

Ministerul Educației și Cercetării

Maria-Daniela Stoica
Titi Hanghiuc
Veronica Luminița Rotaru
Felicia Ioana Săndulescu

MATEMATICĂ

Trunchi comun și curriculum de
specialitate (TC+CS), filiera teoretică,
profilul real, specializarea științe ale
naturii – clasa a IX-a

Acest manual este proprietatea Ministerului Educației și Cercetării.

Acest proiect de manual școlar este realizat în conformitate cu Programa școlară aprobată prin Ordinul ministrului educației și cercetării nr. 6930/19.12.2025.

Numărul de telefon 119 – număr unic de telefon la nivel național pentru cazurile de abuz împotriva copiilor

Numărul de telefon 116.111 – număr de asistență pentru copii, în conformitate cu Legea nr. 272/2004 privind protecția și promovarea drepturilor copilului, republicată, cu modificările și completările ulterioare.

Ministerul Educației și Cercetării

Maria-Daniela Stoica
Titi Hanghiuc
Veronica Luminița Rotaru
Felicia Ioana Săndulescu

MATEMATICĂ

Trunchi comun și curriculum de
specialitate (TC+CS), filiera teoretică,
profilul real, specializarea științe ale
naturii – clasa a IX-a

Manualul școlar a fost aprobat de Ministerul Educației și Cercetării prin Ordinul de ministru nr. _____ .

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital, și este transmisibil timp de opt ani școlari, începând din anul școlar 2026-2027.

Inspectoratul Școlar _____

Școala/Colegiul/Liceul _____

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*	
				la primire	la predare
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					
6.					
7.					
8.					

* Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: *nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat*.

- Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

STOICA, MARIA-DANIELA

Matematică : trunchi comun și curriculum de specialitate (TC+CS), filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii: clasa a IX-a / Maria-Daniela Stoica, Titi Hanghiuc, Veronica Luminița Rotaru, Felicia Ioana Săndulescu. - București : Booklet, 2026
ISBN 978-630-347-296-6

- I. Hanghiuc, Titi
- II. Rotaru, Veronica Luminița
- III. Săndulescu, Felicia Ioana

Referenți științifici:	conf. univ. dr. habil. Georgia Irina Oros, Universitatea din Oradea prof. gr. I Valerian Vlăduț, Liceul Teoretic „Dimitrie Bolintineanu”, București
Redactor-șef:	Bogdan Nicolai
Redactor:	Ana Bratu
Corector rezolvator:	Daniela Ciofu
Design copertă:	Silvia Olteanu
Tehnoredactare:	Carmen Dumitrescu
Grafică și DTP:	Mihaela Cojoc
Video:	Quartz Film Studio
Voce:	Ramona Hilohe
Digital:	MyKoolio
Credite foto:	Adobe Stock



Pentru comenzi:
tel.: 021.430.30.95/021.440.10.02
e-mail: comenzi@booklet.ro
site: www.booklet.ro

Competențe generale și specifice	5		
Ghid de utilizare a manualului digital	6		
Recapitulare inițială	7		
Evaluare inițială	8		
UNITATEA 1			
Mulțimea numerelor reale	9		
1. Structura algebrică: operații algebrice cu numere reale, proprietăți; formule de calcul prescurtat: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$; raționalizarea numitorilor de forma $a \pm \sqrt{b}$, $b > 0$; modulul unui număr real	10		
Portofoliu	18		
2. Structura de ordine: compararea și ordonarea numerelor reale; aproximări prin lipsă sau prin adaos; partea întreagă și partea fracționară a unui număr real	19		
Recapitulare	27		
Evaluare	28		
UNITATEA 2			
Elemente de logică matematică	29		
1. Propoziții și predicate; operații: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența; cuantificatori; reguli de negare			
1.1. Propoziții și predicate	30		
1.2. Operații: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența	34		
1.3. Cuantificatori	41		
Portofoliu	42		
1.4. Reguli de negare	44		
2. Metode de raționament: metoda reducerii la absurd; metoda inducției matematice			
2.1. Metoda reducerii la absurd	46		
Portofoliu	47		
2.2. Metoda inducției matematice	48		
Recapitulare	52		
Portofoliu	53		
Evaluare	54		
UNITATEA 3			
Polinoame cu coeficienți reali	55		
1. Forma algebrică a unui polinom, operații cu polinoame: adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar	56		
2. Teorema împărțirii cu rest; algoritmul de împărțire a polinoamelor; împărțirea cu $X - a$, schema lui Horner; divizibilitatea polinoamelor: definiție	65		
3. Rădăcini reale ale polinoamelor; teorema lui Bézout	74		
Recapitulare	81		
Evaluare	82		
UNITATEA 4			
Progresii aritmetice și progresii geometrice	83		
1. Dobânda simplă. Progresii aritmetice; determinarea termenului general al unei progresii aritmetice; suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice	84		
2. Dobânda compusă. Progresii geometrice; determinarea termenului general al unei progresii geometrice; suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice	95		
Studiu de caz	108		
Recapitulare	109		
Evaluare	110		
UNITATEA 5			
Geometrie analitică	111		
1. Reper cartezian în plan; coordonatele carteziene ale unui punct din plan, distanța dintre două puncte în plan, coordonatele mijlocului unui segment	112		
2. Panta unei drepte (ca raport)	120		
3. Ecuația dreptei care trece printr-un punct dat și are panta dată, ecuația dreptei care trece prin două puncte; intersecțiile dreptei cu axele de coordonate	125		
4. Pozițiile relative ale unei drepte față de axele de coordonate; pozițiile relative a două drepte	133		
5. Ecuația cercului	139		
Proiect	144		
Recapitulare	145		
Evaluare	146		

