi}{6}$.

d) Calculează aria triunghiului ABC știind că $AB = 5\sqrt{5}$ cm, $BC = 7\sqrt{5}$ cm și $B = \frac{\pi}{4}$.

e) Calculează aria triunghiului echilateral ABC cu $AC = 2,4$ cm.

f) Calculează aria unui triunghi dreptunghic care are o catetă cu lungimea egală cu $6\sqrt{2}$ cm și lungimea ipotenuzei egală cu $10\sqrt{2}$ cm.

4. Rezolvă triunghiul ABC cu $AC = 24$ cm, $A = \frac{\pi}{4}$ și $B = \frac{\pi}{3}$.

5. Rezolvă triunghiul MNP cu $MN = 24$ cm, $NP = 15$ cm și $N = \frac{\pi}{3}$.

6. Determină măsura unghiului B al triunghiului ABC știind că lungimile segmentelor AB, BC și AC sunt direct proporționale cu 3, 5, respectiv 4, iar perimetrul triunghiului ABC este egal cu 108 cm.

7. Se consideră un triunghi isoscel cu lungimile laturilor egale cu 10 și, respectiv, 8 cm. Determină lungimile razei cercului înscris și razei cercului circumscris triunghiului.

8. Lungimile laturilor triunghiului ABC, exprimate în cm, sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice cu rația egală cu 2 cm, iar media aritmetică a lungimilor celor mai mici două laturi ale triunghiului este egală cu 19 cm.

a) Determină perimetrul triunghiului ABC.

b) Determină măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

c) Determină lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.

9. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, cu ipotenuza $BC = 20$ cm și $AB = 16$ cm. Punctul M aparține segmentului BC astfel încât $\frac{MC}{BC} = \frac{1}{10}$.
- Determină lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC.
 - Determină lungimea segmentului AM.
 - Determină lungimea mediane și înălțimii corespunzătoare laturii BC.
10. Se consideră dreptunghiul ABCD cu $AC \cap BD = \{O\}$ și $AD = AO = 6$ cm. Determină:
- cosinusul unghiului AOB;
 - perimetrul și aria dreptunghiului ABCD;
 - lungimea segmentului AM, unde M este punctul de intersecție dintre dreapta BD și bisectoarea unghiului DAB;
 - lungimea mediane BN a triunghiului BCD.
11. Se consideră paralelogramul ABCD cu $AC \cap BD = \{O\}$, $AO = 6$ cm, $BO = 4$ cm și $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$.
- Determină perimetrul paralelogramului ABCD.
 - Ce procent din aria triunghiului BCD reprezintă aria triunghiului AOD?
12. Fie ABC un triunghi. Punctul N aparține segmentului BC astfel încât $BN = 3NC$. Paralela prin N la AC intersectează dreapta AB în punctul P și $CP \cap AN = \{P\}$. Determină $\frac{NP}{AN}$.
13. Pe laturile BC, AC și AB ale triunghiului ABC se consideră punctele D, E, respectiv F, astfel încât $BD = \frac{1}{3}BC$, $CE = 3AE$ și $3AF = 2FB$. Dreptele EF și BC se intersectează în punctul M.
- Demonstrează că dreptele AD, BE și CF sunt concurente.
 - Calculează $\frac{IB}{BE}$, unde I este punctul de intersecție a dreptelor AD, BE și CF.
 - Demonstrează că punctul B e mijlocul segmentului CM.
14. Pe latura AC a triunghiului ABC se consideră punctul E astfel încât $2AE = EC$. Punctul D este simetricul punctului A față de punctul B, punctul H aparține segmentului BE astfel încât $4HB = 3HE$, iar dreptele BC și DE se intersectează în punctul F. Demonstrează că punctele A, H și F sunt coliniare.
15. Fie ABC un triunghi cu $AB = c$, $BC = a$ și $AC = b$ și aria S.
- Demonstrează că $\operatorname{tg} A = \frac{4S}{b^2 + c^2 - a^2}$.
 - Demonstrează că $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$.
16. Un alpinist pleacă de la o cabană aflată în punctul A către o cabană aflată la baza unui munte, în punctul B, parcurgând distanța AB în plan orizontal. El dorește să ajungă în vârful muntelui, punctul V (figura 2). Alpinistul știe că distanța în linie dreaptă de la A la V este egală cu 2 km, însă vrea să afle câte opriri va face până în vârf și în cât timp ajunge acolo. Pentru calculele sale, alpinistul notează cu C punctul aflat la baza muntelui, situat exact sub vârful V, la același nivel cu cabana. Punctul C se află la o altitudine de 300 m față de nivelul mării. Din măsurătorile lui, unghiul sub care se vede vârful V din punctul A are măsura egală cu 30° , iar din punctul B vârful muntelui se vede sub un unghi cu măsura egală cu 45° .
- Determină altitudinea vârfului V al muntelui.
 - Calculează distanța pe care trebuie să o parcurgă alpinistul dacă pornește din punctul A, trece prin punctul B și urcă apoi până în vârful V al muntelui.
 - Pe porțiunea orizontală AB, alpinistul se deplasează cu 5 km/oră, iar pe porțiunea înclinată BV, el merge cu 3 km/oră. Estimează în cât timp ajunge alpinistul în vârful muntelui.

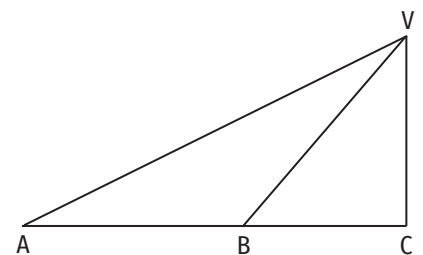


Figura 2

Timp de lucru: 45 de minute

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I

30 de puncte

30 de puncte

1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.

(10 p.)

A. Fie MNP un triunghi cu $MN = 3$ cm, $NP = MN + 2$ cm și $N = \frac{\pi}{3}$. Aria triunghiului este egală cu:

- a) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ cm²; b) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ cm²; c) $15\sqrt{3}$ cm²; d) $\frac{15}{2}$ cm².

(10 p.)

B. Fie ABC un triunghi echilateral cu perimetrul egal cu 43,8 cm. Bisectoarea unghiului A intersectează dreapta BC în punctul M. Lungimea segmentului AM este egală cu:

- a) 14 cm; b) $14,6\sqrt{3}$ cm; c) $7,3\sqrt{3}$ cm; d) 15 cm.

(10 p.)

C. Lungimea razei cercului înscris în triunghiul isoscel ABC cu baza $BC = 4\sqrt{3}$ cm și $AB = 3\sqrt{3}$ cm este egală cu:

- a) $\frac{2\sqrt{15}}{5}$ cm; b) $\frac{21\sqrt{15}}{2}$ cm; c) 4 cm; d) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ cm.

Subiectul al II-lea

60 de puncte

Scrie rezolvările complete.

60 de puncte

(10 p.)

1. Lungimile laturilor unui triunghi, exprimate în cm, sunt invers proporționale cu $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ și, respectiv, $\frac{1}{4}$, iar perimetrul triunghiului este egal cu 18 cm. Determină lungimea medianei triunghiului care conține vârful triunghiului corespunzător unghiului cu cea mai mare măsură.

(10 p.)

2. Fie triunghiul DEF și punctele $A \in DE$, $B \in EF$ și $C \in DF$ astfel încât $AD = \frac{2}{3} AE$, $\frac{CD}{FC} = \frac{7}{750}$, iar lungimea segmentului BE reprezintă 1,4% din lungimea segmentului BF. Demonstrează că dreptele DB, EC și FA sunt concurente.

(10 p.)

3. Fie triunghiul ABC cu $AB = 3$ cm, $BC = 2AB$ și $AC = 1,5AB$.

(10 p.)

a) Demonstrează că triunghiul ABC este obtuzunghic.

(10 p.)

b) Calculează lungimea înălțimii din A a triunghiului ABC.

(10 p.)

c) Determină $\sin C$.

4. Demonstrează că triunghiul în care este adevărată relația $\sqrt{p(p-a)} + \sqrt{(p-b)(p-c)} = \sqrt{2bc}$ este triunghi dreptunghic.

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din această unitate.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	5 foarte bine	4 bine	3 mediu	2 slab	1 foarte slab
Mi-a fost ușor să rezolv exercițiile.					
Am înțeles criteriile de rezolvare.					
Mi-am amintit conținuturile învățate.					

1. Se consideră predicatul $p(x)$: „ $x^2 - 4 \leq 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$.
 - a) Precizează dacă propoziția $p(1)$ este adevărată.
 - b) Determină mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$.
 - c) Scrie propozițiile $\neg p(2)$, $p(-2) \wedge p(3)$, $p(4) \vee p(0)$, $p(-2) \rightarrow p(5)$, $p(6) \leftrightarrow p(7)$ și precizează valoarea lor de adevăr.
 - d) Scrie negațiile propozițiilor $(\forall x) p(x)$ și $(\exists x) p(x)$.
2. Demonstrează că $\sqrt{5}$ este număr irațional.
3. Demonstrează că:
 - a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$, pentru orice număr natural nenul n ;
 - b) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \dots + n(n+3) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$, pentru orice număr natural nenul n ;
 - c) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n+1}{3n+4}$, pentru orice număr natural n ;
 - d) $\sqrt{1 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 3} + \sqrt{3 \cdot 4} + \dots + \sqrt{n \cdot (n+1)} < n(n+1)$, pentru orice număr natural nenul n ;
 - e) $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} \leq n$, pentru orice număr natural nenul n .
4. Demonstrează că:
 - a) $5^n > n^2$, pentru orice număr natural nenul n ;
 - b) $2^n > 2n + 3$, pentru orice număr natural n , $n \geq 4$;
5. Demonstrează că:
 - a) $7^{2n+1} + 1 : 8$, pentru orice număr natural n ;
 - b) $3^{2n+1} + 2^{n+2} : 7$, pentru orice număr natural nenul n ;
 - c) $4^n + 15n - 1 : 9$, pentru orice număr natural nenul n .
6. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $a_5 = -8$ și $a_9 = 0$.
 - a) Determină rația progresiei aritmetice $(a_n)_n$ și termenii a_1 , a_4 și a_{2027} .
 - b) Verifică dacă numărul 204 este termen al progresiei aritmetice $(a_n)_n$.
 - c) Calculează suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$.
7. Fie $(a_n)_n$ o progresie aritmetică cu termeni pozitivi cu rația $r = 2$ și $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_9 a_{10}} = \frac{9}{40}$.
Determină primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_n$.
8. Determină primul termen și rația progresiei aritmetice $(a_n)_n$ cu $a_2 + a_5 = 18$ și $a_1 a_4 = 40$.
9. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:
 - a) $52 + 45 + 38 + 31 + \dots + x = 135$;
 - b) $(x + 20) + (x + 17) + (x + 14) + (x + 11) + \dots + 5 = 75$;
 - c) $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5 = 0$.
10. Fie progresia geometrică cu termeni pozitivi $(b_n)_n$ cu $b_3 = 6$ și $b_5 = 54$.
 - a) Determină rația progresiei geometrice $(b_n)_n$ și termenii b_2 , b_4 și b_6 .
 - b) Verifică dacă numărul real $2 \cdot 3^{10}$ este termen al progresiei geometrice $(b_n)_n$.
 - c) Calculează suma primilor 10 termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_n$.
11. Se consideră numerele reale $a = x - 3$, $b = x + 1$, $c = 4x - 2$, unde x este număr real.
 - a) Determină numărul real x pentru care a , b și c sunt în progresie aritmetică.
 - b) Determină numărul real x pentru care a , b și c sunt în progresie geometrică.

12. Calculează:

a) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + 100 \cdot 3^{100}$;

b) $\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left((\sqrt{3})^2 + \frac{1}{(\sqrt{3})^2}\right)^2 + \left((\sqrt{3})^3 + \frac{1}{(\sqrt{3})^3}\right)^2 + \dots + \left((\sqrt{3})^n + \frac{1}{(\sqrt{3})^n}\right)^2$;

c) $5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{555\dots5}_{\text{de } 2027 \text{ de ori } 5}$.

13. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$.

a) Determină partea întreagă și partea fracționară ale numărului real $a = f(\sqrt{2})$.

b) Determină coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele de coordonate Ox și Oy .

c) Care este ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f care are abscisa egală cu -1 ?

d) Verifică dacă punctul $A(-2, 7)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .

e) Determină valorile numărului real a pentru care punctul $B(a + 2, -1)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .

f) Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentările grafice ale funcțiilor f și g , unde $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -2x + 6$.

g) Determină coordonatele vârfului parabolei și precizează dacă acesta este un punct de minim sau de maxim al reprezentării grafice a funcției f .

h) Precizează monotonia funcției f .

i) Determină mulțimea valorilor funcției f .

j) Determină $f((-\infty, -1))$ și $f([-3, 4])$.

k) Determină valorile numărului real a pentru care $f(a) = 3$.

l) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) + 6 \geq 2x$.

m) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $|f(x) - x^2| + |2x - 5| = 8$.

n) Determină partea fracționară a numărului real $\sqrt[n]{f(n)}$, unde n este număr natural, $n \geq 3$.

14. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq -5 \\ 2x + 8, & x > -5 \end{cases}$.

a) Calculează $f(-1) + f(7)$.

b) Verifică dacă punctul $A(2, 5)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .

c) Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și axele de coordonate Ox și Oy .

d) Determină $f((-\infty, -6))$ și $f([-3, 7])$.

e) Demonstrează că funcția f este funcție inversabilă și determină inversa sa.

f) Determină funcția $f \circ f$.

15. Arată că $\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}\right)^2$ este număr rațional.

16. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile și inecuațiile următoare:

a) $\sqrt{3x + 1} = 4$;

d) $\sqrt[3]{-2x + 1} = -3$;

g) $\sqrt{2 - 3x} < 5$;

b) $\sqrt{3x - 2} + 1 = 2x$;

e) $\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x - 6} = 3$;

h) $\sqrt{x - 2} \leq x - 4$;

c) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x - 1} = 4$;

f) $\sqrt[3]{2x + 6} + \sqrt{x} = 3$;

i) $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 1} > 5$.