UNITATEA 6

Funcții: observarea unor proprietăți ale funcțiilor utilizând lecturi grafice

1. Funcția afină	148
Portofoliu	155
2. Funcția de gradul al doilea	159
Investigație	169
3. Funcții obținute prin operații de înmulțire și/sau de împărțire, compunere cu funcții afine și funcții de gradul al doilea	170
4. Funcția putere cu exponent întreg	178
5. Funcția radical de ordin 2 și ordin 3	183
Portofoliu	188
6. Funcția exponențială (numărul irațional e)	189
Portofoliu	192
7. Funcția logaritmică (logaritmi, logaritm natural, logaritm zecimal)	193
Portofoliu	195
Recapitulare	196
Evaluare	198

UNITATEA 7

Elemente de trigonometrie și aplicații ale trigonometriei în geometrie

1. Cercul trigonometric: studiul funcțiilor sinus și cosinus pe intervalul $[0, 2\pi]$, studiul funcției tangentă pe intervalul $[0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$; deducerea valorilor funcțiilor trigonometrice pentru valori particulare: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$	199
1.1. Cercul trigonometric	200

1.2. Studiul funcțiilor sinus și cosinus pe intervalul $[0, 2\pi]$; deducerea valorilor funcțiilor trigonometrice pentru valori particulare: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \pi, 2\pi$	204
1.3. Studiul funcției tangentă pe $[0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$; deducerea valorilor funcției trigonometrice pentru valori particulare: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \pi, 2\pi$	209
2. Formule trigonometrice de bază: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\sin(2\pi - x) = -\sin x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\cos(2\pi - x) = \cos x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$	212
Investigație	217
3. Teorema cosinusului	218
4. Teorema sinusurilor	221
Portofoliu	223
5. Rezolvarea triunghiurilor oarecare	224
Proiect în echipe	227
6. Aria triunghiului; ariile unor suprafețe poligonale	228
Recapitulare	233
Evaluare	234
Recapitulare finală	235
Evaluare finală	237
Indicații și răspunsuri	238
Anexă	240

Ce vei învăța anul acesta la matematică?

CG.1 - Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

- IX.CS.1.1. Identificarea caracteristicilor tipurilor de numere utilizate în algebră și a formei de scriere a unui număr real în diverse contexte
- IX.CS.1.2. Identificarea propozițiilor elementare din care este alcătuit un enunț matematic
- IX.CS.1.3. Identificarea elementelor caracteristice ale unui polinom
- IX.CS.1.4. Identificarea elementelor specifice progresiilor în contexte variate
- IX.CS.1.5. Identificarea datelor și a relațiilor care apar în configurații geometrice date
- IX.CS.1.6. Identificarea unor proprietăți ale funcțiilor, pe baza reprezentării grafice a acestora
- IX.CS.1.7. Identificarea punctelor asociate unor măsuri în radiani pe cercul trigonometric și pe graficele funcțiilor trigonometrice

CG.2 - Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

- IX.CS.2.1. Prelucrarea unor date numerice din contexte matematice și/sau cotidiene
- IX.CS.2.2. Aplicarea relațiilor logice pentru prelucrarea datelor matematice folosind propoziții și cuantificatori
- IX.CS.2.3. Aplicarea unor reguli de calcul cu polinoame
- IX.CS.2.4. Efectuarea de calcule pentru determinarea elementelor progresiilor aritmetice sau geometrice, utilizând formule specifice
- IX.CS.2.5. Utilizarea datelor matematice de tip cantitativ, calitativ și structural dintr-o configurație geometrică
- IX.CS.2.6. Descrierea unor proprietăți ale unei funcții, utilizând reprezentarea grafică a acesteia
- IX.CS.2.7. Stabilirea unor caracteristici calitative/cantitative folosind funcții trigonometrice