17. Calculează:

a) $\sin 120^\circ \cdot \cos 135^\circ - \cos 120^\circ \cdot \sin 150^\circ$;

e) $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} - \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{8}}$;

b) $\left(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sin \frac{3\pi}{4}}\right)^2$;

f) $\sin \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{7\pi}{6}$;

c) $\left(3\sin \frac{\pi}{5} - 2\cos \frac{\pi}{5}\right)^2 + \left(3\cos \frac{\pi}{5} + 2\sin \frac{\pi}{5}\right)^2$;

g) $\operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{3} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{6}$.

d) $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} \left(\cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{6}\right) - \cos \frac{\pi}{2}$;

18. Determină $\cos(x + y)$, știind că $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $y \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, $\sin x = \frac{4}{5}$ și $\cos y = \frac{3}{5}$.

19. Determină $\operatorname{tg}(x - y)$, știind că $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$ și $\operatorname{tg} 2y = -\frac{4}{3}$.

20. Determină semnul numărului real a .

a) $a = \cos \frac{7\pi}{5}$;

c) $a = \operatorname{tg} \frac{19\pi}{10}$;

e) $a = \sin 1$;

b) $a = \sin \frac{2\pi}{7}$;

d) $a = \cos 2$;

f) $a = \operatorname{tg} 5$.

21. Compară numerele reale a și b :

a) $a = \sin 1$ și $b = \cos 2$;

b) $a = \sin 5$ și $b = \cos 5$;

c) $a = \sin 2$ și $b = \cos 1$.

22. Calculează:

a) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

d) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) \cdot \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

g) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right)$;

b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

e) $\sin\left(2\arccos \frac{1}{5}\right)$;

h) $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$;

c) $\cos\left(\arcsin \frac{1}{2}\right) + \sin(\operatorname{arctg} 1)$;

f) $\cos\left(\arcsin \frac{4}{5} - \arccos \frac{3}{5}\right)$;

i) $\arcsin \frac{3}{5} + \arccos \frac{12}{13}$.

23. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

d) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$;

g) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{7}\right)$;

b) $\cos\left(-2x + \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

e) $\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(-2x - \frac{3\pi}{4}\right)$;

h) $\operatorname{tg}\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

c) $\cos\left(-4x + \frac{3\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2}$;

f) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$;

i) $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

24. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $4\sin x + 3\cos x = 5$;

c) $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$;

b) $\sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$;

d) $4\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 2$.

25. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 10$ cm, $BC = 8$ cm și $AC = 12$ cm. Bisectoarea unghiului B intersectează segmentul AC în punctul M. Punctul N aparține segmentului AB astfel încât $\frac{AN}{NB} = \frac{3}{4}$, iar punctul P aparține segmentului BC astfel încât $BP = 5$ cm. Dreptele MN și BC se intersectează în punctul Q.

a) Calculează $\cos B$.

b) Calculează aria triunghiului ABC, raza cercului înscris și raza cercului circumscris triunghiului ABC.

c) Determină lungimile segmentelor BM, CN și lungimea medianei din A a triunghiului ABC.

d) Demonstrează că triunghiul BMC e obtuzunghic.

e) Demonstrează că dreptele AP, BM și CN sunt concurente.

f) Determină raportul $\frac{QC}{QB}$.

Unitatea 1. Elemente de logică matematică. 1. Propoziții și predicate. 1.a) F; b) nu este propoziție; c) F; d) A; m) predicat, $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; n) A; o) F; p) F; q) nu este propoziție. 2. a) A; b) A; c) F; d) A; e) F. 4. a) F; b) F; c) A. 5. a) $\{0\}$; b) $\{2, 3\}$; h) $\left\{-\frac{1}{12}\right\}$; i) $\left[-\frac{2}{3}, 2\right]$; j) $(-\infty, 4]$; l) $\{(2, 1)\}$. **1.2. Operații cu propoziții și predicate: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența.** 1.a) Temperatura aerului nu este pozitivă; b) Nu îmi place matematica. 2. a) A; b) A; c) A; d) F; e) A; f) A. 5. $(-7, 9]$. 6. a) $[4, +\infty)$; b) $\mathbb{R}$; c) $[3, 4)$; d) $[3, +\infty)$; e) $[3, 4)$. 9. $(11, +\infty)$; $\mathbb{R}$; $(4, 11]$. 11. a) $p(x)$: „ x e număr par”, $x \in \mathbb{N}$, $q(x)$: „ x este divizibil cu 2”, $x \in \mathbb{N}$; $p(x) \leftrightarrow q(x)$. 12. b) $(p \wedge q) \rightarrow r$. **1.3. Cuantificatorul existențial și cuantificatorul universal.** 1. a) A; b) A; c) F; d) F; e) A. 2. a) A; b) F; c) F; d) F; e) A; f) A; g) A. 3. a) A; b) F; c) F; d) F; e) A; f) A; g) A. 6. a) F; b) A. **1.4. Reguli de negare.** 1. a) p : „Elevul a învățat”, q : „Elevul a rezolvat exercițiile”, $\neg(p \wedge q)$ = „Elevul nu a învățat sau nu a rezolvat exercițiile. 2. c) Există un număr real x astfel încât $x > 1$ și $x^2 \leq 1$. **1.5. Reducerea la absurd.** 2. Presupunem că n este par, deci există un număr natural k astfel încât $n = 2k$. Prin urmare, $n^2 = 4k^2$ care nu este impar. **2. Metoda inducției matematice.** 4. a) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{n}{3n+1}$. **Exerciții recapitulative.** 1. a) F; b) A; c) F; d) F. 2. a) $\{2\}$; b) $\emptyset$. 5. a) A; b) F; c) A; d) F. 7. a) $(\exists x)\left(\frac{x}{x+1} = 1\right)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; c) $(\exists x)(x$ nu este par și x nu este impar), $x \in \mathbb{N}$. 10. a) 55; b) 784; c) n^2 .

Unitatea 2. Șiruri și progresii. 1. Șiruri. Moduri de definire a unui șir. 2. a) $a_n = (-2)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$; b) $b_n = \frac{2n-1}{4}$, $n \in \mathbb{N}^*$; c) $c_n = n^2 - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$; d) $d_n = 4n - 3$, $n \in \mathbb{N}^*$; e) $e_n = \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$. 4. $a_7 = 2$, $a_9 = \frac{32}{17}$. 5. $a_3 = 7$, $a_{10} = 91$. 6. a) $a_n = \sqrt{p^2 + n - 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$; b) 91; c) $a_1 \in \{8, 9, 10\}$. 9. b) 5; c) 3. 10. b) 27; c) 447. 11. b) 10; c) 500. 12. b) $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. 13. b) $a_n = \frac{3n+1}{2(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$. **2. Progresii aritmetice. Determinarea termenului general al unei progresii aritmetice. Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice. Caracterizarea unei progresii aritmetice prin relația dintre orice trei termeni consecutivi. Condiția ca n numere reale să fie în progresie aritmetică, pentru $n \geq 3$.** 1. a) 9; b) 15; c) 85; d) 6; e) 21; f) 10; g) 4. 2. A. c); B. c); C. d); D. a); E. b). 6. a) $a_n = -2n + 9$; b) $a_n = 3n - 1$; c) $a_n = \frac{n+6}{4}$; d) $a_n = 3n + 2$; e) $a_n = 5n - 6$; f) $a_n = 4n - 3$; g) $a_n = \frac{7}{5}(7 - 2n)$; h) $a_n = 2n - 1$; i) $a_n = 2n + 1$. 7. a) $a_1 = -1$, $r = 4$; b) $a_1 = -19$, $r = 2$; c) $a_1 = -2$, $r = 5$; d) $a_1 = 7$, $r = -2$; e) $a_1 = 5$, $r = 2$; f) $a_1 = 12$, $r = -2$; g) $a_1 = -2$, $r = 3$. 11. a) -4; b) -2; c) $\frac{7}{3}$; d) $x \in \{-1, 2\}$; e) 1; f) $x \in \left\{2, -\frac{5}{2}\right\}$. 12. a) 676; b) 1 092; c) 133; d) 1 712; e) 1 364; f) 1 717. 13. a) 69; b) 18; c) 21; d) 34. 14. 1 200 lei. 15. 5,2%. 16. a) 82 160 lei; b) 15 luni. 17. a) 576 locuri; b) 96 120 lei; c) 24 minute. 18. $a_1 = 2$; 19. $a_1 = 1$. 20. $a_1 = 3$, $r = 2$. **3. Progresii geometrice. Determinarea termenului general al unei progresii. Suma primilor n termeni ai unei progresii. Caracterizarea unei progresii prin relația dintre orice trei termeni consecutivi. Condiția ca n numere reale să fie în progresie geometrică, pentru $n \geq 3$.** 1. a) $\frac{9}{2}$; b) $-\frac{2}{3}$; c) -4; d) 2; e) 6; f) 5; g) 3. 2. A. d); B. b); C. b); D. c); E. c). 5. a) 1; b) 8; c) 3; d) $x \in \left\{-\frac{3}{4}, 2\right\}$. 6. a) 1; b) 3; c) $x = 2$; d) $x \in \{-2, 0, 2\}$; e) $x \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$; f) 1. 7. 21. 11. a) $b_1 = 2$, $q = 3$; b) $b_1 = 1$, $q = -2$; c) $b_1 = 6$, $q = 2$ sau $b_1 = \frac{486}{5}$, $q = -\frac{2}{3}$; d) $b_1 = 1$, $q = 2$ sau $b_1 = -3$, $q = -2$; e) $b_1 = 1$, $q = -2$. 15. $n = 4$. 16. 4 060 401. 17. Da. 18. 146 932,81 €. 19. 4,29%. 20. 2,56 g. 21. 12 288 €. **Exerciții recapitulative.** 1. 13 locuri pe primul rând, 27 locuri pe rândul al optulea; 640 locuri în sală. 2. a) 80; b) 155; c) 14; d) 10. 3. 31. 5. 2 000 m. 6. 10 g. 7. 29 387. 8. a) $b_1 = 800$, $q = 0,95$; b) 619; 9. 38. 10. a) 6; b) $a_2 = 11$; $a_4 = 23$; $a_{25} = 149$; c) da, $a_{89} = 533$; d) 1925. 11. a) $q = -2$; b) $b_2 = -10$; $b_3 = 20$; $b_5 = 80$; c) da, $a_8 = -640$; d) -1705. 14. $a_n = 3n - 7$. 15. $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$. 16. 3. 17. 10. 19. a) 61; b) $\frac{49}{2}$. 20. $a = 2$, $b = 5$, $c = 8$ sau $a = 8$, $b = 5$, $c = 2$. 21. 189. 23. a) $a_1 = -10$, $r = \frac{28}{3}$; c) $a_1 = 2$, $r = \frac{1}{2}$. 24. a) $b_1 = 2$, $q = 3$; b) $b_1 = -1$, $q = 1$ sau $b_1 = -1$, $q = -2$; c) $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$. 25. 825. 26. 503. 27. 7. **Unitatea 3. Funcții. 1.1. Funcții: definiție, exemple, modalități de a descrie o funcție, funcții egale, restricții ale unei funcții, imaginea unei funcții.** 3. a) 125; b) 16; c) 75; d) 16; e) 125. 8. a) $x \in \{-9, 9\}$; b) $x \in \{-5, 2\}$; c) $x \in \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$; d) $x = \frac{1}{2}$; e) ecuația nu are soluție; f) ecuația nu are soluție; g) $x \in \left\{-\frac{22}{5}, -\frac{16}{5}\right\}$; h) $x = \frac{9}{11}$; i) $x \in \{-6, 5\}$; -5,7. 9. a) $x \in (-5, 1)$; b) $x \in \left[-1, \frac{5}{3}\right]$; c) $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$; d) $x \in \left(-\infty, -\frac{29}{21}\right] \cup \left[\frac{25}{21}, +\infty\right)$; e) $x = -\frac{1}{4}$; f) $x \in \left(-\infty, -\frac{59}{120}\right] \cup \left[\frac{17}{40}, +\infty\right)$. 14. $f([-2, 5]) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $f((-\infty, -4)) = \{\dots, -7, -6, -5\}$, $f((5, 6)) = \{5\}$, $f([2, 4)) = \{2, 3\}$.