CG.3 - Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

- IX.CS.3.1. Utilizarea algoritmilor specifici și a proprietăților operațiilor cu numere reale extrase din diverse contexte
- IX.CS.3.2. Utilizarea logicii matematice în formularea de propoziții și verificarea raționamentelor
- IX.CS.3.3. Utilizarea de algoritmi pentru efectuarea calculelor cu polinoame
- IX.CS.3.4. Utilizarea formulelor matematice pentru determinarea unor termeni și a sumelor unor termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice sau geometrice
- IX.CS.3.5. Aplicarea formulelor și a algoritmilor de bază ai geometriei analitice pentru a rezolva probleme teoretice și practice
- IX.CS.3.6. Utilizarea aplicațiilor digitale pentru reprezentarea grafică a unor funcții în vederea extragerii unor informații referitoare la valori relevante ale acestora
- IX.CS.3.7. Aplicarea formulelor trigonometrice de bază în rezolvarea problemelor

CG.4 Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

- IX.CS.4.1. Folosirea limbajului și a simbolurilor matematice pentru formularea relațiilor și a pașilor de rezolvare în contextul numerelor reale
- IX.CS.4.2. Exprimarea raționamentelor matematice în limbaj specific logicii matematice (propoziții/predicate, operații, cuantificatori)
- IX.CS.4.3. Utilizarea limbajului specific polinoamelor în redactarea demersului de rezolvare a problemelor în care intervin acestea
- IX.CS.4.4. Transpunerea în limbaj specific a unor situații cotidiene care conduc la progresii aritmetice sau geometrice
- IX.CS.4.5. Utilizarea limbajului specific în redactarea demersului de rezolvare a problemelor de geometrie analitică
- IX.CS.4.6. Transpunerea în limbaj matematic a informațiilor obținute din compararea unor grafice de funcții
- IX.CS.4.7. Exprimarea în limbajul trigonometriei a datelor și relațiilor din configurații geometrice, în contexte variate

CG.5 Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

- IX.CS.5.1. Interpretarea proprietăților numerelor reale în situații date
- IX.CS.5.2. Analizarea relațiilor logice dintre componentele unui enunț matematic asociat unei situații date
- IX.CS.5.3. Analizarea metodelor de rezolvare a unor probleme în studiul polinoamelor
- IX.CS.5.4. Analizarea unei situații cotidiene descrise printr-o progresie aritmetică sau geometrică
- IX.CS.5.5. Analizarea pozițiilor relative a dreptelor și/sau cercurilor, interpretând semnificația acestora în contexte practice
- IX.CS.5.6. Analizarea proprietăților unei funcții prin corelarea informațiilor desprinse din diferite reprezentări/descrieri ale acesteia
- IX.CS.5.7. Analizarea modului optim de determinare a arilor unor figuri geometrice folosind formule trigonometrice

CG.6 Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

- IX.CS.6.1. Modelarea unor situații concrete utilizând proprietăți ale numerelor reale
- IX.CS.6.2. Modelarea unei situații date utilizând elemente de logică matematică
- IX.CS.6.3. Modelarea matematică a unor probleme practice utilizând polinoame, în context intra și interdisciplinar (fizică, chimie, biologie)
- IX.CS.6.4. Modelarea matematică a unor situații cotidiene utilizând progresii
- IX.CS.6.5. Modelarea matematică a unor experimente din domeniul științelor naturii (biologie, fizică, chimie), utilizând elemente de geometrie analitică
- IX.CS.6.6. Modelarea prin intermediul funcțiilor a unor fenomene/contexte din viața cotidiană
- IX.CS.6.7. Modelarea matematică a unor situații practice care implică concepte trigonometrice

GHID DE UTILIZARE A MANUALULUI DIGITAL

Manualul digital reproduce integral versiunea tipărită, oferindu-le elevilor posibilitatea de a interacționa cu diverse elemente de conținut. Astfel, aceștia vor putea să vizioneze animații sau filme, să rezolve exerciții interactive și să navigheze prin manual.

Simboluri:



1. Elemente grafice (AMII statice):

imagini, informații și activități suplimentare.



2. Elemente video (AMII animate):

videoclipuri cu informații și activități suplimentare, curiozități.