$f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}, f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. **16. a)** $[a] = 0, \{a\} = 1 - \frac{1}{n}$; **b)** $n = 50$. **1.2. Reprezentarea grafică a unei funcții definite pe submulțimi ale lui $\mathbb{R}$.** **1.** $m = \frac{19}{8}$. **4. a)** $a = -\sqrt{3}$; **b)** $(-5, 0), (0, 5)$; **c)** $P = 10 + 5\sqrt{2}, A = \frac{25}{2}$; **d)** $a = \frac{7}{2}, b = -2$; **e)** $f(x) < 0, (\forall)x \in (-\infty, -5)$; $f(x) > 0, (\forall)x \in (-5, +\infty)$; **f)** $x = -13$; **g)** $(-2, 3)$; **h)** $(-4, 1)$. **6. a)** $\frac{1}{150}$; **b)** $A = \frac{4}{15}$. **9.** $f(x) = -2x + 7$. **11. b)** $a = -3$; **c)** $a \in \{-2, 1\}$; **e)** $(-\frac{2}{3}, 0), (\frac{1}{3}, 0), (0, -1)$; **g)** $(-\frac{1}{3}, 1), (\frac{2}{3}, 1)$; **h)** $(-1, -1)$. **15. a)** $x \in \{-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\}$; **b)** $x \in \{-\frac{13}{3}, -5\}$. **20. a)** $A(0, 4), B(1, 7), C(2, 10)$; **b)** 4 lei; **c)** 3 lei; **d)** $f: (0, -\infty) \rightarrow (4, +\infty), f(c) = 4 + 3c$; **e)** 46 lei. **1.3. Proprietăți ale funcțiilor numerice: monotonie, mărginire, paritate/imparitate, convexitate/concavitate; lecturi grafice.** **1. a)** f e strict crescătoare; **b)** f e strict descrescătoare; **c)** f e strict descrescătoare; **d)** f e strict crescătoare; **e)** f e strict crescătoare; **f)** f e strict descrescătoare; **g)** f e descrescătoare pe intervalul $[-10, -5]$ și crescătoare pe intervalul $[-5, +\infty)$; **h)** f e strict crescătoare; **i)** f e strict descrescătoare; **j)** f e strict descrescătoare. **12. b)** f e strict crescătoare, g este strict crescătoare, h e strict descrescătoare; **c)** $\text{Im}f = (-26, -2), f$ e mărginită; $\text{Im}g = [0, +\infty), g$ e nemărginită, $\text{Im}h = [\frac{27}{25}, 3], h$ e mărginită; **d)** f e concavă pe intervalul $(-2, 0)$; g e concavă pe intervalul $[-3, +\infty)$, h e convexă pe intervalul $[1, 5]$. **15. a)** f e crescătoare pe intervalul $(-\infty, 3)$ și descrescătoare pe intervalul $[3, +\infty)$; $\text{Im}f = (-\infty, 8)$; **b)** f e descrescătoare, $\text{Im}f = \mathbb{R}$; **c)** f e crescătoare pe intervalul $(-\infty, -2)$ și pe intervalul $[-2, 3]$ și descrescătoare pe intervalul $(3, +\infty)$, $\text{Im}f = (-\infty, -8) \cup [0, 10]$. **17.** $(-22, 10), [6, 14), (10, +\infty)$. **23. a)** $a \in [0, 2]$; **b)** $a \in [2, +\infty)$. **28. a)** $A(-4, 2), A'(2, 4), B(-1, 3), D = [-4, 2]$; **b)** $C(-4, 2 + \sqrt{10}), C'(2, 4 - \sqrt{10})$; **d)** f e descrescătoare; **e)** f e convexă pe intervalul $[-1, 2]$ și concavă pe intervalul $[-4, -1]$; **f)** $M(0, 4 - \sqrt{6})$. **1.4. Funcții obținute prin operații algebrice elementare (sumă, diferență, produs, raport); compunerea funcțiilor.** **2. a)** $f \circ g, g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (f \circ g)(x) = acx + ad + b; (g \circ f)(x) = acx + bc + d$; **b)** $ad + b = bc + d$; **c)** $(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori } f})(0) = b \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1}, \text{ pentru } a \neq 1;$
 $(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori } f})(0) = nb, \text{ pentru } a = 1$; **3. e)** $g(x) = 2x + 1$. **5. a)** $(-4, 0), (-2, 0), (2, 0), (0, -16)$. **8. a)** $x \in (-\infty, -4) \cup (-1, +\infty)$; **b)** $x \in [-2, \frac{2}{3}]$; **c)** $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$; **d)** $x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$. **9. a)** $x \in (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (2, +\infty)$; **b)** $x \in [-\frac{1}{5}, 3]$; **c)** $x \in [-2, 5]$; **d)** $x \in (-\infty, -4) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$; **e)** $x \in (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{5}]$; **f)** $x \in (-\infty, -\frac{7}{3}) \cup (3, +\infty)$; **g)** $x \in [-\infty, \frac{5}{13}) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$; **h)** $x \in (-2, 6)$. **10.** $a = \frac{13}{8}$. **11.** $a = 3, b = \frac{3}{2}$ sau $a = -3, b = -3$. **16.** $(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori } f})(x) = 2^n x + 3(2^n - 1)$. **17.** $(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori } f})(x) = (-3)^n x - \frac{(-3)^n - 1}{2}$. **24. a)** $V: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), V(v) = \frac{120v}{v + 60}$; **b)** 75 km/h; **d)** 120 km/h. **1.5. Funcții injective, surjective, bijective, inversabile: definiție, interpretare geometrică pentru funcții numerice, condiția necesară și suficientă ca o funcție să fie inversabilă; lecturi grafice.** **2. a)** $a = 5, b = 115$; **b)** $f^{-1}: (5, 115) \rightarrow (1, 56), f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{2}$. **6.** $m = \frac{1}{5}, n = -\frac{2}{5}$. **12.** Nu există. **13. a)** $m \in [\frac{13}{2}, +\infty)$; **b)** $x \in (0, \frac{13}{2}]$; **c)** $m = \frac{13}{2}$. **2. Funcția de gradul al doilea. 2.1. Definiție, reprezentare grafică, intersecțiile reprezentării grafice cu axele de coordonate, axa de simetrie.** **8. a)** $f(x) = x^2 - 1$; **b)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 4$. **9. a)** $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$. **10.** $f(x) = x^2 + x - 2$. **11.** $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$. **13. b)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 1$. **14.** $m = 9$. **15.** $m \in \{1, 4\}$. **16.** $m \in \{-2, 5\}$. **17.** $m \in \{-3, \frac{1}{2}\}$. **18.** $m \in \{3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}\}$. **19.** $m \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{3})$. **20.** $m \in (\frac{5}{8}, +\infty)$. **21. a)** $m = 1$; **b)** $m = 2$. **22. a)** $m \in (-\frac{13}{8}, +\infty)$; **b)** $m \in (\frac{2}{3}, 1) \cup (1, +\infty)$. **23. a)** $m \in (-\infty, -\frac{1}{2})$; **b)** $m \in (\frac{17}{24}, +\infty)$. **26. b)** $\Delta = -3[(m + \frac{1}{3})^2 + \frac{8}{9}] < 0, (\forall)m \in \mathbb{R}$. **27. a)** $(0, 0), (10, 0)$; **b)** $(1, 0), (3, 0), (0, 1)$; **c)** $(2, 0), (0, -2)$. **29. a)** $m \in (-\infty, -1)$; **b)** $m \in (-1, +\infty)$. **30. a)** $m \in (-\infty, -2)$; **b)** $m \in (4, +\infty)$. **2.2. Monotonia funcției de gradul al doilea, punctul de extrem.** **9.** $m \in (-\infty, 0]$. **10.** $m \in (-\infty, \frac{7}{3}]$. **2.3. Semnul funcției de gradul al doilea; interpretare geometrică (poziția unei parabole în raport cu axa Ox); inecuații de gradul al doilea studiate pe mulțimea $\mathbb{R}$ sau pe intervale de numere reale; interpretare geometrică (proiecții ale unor porțiuni de parabolă pe axe).** **6.** $m \in (-1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{5}}{2}) \setminus \{0\}$. **7.** $a \in (-1, 7)$. **8.** $m \in (\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}) \setminus \{1\}$. **9.** $m \in [-1, +\infty)$. **10.** $m \in [-1, 1]$. **11.** $m \in (1, 3)$. **12.** $m \in (-8, 0)$. **13.** $m \in [1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}]$. **14.** $m \in [-1, 1]$. **15.** $m \in [\frac{1}{2}, 2]$. **16.** $m \in (0, 1]$. **17.** $m \in (-1, 7)$. **18.** $m \in (-\infty, \frac{6}{5})$. **18.** $m \in (-\infty, 2)$. **20.** $m \in (1, +\infty)$. **2.4. Relațiile lui Viète.** **5. d)** $2\sqrt{3}$. **6. a)** $a \in \emptyset$; **b)** $a \in \emptyset$; **c)** $a \in (-6, \frac{9}{4})$; **d)** $a \in \emptyset$; **e)** $a = -2$; **f)** $a = -\frac{7}{4}$; **g)** $a = -\frac{13}{2}$.