3. Exerciții interactive (AMII interactive):

exerciții de alegere multiplă, de tip adevărat sau fals, de asociere, de completare etc.

Cum se folosește manualul digital?

1. Meniul superior



Mărire/micșorare – se mărește sau se micșorează fereastra.



Pagina următoare – se accesează pagina următoare paginii curente.



Căutare – pot fi efectuate căutări în manualul digital după cuvinte-cheie.



Salt la ultima pagină – se accesează ultima pagină a manualului digital.



Cuprins – deschide cuprinsul manualului digital.



Adnotări – deschide o galerie de instrumente, cu funcții diferite, ce permit operații în timp real: sublinieri, adnotări, încercuiri, demarcări, mascări, evidențieri etc.



Înapoi la prima pagină – se revine la prima pagină a manualului digital.



Tipărește pagini din manualul digital.



Pagina anterioară – se accesează pagina anterioară paginii curente.



Indicații – se accesează ecranul cu indicații.

2. Ajutor în utilizarea exercițiilor interactive (AMII interactive):

Deschide exercițiul interactiv dând click pe . Citește cerința, apoi utilizează mouse-ul și/sau tastatura pentru a rezolva exercițiile conform instrucțiunilor. Apasă butonul **Verifică** pentru a vedea dacă ai ales corect. Pentru toate tipurile de exerciții apare  în cazul răspunsului corect și  în cazul răspunsului greșit. Pentru a relua rezolvarea exercițiului, apasă butonul **Mai încercă** sau reîncarcă pagina.

3. Ajutor în utilizarea elementelor video (AMII animate):

Apasă butonul  pentru a deschide videoclipul. Butonul **Play (Vizualizare)** este localizat pe bara de jos a ferestrei, alături de **Volum** și de opțiunea **Afișare completă** pe ecran. Pentru a opri temporar videoclipul, apasă butonul **Pauză**, de pe bara de jos a ferestrei. Pentru a închide videoclipul, apasă butonul  din colțul din dreapta sus al ferestrei.

4. Ajutor în utilizarea elementelor grafice (AMII statice):

Apasă butonul . Imaginea se va deschide într-o fereastră nouă. Apasă butonul  din colțul din dreapta sus, pentru a închide imaginea.

1. Compară numerele reale a și b .
 - a) $a = 2\sqrt{50} - 3\sqrt{18} + \sqrt{98} - 3\sqrt{8}$, $b = \frac{11}{\sqrt{12}} - \frac{7}{5\sqrt{3}} + \frac{9}{\sqrt{300}}$;
 - b) $a = \left(-\frac{15}{49} : \frac{10}{21} + \frac{5}{21}\right) \cdot \frac{18}{17} : \left(-\frac{2}{7}\right)$, $b = \left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{5} + \frac{7}{15}\right] : 3\right\}^{-1} \cdot \frac{1}{2}$;
 - c) $a = 2^{15} : 8^3 \cdot 16^2 \cdot 4^{-5}$, $b = 9^5 : 27^2$.
2. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:
 - a) $-4 + 2x = 0$; c) $3 - 2(1 - 3x) = 3(1 + 2x) + 1$; e) $x^2 = 36$;
 - b) $1 - 4x = 6x - 7$; d) $\frac{3 + 4x}{2} - \frac{3x - 5}{12} = \frac{1 - 2x}{4} + 3$; f) $x^2 - x = 6$.
3. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } |2x + 1| \leq 5\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } x - 2(x + 1) < -3\}$.
 - a) Scrie mulțimile A și B sub formă de interval.
 - b) Determină suma numerelor întregi din mulțimea A .
 - c) Determină $A \cup B$ și $A \cap B$.
4. Pentru 4 caiete tip dictando și 5 caiete cu foaie velină, Ana a plătit la casă 174 de lei, iar pentru 3 caiete tip dictando și 2 caiete cu foaie velină, de același tip cu cele cumpărate de Ana, Maria a plătit 99 de lei. Determină prețul unui caiet tip dictando și prețul unui caiet cu foaie velină.
5. Se consideră expresia $E(x) = (x + 1)^2 + 3(x - 2)(x + 2) - 4(x + 1)(x + 2)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - a) Arată că $E(1)$ este un număr întreg mai mic decât -20 .
 - b) Determină mulțimea numerelor reale x pentru care $E(x) \geq 1$.
6. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{3x - 1}{x^2 - 4x + 4} - \frac{2x - 1}{x^2 - 4} + \frac{x + 3}{x + 2}\right) : \frac{x + 1}{x - 2}$, unde x este număr real, $x \neq -2$, $x \neq -1$ și $x \neq 2$. Arată că $E(x) = 1 - \frac{1}{x + 2}$, pentru orice număr real x , unde $x \neq -2$, $x \neq -1$ și $x \neq 2$.
7. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 4$.
 - a) Arată că $f\left(\frac{2}{3}\right) - f\left(-\frac{1}{3}\right) = 3$.
 - b) Reprezintă grafic funcția f în sistemul de axe ortogonale xOy .
 - c) Verifică dacă punctul $A(-1, -7)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy .
 - d) Determină numărul real m pentru care punctul $M(m, -8)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy .
 - e) Determină coordonatele punctului N de pe reprezentarea geometrică a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy , știind că acesta are coordonatele egale.
 - f) Determină distanța de la originea sistemului de axe ortogonale xOy la reprezentarea geometrică a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy .
 - g) Determină coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentările geometrice ale graficelor funcțiilor f și g , unde $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -2x + 5$.
 - h) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) \leq 9$.
8. Fie MNP un triunghi dreptunghic $\angle N = 90^\circ$ cu $MN = 12$ cm și $NP = 9$ cm. Punctul Q este proiecția ortogonală a punctului N pe dreapta MP .
 - a) Calculează aria triunghiului MNP .
 - b) Calculează lungimea segmentului NQ .
 - c) Calculează $\sin(\angle PNQ)$.
9. Fie ABC un triunghi dreptunghic ABC ($\angle A = 90^\circ$) cu $BC = 16$ cm și $\angle B = 30^\circ$. Punctul M este mijlocul segmentului BC . Arată că perimetrul triunghiului AMB este mai mic decât 32 cm.
10. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu $AB = 6$ cm și $VA = 5$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului VA și $AC \cap BD = \{O\}$.
 - a) Determină aria totală și volumul piramidei $VABCD$.
 - b) Demonstrează că dreapta OM este paralelă cu planul (VCD) .