h) $a \in \left\{ \frac{-1 - \sqrt{19}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{19}}{2} \right\}$; i) $a = -\frac{9}{2}$. 7. a) $m = -1$; b) $m \in \{-9, -1\}$; c) $m \in \{-3, 1\}$. 8. c) 18; e) $\frac{38}{9}$. 3. **Funcția putere cu exponent întreg. Funcția radical. 3.1. Funcția putere cu exponent întreg.** 4. a) f e crescătoare pe $(-\infty, 0)$ și descrescătoare pe $(0, +\infty)$; b) f e crescătoare pe $(-\infty, 0]$ și descrescătoare pe $[0, +\infty)$; c) f e descrescătoare pe $\mathbb{R}$; d) f e descrescătoare pe $[-1, 0]$ și pe $(0, 1]$ și crescătoare pe $(-\infty, -1]$ și pe $[1, +\infty)$; e) f e descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, +\infty)$. 5. a) $x \in \{0, 3\}$; b) $x \in \{-1, 0, 1\}$; c) ecuația nu are soluție; d) $\left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$. 6. a) $x \in \{0\} \cup [2, +\infty)$; b) $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$; c) $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; d) $x \in (-\infty, -2] \cup (0, 2]$. 3.2. **Radicali, operații cu radicali, proprietățile radicalilor; expresii conjugate.** 1. a) 6; c) 3; i) -23. 5. a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt[4]{3}$; c) $\sqrt[8]{37}$; h) $\sqrt[10]{33}$. 6. b) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[6]{10}$; c) $\sqrt{7} - \sqrt{5} < \sqrt{10} - \sqrt{7}$. 11. a) 4; c) $-8\sqrt{5}$. 12. $a = 2, b = 1$. 3.3. **Funcția radical.** 1. a) $\mathbb{R}$; b) $(-\infty, 0)$; e) $\left(0, \frac{1}{3}\right] \cup (4, \infty)$. 5. a) $[-3, 9]$; b) $[2, +\infty)$.

3.4. **Ecuații și inecuații cu radical.** 2. A. c) $x = 5$; B. c) $x = \frac{5}{3}$; C. f) $x = -2$; E. b) $x = 1$; F. b) $x = 0$. 3. a) $x \in [-1, 3]$; b) $x \in [-3, 5]$; e) $x \in \left[-1, \frac{119}{25}\right]$; f) $x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$. **Exerciții recapitulative.** 1. a) 12; e) 5. 2. $x = 2$. 4. a) $x \in \{0, 5\}$; b) $x \in \left\{ \frac{4}{23}, 3 \right\}$. 5. a) $[-3, 1]$.

Unitatea 4. Elemente de trigonometrie. 1. Cercul trigonometric. Funcțiile sinus și cosinus definite pe intervalul $[0, 2\pi]$.

12. a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$. 13. a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{12}{13}$; c) $\frac{7}{25}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 14. a) 13; b) 25. 2. **Reducerea la primul cadran.** 9. a) $\sin(\pi - x) = \frac{3}{4}, \sin(\pi + x) = -\frac{3}{4}, \sin(2\pi - x) = -\frac{3}{4}$; b) $\cos(\pi - x) = \frac{1}{3}, \cos(\pi + x) = -\frac{1}{3}, \sin(2\pi - x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; c) $\cos(2\pi - x) = \frac{2}{5}, \sin(x - \pi) = -\frac{\sqrt{21}}{5}, \cos(3\pi - x) = -\frac{2}{5}$. 3. **Funcțiile sinus, cosinus, tangentă și cotangentă. 3.1. Funcțiile sinus și cosinus.** 6. a) $[2, 4]$; b) $[-3, -1]$; c) $[-1, 5]$; d) $[-1, 0]$; e) $[0, 4]$; f) $\{2\}$. 9. a) $a > b$; b) $a < b$; c) $a > b$; d) $a > b$. 10. b) -1. 12. b) $\frac{\pi}{2}$. 3.2. **Funcțiile tangentă și cotangentă.** 7. a) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$; b) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. 8. a) $\frac{\pi}{2}$; b) 2π ; c) $\frac{\pi}{4}$. 3.3. **Relații între funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă și cotangentă.** 2. a) $\cos \frac{5\pi}{13} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{13}\right) = \sin \frac{3\pi}{26}$. Cum funcția sinus e crescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{26} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\frac{\pi}{7} > \frac{3\pi}{26}$, obținem $\sin \frac{\pi}{7} > \cos \frac{5\pi}{13}$; b) $\sin \frac{19\pi}{14} < \cos \frac{5\pi}{8}$; c) $\sin \sqrt{2} > \cos 1$; d) $\cos 3 < \sin 5$; e) $\sin \sqrt{19} < \cos(-4)$; f) $\sin 3,2 > \cos(-3,5)$. 3. a) $\frac{7}{9}$; b) $\frac{3}{11}$. 4. a) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; b) $2\sqrt{2}$. 5. a) $\frac{\sqrt{11}}{5}$; b) $\frac{3\sqrt{7}}{7}$. 6. a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{5}{13}$. 7. a) $\frac{7\sqrt{65}}{65}$; b) $\frac{3}{5}$; c) $\frac{\sqrt{10}}{10}$; d) $\frac{15}{17}$. 8. a) $\frac{15}{34}$; b) $\frac{177}{400}$. 9. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) 1. 10. $-\frac{8}{3}$. 11. a) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; c) $\frac{9\sqrt{5}}{25}$; d) $\frac{17}{25}$. 12. a) -1; b) $\frac{3}{2}$. 13. a) $\frac{1}{2}$ sau $\frac{3}{4}$; b) $-\frac{2}{5}$. 14. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ sau $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 4. **Formule trigonometrice pentru suma/diferența a două numere reale.**

7. $-\frac{17}{19}$. 11. $\frac{48\sqrt{6} - 7}{125}$. 12. $\frac{1}{13}$. 14. a) $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{Im} f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$; b) $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \text{Im} f = [-2, 2]$. 15. $\sin \frac{\pi}{8} = \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}, \cos \frac{\pi}{8} = \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$. 5. **Transformarea sumelor în produse și a produselor în sume.**

5. a) 0; b) 0. 6. a) -1; b) 1; c) $\sqrt{2}$; d) $\sqrt{3}$. 8. a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{1}{16}$. 6. **Funcții trigonometrice inverse.** 1. a) $[2, 3]$; b) $\left[-1, -\frac{1}{3}\right]$; c) $\left[1, \frac{7}{5}\right]$. 5. a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $-\frac{\pi}{6}$; d) $\frac{\pi}{3}$; e) $5 - 2\pi$; f) $9 - 2\pi$; g) $7 - 2\pi$; h) $10 - 3\pi$. 7. a) $\frac{2 - 2\sqrt{10}}{9}$; b) 1; c) $\frac{4\sqrt{6} + 5\sqrt{21}}{35}$; d) $\frac{7}{25}$; e) $\frac{6\sqrt{2} - 2}{3\sqrt{13}}$; f) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$; g) $\frac{\sqrt{15}}{8}$; h) $-\frac{15}{17}$; i) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$; j) $-\frac{23}{25}$; k) $-\frac{5\sqrt{7}}{16}$; l) $\frac{9}{41}$; m) $\frac{7}{8}$; n) $-\frac{4}{3}$; o) $\frac{4\sqrt{2}}{7}$; p) $\frac{4\sqrt{21}}{17}$; q) $\frac{12}{13}$; r) $\frac{1}{31}$; s) $\frac{6}{17}$; t) $\frac{4\sqrt{2} - 3}{2 + 6\sqrt{2}}$; u) $-\frac{9}{19}$. 8. a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $-\frac{\pi}{2}$; d) π ; f) $\frac{\pi}{4}$.

Unitatea 5. Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Relații metrice. 1. Teorema cosinusului, teorema sinusurilor, rezolvarea triunghiurilor. 1. $BC = 2\sqrt{25 - 12\sqrt{2}}$ cm. 2. $MP = 3\sqrt{21}$ cm. 6. $R = 6\sqrt{2}$ cm. 12. c) $B = 60^\circ; a = 5; c = 5\sqrt{3}$; f) $B = 50^\circ; a \approx 10,89; b \approx 8,34$. 18. a) $BD = 2\sqrt{31}$ cm; $AC = 2\sqrt{91}$ cm; b) $\angle BCD = 60^\circ; \angle CDB \approx 51^\circ; \angle DBC \approx 69^\circ$; c) $R = \frac{2\sqrt{273}}{3}$.

2. **Raza cercului înscris și raza cercului circumscris unui triunghi. Aria unui triunghi.** 3. b) $12\sqrt{5}$ cm²; c) $20\sqrt{2}$ cm²; e) $(3\sqrt{3} + 7)$ cm². 4. 41. 6. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ cm². 7. $P = 10(3 + \sqrt{3})$ cm, $\mathcal{A} = 50\sqrt{3}$ cm², $R = 10$ cm, $r = 5(\sqrt{3} - 1)$ cm. 3. **Teorema bisectoarei; relația lui Stewart; lungimile unor segmente importante din triunghi.** 6. b) 18 cm, 12 cm²; c) $CD = \frac{24\sqrt{10}}{13}$ cm. 8. a) 12 cm; $4\sqrt{3}$ cm²; b) $BB' = 6\sqrt{3}$ cm, $EE' = 6$ cm, $NN' = 2\sqrt{3}$ cm; c) $E = 12$. 4. **Concurență și colinearitate în geometria plană: teorema lui Menelaus, teorema lui Ceva.** 2. $\frac{14}{15}$. 11. $\frac{2 \cdot AB}{AB + AC}$. 13. $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} = \frac{OA \cdot OD}{OC \cdot OB}$. 14. $\frac{DM}{AM} = \frac{5}{9}, \frac{AN}{MN} = \frac{56}{25}$.

7. $-\frac{17}{19}$. 11. $\frac{48\sqrt{6} - 7}{125}$. 12. $\frac{1}{13}$. 14. a) $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{Im} f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$; b) $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \text{Im} f = [-2, 2]$. 15. $\sin \frac{\pi}{8} = \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}, \cos \frac{\pi}{8} = \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$. 5. **Transformarea sumelor în produse și a produselor în sume.**

5. a) 0; b) 0. 6. a) -1; b) 1; c) $\sqrt{2}$; d) $\sqrt{3}$. 8. a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{1}{16}$. 6. **Funcții trigonometrice inverse.** 1. a) $[2, 3]$; b) $\left[-1, -\frac{1}{3}\right]$; c) $\left[1, \frac{7}{5}\right]$. 5. a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $-\frac{\pi}{6}$; d) $\frac{\pi}{3}$; e) $5 - 2\pi$; f) $9 - 2\pi$; g) $7 - 2\pi$; h) $10 - 3\pi$. 7. a) $\frac{2 - 2\sqrt{10}}{9}$; b) 1; c) $\frac{4\sqrt{6} + 5\sqrt{21}}{35}$; d) $\frac{7}{25}$; e) $\frac{6\sqrt{2} - 2}{3\sqrt{13}}$; f) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$; g) $\frac{\sqrt{15}}{8}$; h) $-\frac{15}{17}$; i) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$; j) $-\frac{23}{25}$; k) $-\frac{5\sqrt{7}}{16}$; l) $\frac{9}{41}$; m) $\frac{7}{8}$; n) $-\frac{4}{3}$; o) $\frac{4\sqrt{2}}{7}$; p) $\frac{4\sqrt{21}}{17}$; q) $\frac{12}{13}$; r) $\frac{1}{31}$; s) $\frac{6}{17}$; t) $\frac{4\sqrt{2} - 3}{2 + 6\sqrt{2}}$; u) $-\frac{9}{19}$. 8. a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $-\frac{\pi}{2}$; d) π ; f) $\frac{\pi}{4}$.

Unitatea 5. Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Relații metrice. 1. Teorema cosinusului, teorema sinusurilor, rezolvarea triunghiurilor. 1. $BC = 2\sqrt{25 - 12\sqrt{2}}$ cm. 2. $MP = 3\sqrt{21}$ cm. 6. $R = 6\sqrt{2}$ cm. 12. c) $B = 60^\circ; a = 5; c = 5\sqrt{3}$; f) $B = 50^\circ; a \approx 10,89; b \approx 8,34$. 18. a) $BD = 2\sqrt{31}$ cm; $AC = 2\sqrt{91}$ cm; b) $\angle BCD = 60^\circ; \angle CDB \approx 51^\circ; \angle DBC \approx 69^\circ$; c) $R = \frac{2\sqrt{273}}{3}$.

2. **Raza cercului înscris și raza cercului circumscris unui triunghi. Aria unui triunghi.** 3. b) $12\sqrt{5}$ cm²; c) $20\sqrt{2}$ cm²; e) $(3\sqrt{3} + 7)$ cm². 4. 41. 6. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ cm². 7. $P = 10(3 + \sqrt{3})$ cm, $\mathcal{A} = 50\sqrt{3}$ cm², $R = 10$ cm, $r = 5(\sqrt{3} - 1)$ cm. 3. **Teorema bisectoarei; relația lui Stewart; lungimile unor segmente importante din triunghi.** 6. b) 18 cm, 12 cm²; c) $CD = \frac{24\sqrt{10}}{13}$ cm. 8. a) 12 cm; $4\sqrt{3}$ cm²; b) $BB' = 6\sqrt{3}$ cm, $EE' = 6$ cm, $NN' = 2\sqrt{3}$ cm; c) $E = 12$. 4. **Concurență și colinearitate în geometria plană: teorema lui Menelaus, teorema lui Ceva.** 2. $\frac{14}{15}$. 11. $\frac{2 \cdot AB}{AB + AC}$. 13. $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} = \frac{OA \cdot OD}{OC \cdot OB}$. 14. $\frac{DM}{AM} = \frac{5}{9}, \frac{AN}{MN} = \frac{56}{25}$.