Țimp de lucru: 45 de minute

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I

30 de puncte

30 de puncte	1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.
(10 p.)	A. Se consideră intervalele de numere reale $I = (-\infty, 3)$ și $J = [-2, +\infty)$. Intersecția intervalelor I și J este intervalul: a) $(-\infty, 3)$; b) $[-2, 3)$; c) $(-2, 3]$; d) $(3, +\infty)$.
(10 p.)	B. Dacă $a = \sqrt{3} + 1$ și $b = \sqrt{12}$, atunci $a^2 - b$ este egal cu: a) $\sqrt{12}$; b) $4 - \sqrt{12}$; c) 4; d) -1.
(10 p.)	C. Dacă ABC este un triunghi cu $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm și $BC = 5$ cm, atunci aria triunghiului ABC este egală cu: a) 6 cm ² ; b) 12 cm ² ; c) 15 cm ² ; d) 17 cm ² .

Subiectul al II-lea

60 de puncte

Scrie rezolvările complete.

45 de puncte	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -4x + 8$.
(10 p.)	a) Calculează $f\left(\frac{5}{2}\right) - 2f\left(-\frac{1}{4}\right)$.
(5 p.)	b) Verifică dacă punctul $A(-1, 4)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy .
(10 p.)	c) Determină distanța de la originea sistemului de axe ortogonale xOy la reprezentarea geometrică a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy .
(10 p.)	d) Determină coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentările geometrice ale graficelor funcțiilor f și g , unde $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x + 10$.
(10 p.)	e) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) > 4$.
15 puncte	2. Se consideră tetraedrul regulat ABCD cu $AB = 12$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor CD, respectiv AD.
(5 p.)	a) Determină volumul tetraedrului ABCD.
(10 p.)	b) Determină lungimea segmentului MN.

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua cunoștințele dobândite în anul școlar precedent.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	5 foarte bine	4 bine	3 mediu	2 slab	1 foarte slab
Mi-a fost ușor să rezolv exercițiile.					
Am înțeles criteriile de rezolvare.					
Mi-am amintit conținuturile învățate.					

1

Mulțimea numerelor reale

- 1. Structura algebrică: operații algebrice cu numere reale, proprietăți; formule de calcul prescurtat:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$; raționalizarea numitorilor de forma $a \pm \sqrt{b}$, $b > 0$; modulul unui număr real

- 2. Structura de ordine: compararea și ordonarea numerelor reale; aproximări prin lipsă sau prin adaos; partea întreagă și partea fracționară a unui număr real





1. Structura algebrică: operații algebrice cu numere reale, proprietăți; formule de calcul prescurtat:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2); \text{ raționalizarea numitorilor de forma } a \pm \sqrt{b}, b > 0; \text{ modulul unui număr real}$$

Îmi amintesc

Se consideră mulțimea $A = \left\{ \sqrt{6}; 0,(3); -\frac{1}{3}; \sqrt{16}; -\sqrt{3^2}; -\sqrt{15}; \frac{12}{4}; \frac{7}{3}; (-4)^2; -\sqrt{1\frac{9}{16}} \right\}$.
Determină mulțimile: $A \cap \mathbb{N}, A \cap \mathbb{Z}, A \cap \mathbb{Q}, A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), A \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}), A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$.

Învăț

Din clasele anterioare vă sunt cunoscute următoarele mulțimi de numere:

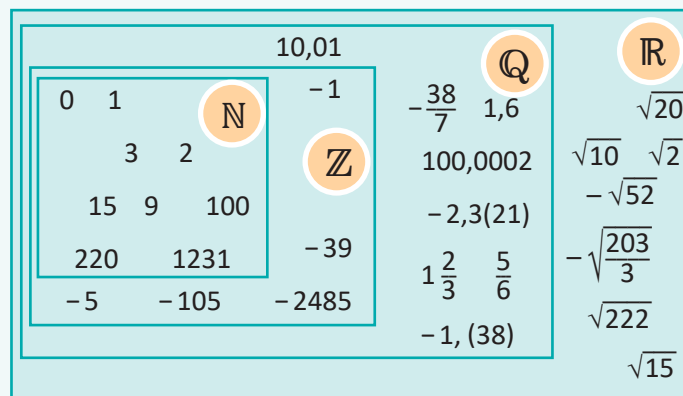
- Mulțimea numerelor naturale: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$;
- Mulțimea numerelor întregi: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$;
- Mulțimea numerelor raționale: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$;
- Mulțimea numerelor iraționale: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
- Mulțimea numerelor reale: $\mathbb{R}$.

Ținând cont de modul în care a fost definită mulțimea numerelor reale și de relațiile de incluziune cunoscute, avem:

$$\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset;$$

$$\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R};$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$



OBSERVAȚIE.

Orice număr real se reprezintă printr-o fracție zecimală infinită (periodică sau neperiodică) $a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ (unde $a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, a_2, a_3, \dots \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$).

1. Operații algebrice cu numere reale. Proprietăți

Pe mulțimea numerelor reale s-au definit două operații algebrice: adunarea și înmulțirea.

1.1. Adunarea numerelor reale

Operația de adunare pe $\mathbb{R}$ asociază oricărei perechi de numere reale (x, y) un unic număr real notat $x + y$, numit **suma numerelor reale x și y** .

Proprietățile adunării numerelor reale

- Adunarea numerelor reale este **comutativă**:

$$a + b = b + a, \text{ pentru orice } a, b \in \mathbb{R}.$$

- Adunarea numerelor reale este **asociativă**:

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \text{ pentru orice } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

- Numărul real **0** este **element neutru** pentru adunarea numerelor reale:

$$a + 0 = 0 + a, \text{ pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

- Pentru orice număr real nenul a , există un număr real nenul, notat $-a$ și numit **opusul lui a** , astfel încât:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

OBSERVAȚII.

1. Opusul numărului real 0 este 0.

2. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$, se definește **diferența dintre x și y** , notată $x - y$, ca fiind **suma dintre x și opusul lui y** .

$$x - y = x + (-y), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}$$

Propoziție. Pentru orice numere reale a și b , unde $a \in \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, avem $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Demonstrație:

Fie $a \in \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Presupunem că $a + b \in \mathbb{Q}$. Notând $x = a + b$, obținem $b = x - a$. Cum $a, x \in \mathbb{Q}$, rezultă că $x - a \in \mathbb{Q}$ (diferența a două numere raționale este un număr rațional). Deci $b = x - a \in \mathbb{Q}$, ceea ce contrazice ipoteza $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Presupunerea că $a + b \in \mathbb{Q}$ este falsă și, în concluzie, $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.2. Înmulțirea numerelor reale

Operația de înmulțire pe $\mathbb{R}$ asociază oricărei perechi (x, y) de numere reale un unic număr real notat $x \cdot y$, numit **produsul numerelor reale x și y** .