Unitatea 5. Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Relații metrice. 1. Teorema cosinusului, teorema sinusurilor, rezolvarea triunghiurilor. 1. $BC = 2\sqrt{25 - 12\sqrt{2}}$ cm. 2. $MP = 3\sqrt{21}$ cm. 6. $R = 6\sqrt{2}$ cm. 12. c) $B = 60^\circ; a = 5; c = 5\sqrt{3}$; f) $B = 50^\circ; a \approx 10,89; b \approx 8,34$. 18. a) $BD = 2\sqrt{31}$ cm; $AC = 2\sqrt{91}$ cm; b) $\angle BCD = 60^\circ; \angle CDB \approx 51^\circ; \angle DBC \approx 69^\circ$; c) $R = \frac{2\sqrt{273}}{3}$.

2. **Raza cercului înscris și raza cercului circumscris unui triunghi. Aria unui triunghi.** 3. b) $12\sqrt{5}$ cm²; c) $20\sqrt{2}$ cm²; e) $(3\sqrt{3} + 7)$ cm². 4. 41. 6. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ cm². 7. $P = 10(3 + \sqrt{3})$ cm, $\mathcal{A} = 50\sqrt{3}$ cm², $R = 10$ cm, $r = 5(\sqrt{3} - 1)$ cm. 3. **Teorema bisectoarei; relația lui Stewart; lungimile unor segmente importante din triunghi.** 6. b) 18 cm, 12 cm²; c) $CD = \frac{24\sqrt{10}}{13}$ cm. 8. a) 12 cm; $4\sqrt{3}$ cm²; b) $BB' = 6\sqrt{3}$ cm, $EE' = 6$ cm, $NN' = 2\sqrt{3}$ cm; c) $E = 12$. 4. **Concurență și colinearitate în geometria plană: teorema lui Menelaus, teorema lui Ceva.** 2. $\frac{14}{15}$. 11. $\frac{2 \cdot AB}{AB + AC}$. 13. $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} = \frac{OA \cdot OD}{OC \cdot OB}$. 14. $\frac{DM}{AM} = \frac{5}{9}, \frac{AN}{MN} = \frac{56}{25}$.

Unitatea 5. Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Relații metrice. 1. Teorema cosinusului, teorema sinusurilor, rezolvarea triunghiurilor. 1. $BC = 2\sqrt{25 - 12\sqrt{2}}$ cm. 2. $MP = 3\sqrt{21}$ cm. 6. $R = 6\sqrt{2}$ cm. 12. c) $B = 60^\circ; a = 5; c = 5\sqrt{3}$; f) $B = 50^\circ; a \approx 10,89; b \approx 8,34$. 18. a) $BD = 2\sqrt{31}$ cm; $AC = 2\sqrt{91}$ cm; b) $\angle BCD = 60^\circ; \angle CDB \approx 51^\circ; \angle DBC \approx 69^\circ$; c) $R = \frac{2\sqrt{273}}{3}$.

2. **Raza cercului înscris și raza cercului circumscris unui triunghi. Aria unui triunghi.** 3. b) $12\sqrt{5}$ cm²; c) $20\sqrt{2}$ cm²; e) $(3\sqrt{3} + 7)$ cm². 4. 41. 6. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ cm². 7. $P = 10(3 + \sqrt{3})$ cm, $\mathcal{A} = 50\sqrt{3}$ cm², $R = 10$ cm, $r = 5(\sqrt{3} - 1)$ cm. 3. **Teorema bisectoarei; relația lui Stewart; lungimile unor segmente importante din triunghi.** 6. b) 18 cm, 12 cm²; c) $CD = \frac{24\sqrt{10}}{13}$ cm. 8. a) 12 cm; $4\sqrt{3}$ cm²; b) $BB' = 6\sqrt{3}$ cm, $EE' = 6$ cm, $NN' = 2\sqrt{3}$ cm; c) $E = 12$. 4. **Concurență și colinearitate în geometria plană: teorema lui Menelaus, teorema lui Ceva.** 2. $\frac{14}{15}$. 11. $\frac{2 \cdot AB}{AB + AC}$. 13. $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} = \frac{OA \cdot OD}{OC \cdot OB}$. 14. $\frac{DM}{AM} = \frac{5}{9}, \frac{AN}{MN} = \frac{56}{25}$.

**SUGESTII DE FIȘE PENTRU OBSERVAREA SISTEMATICĂ A ACTIVITĂȚII
ȘI A COMPORTAMENTULUI ELEVILOR**

FIȘĂ DE OBSERVARE A ACTIVITĂȚII INDIVIDUALE

Indicator	Frecvent	Rar	Deloc
Folosește corect termenii specifici disciplinei.			
Este implicat în îndeplinirea sarcinilor de lucru.			
Exprimare socială și emoțională adecvată.			
Are o atitudine adecvată față de ceilalți colegi.			

FIȘĂ DE OBSERVARE A ACTIVITĂȚII GRUPULUI

Indicator	Frecvent	Rar	Deloc
Fiecare membru al grupului este implicat în rezolvarea sarcinii.			
Elevii formulează idei clare și ușor de înțeles de către ceilalți.			
Toate ideile propuse sunt luate în considerare.			
Elevii se sprijină și se încurajează pentru a fi productivi și creativi.			
Rezultatul activității de grup este relevant și prezentat într-o manieră care facilitează înțelegerea.			
Elevii urmăresc cu atenție prezentările celorlalte grupuri.			
Elevii acordă feedback colegilor.			

ETAPELE REALIZĂRII UNUI PROIECT

1. Stabilește câteva obiective și împarte sarcinile în pași mai mici.
2. Caută pe internet sau în diverse publicații informațiile de care ai nevoie. Folosește doar surse de încredere.
3. Îndeplinește, în ordine, obiectivele stabilite. Vei realiza astfel o prezentare. Fii creativ! Poți include imagini sau ilustrații.
4. Prezintă proiectul în fața clasei.

ETAPELE REALIZĂRII UNUI PORTOFOLIU

1. Stabilește o temă și alege un titlu adecvat pentru fișa de portofoliu.
2. Realizează un plan. Împarte sarcinile în pași mai mici.
3. Caută pe internet sau în diverse publicații informațiile de care ai nevoie.
4. Folosind aceste informații, realizează o prezentare.
5. Prezintă fișa în fața clasei.
6. Păstrează toate fișele create de tine într-un dosar.

ETAPELE REALIZĂRII UNEI INVESTIGAȚII

1. Adună informațiile de care ai nevoie. Poți folosi internetul sau poți studia cărți la bibliotecă.
2. Prelucreză informațiile și realizează prezentarea. Realizează o diagramă sau un tabel în care să notezi informațiile găsite.
3. Prezintă în fața clasei rezultatele investigației.

MATEMATICĂ

Trunchi comun și curriculum de specialitate (TC+CS), filiera teoretică,
profilul real, specializarea matematică-informatică – clasa a IX-a

UNITATEA 1 – Elemente de logică matematică

UNITATEA 2 – Șiruri și progresii

UNITATEA 3 – Funcții

UNITATEA 4 – Funcții trigonometrice. Ecuatii trigonometrice

UNITATEA 5 – Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Relații metrice

ISBN 978-630-347-295-9



6 421763 016611

MIN67