Proprietățile înmulțirii numerelor reale

- Înmulțirea numerelor reale este **comutativă**:

$$a \cdot b = b \cdot a, \text{ pentru orice } a, b \in \mathbb{R};$$

- Înmulțirea numerelor reale este **asociativă**:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \text{ pentru orice } a, b, c \in \mathbb{R};$$

- Numărul real **1** este **element neutru** pentru înmulțirea numerelor reale:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \text{ pentru orice } a \in \mathbb{R};$$

- Pentru orice număr real nenul a , există un număr real nenul, notat $\frac{1}{a}$ și numit **inversul lui a** , astfel încât:

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1.$$

- Înmulțirea numerelor reale este **distributivă față de adunarea numerelor reale**:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \text{ pentru orice } a, b, c \in \mathbb{R};$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \text{ pentru orice } a, b, c \in \mathbb{R}.$$



OBSERVAȚII.

1. Numărul real 0 nu are invers.
2. Pentru $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$, se definește **câtul dintre x și y** , notat $\frac{x}{y}$, ca fiind **produsul dintre x și inversul lui y** .

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$$

Din clasele anterioare ne amintim:

- Fie a un număr real și n un număr natural, $n > 1$. Puterea a n -a a numărului real a este $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}$

Prin convenție:

$$a^0 = 1, \text{ pentru oricare număr real nenul } a;$$

$$a^1 = a, \text{ pentru oricare număr real } a.$$

Nu se definește 0^0 .

- Pentru numărul real nenul a și numărul natural nenul n se definește $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- Fie $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$. Se numește **radical din x (sau rădăcina pătrată a numărului x)** numărul real $y \geq 0$ cu proprietatea $y^2 = x$. Se notează $y = \sqrt{x}$.

Propoziție. Fie $a \in \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Atunci:

$$a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Leftrightarrow a \neq 0;$$

$$a \cdot b \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow a = 0.$$

OBSERVAȚIE.

Dacă $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a + b, a - b, a \cdot b, \frac{a}{b}$ pot fi numere raționale sau iraționale.

EXEMPLE:

1. Dacă $a = -2 + \sqrt{2}$ și $b = -\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a + b = -2 + \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = -2 \in \mathbb{Q}$.
2. Dacă $a = 1 + \sqrt{3}$ și $b = \sqrt{3}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a + b = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
3. Dacă $a = 1 + \sqrt{5}$ și $b = \sqrt{5}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a - b = 1 + \sqrt{5} - \sqrt{5} = 1 \in \mathbb{Q}$.
4. Dacă $a = \sqrt{2}$ și $b = -\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a - b = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
5. Dacă $a = \sqrt{3}$ și $b = 3\sqrt{3}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a \cdot b = \sqrt{3} \cdot (3\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{9} = 9 \in \mathbb{Q}$.
6. Dacă $a = \sqrt{10}$ și $b = \sqrt{5}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a \cdot b = \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10 \cdot 5} = \sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
7. Dacă $a = 3\sqrt{2}$ și $b = \sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $\frac{a}{b} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 \in \mathbb{Q}$.
8. Dacă $a = \sqrt{30}$ și $b = \sqrt{6}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{30}{6}} = \sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Operațiile cu numere reale se efectuează astfel:

- Dacă într-un calcul fără paranteze se întâlnesc numai operații de același ordin, acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise, aplicând proprietățile operațiilor, dacă este cazul.
- Dacă într-un calcul fără paranteze se întâlnesc operații de ordine diferite, se efectuează întâi operațiile de ordinul III (ridicarea la putere și extragerea rădăcinii pătrate), apoi operațiile de ordinul II (înmulțirea și împărțirea) și, după acestea, operațiile de ordinul I (adunarea și scăderea).

- Dacă într-un calcul se întâlnesc paranteze rotunde, paranteze drepte, acolade, se efectuează întâi operațiile din parantezele rotunde, apoi operațiile din parantezele drepte și apoi operațiile din acolade. După efectuarea calculelor din parantezele rotunde, acoladele devin paranteze drepte, iar parantezele drepte devin paranteze rotunde.

2. Formule de calcul prescurtat

Din clasa a VIII-a ne amintim următoarele formule de calcul prescurtat:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b;$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b), \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b.$$

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ două numere reale. Atunci:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b) = a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Așadar:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b.$$

EXEMPLE:

$$1. (2x + 3)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 + 3^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27, x \in \mathbb{R};$$

$$2. (1 + \sqrt{3})^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 1 \cdot (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = 1 + 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3} = 10 + 6\sqrt{3};$$

$$3. (-x + 2)^3 = (-x)^3 + 3 \cdot (-x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot (-x) \cdot 2^2 + 2^3 = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8, x \in \mathbb{R};$$

sau

$$(-x + 2)^3 = (2 - x)^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot x + 3 \cdot 2 \cdot x^2 - x^3 = 8 - 12x + 6x^2 - x^3 = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8, x \in \mathbb{R};$$

$$4. (-x - 1)^3 = (-x)^3 - 3 \cdot (-x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (-x) \cdot 1^2 - 1^3 = -x^3 - 3x^2 - 3x - 1, x \in \mathbb{R};$$

sau

$$(-x - 1)^3 = [(-1)(x + 1)]^3 = (-1)^3 (x + 1)^3 = (-1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = -x^3 - 3x^2 - 3x - 1, x \in \mathbb{R}.$$

Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \Rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \Rightarrow a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3a^2b + 3ab^2 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = (a - b)[(a - b)^2 + 3ab] = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab) = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Așadar:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b;$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b.$$



EXEMPLE:

- $8x^3 + 1 = (2x)^3 + 1^3 = (2x + 1)[(2x)^2 - 2x \cdot 1 + 1^2] = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1), x \in \mathbb{R};$
- $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + x \cdot 3 + 3^2) = (x - 3)(x^2 + 3x + 9), x \in \mathbb{R}.$

3. Raționalizarea numitorilor de forma $a \pm \sqrt{b}, b > 0$

O expresie care conține radicali se numește **conjugată** unei alte expresii care conține radicali, dacă produsul lor se poate scrie fără radicali. În acest caz, cele două **expresii** se numesc **conjugate**.

OBSERVAȚII.

O conjugată a unei expresii care conține radicali se obține folosind formula de calcul prescurtat:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2, \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b.$$

Dacă $a, b \in \mathbb{R}, b > 0$, atunci $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$, de unde rezultă că **expresiile $a + \sqrt{b}$ și $a - \sqrt{b}$ sunt conjugate**.

EXEMPLE:

- O conjugată a expresiei $\sqrt{5}$ este $\sqrt{5}$.
- Expresiile $2 + \sqrt{7}$ și $2 - \sqrt{7}$ sunt conjugate.

OBSERVAȚIE.

Dacă $a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0, a \neq b$ și $c, d \in \mathbb{R}^*$, atunci $(c\sqrt{a} + d\sqrt{b})(c\sqrt{a} - d\sqrt{b}) = c^2a - d^2b$, de unde rezultă că **expresiile $c\sqrt{a} + d\sqrt{b}$ și $c\sqrt{a} - d\sqrt{b}$ sunt conjugate**.

EXEMPLE:

- Expresiile $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$ și $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$ sunt conjugate.
- Expresiile $3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}$ și $3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}$ sunt conjugate.
- Expresiile $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ și $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ sunt conjugate.

Operația de eliminare a radicalului/radicalilor de la numitorul unei fracții se numește **raționalizarea numitorului**. Pentru a raționaliza numitorul unei fracții care conține radicali, se amplifică fracția cu o conjugată a numitorului.

EXEMPLE:

- $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$
- $\frac{10}{3\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{3 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{3 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{5}}{3};$
- $\frac{3}{2 - \sqrt{3}} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = 3(2 + \sqrt{3});$
- $\frac{3}{5 + \sqrt{19}} = \frac{3(5 - \sqrt{19})}{(5 + \sqrt{19})(5 - \sqrt{19})} = \frac{3(5 - \sqrt{19})}{25 - 19} = \frac{3(5 - \sqrt{19})}{6} = \frac{5 - \sqrt{19}}{2};$
- $\frac{11}{2\sqrt{3} + 1} = \frac{11(2\sqrt{3} - 1)}{(2\sqrt{3} + 1)(2\sqrt{3} - 1)} = \frac{11(2\sqrt{3} - 1)}{(2\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{11(2\sqrt{3} - 1)}{12 - 1} = \frac{11(2\sqrt{3} - 1)}{11} = 2\sqrt{3} - 1;$
- $\frac{1}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{18 - 12} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6}.$



4. Modulul unui număr real (valoarea absolută a unui număr real)

Din clasele anterioare, știm că **axa numerelor este o dreaptă pe care s-a fixat un punct O, numit origine, un sens pozitiv și o unitate de măsură**. Oricărui număr real x îi putem asocia pe axa numerelor un unic punct. Vom spune că punctul respectiv are coordonata x . De exemplu, în figura 1, punctul A are coordonata 1 (scriem A(1) și citim „punctul A de coordonată 1”), punctul B are coordonata -3 (scriem B(-3) și citim „punctul B de coordonată -3 ”), iar punctul C are coordonata $\sqrt{5}$ (scriem C($\sqrt{5}$) și citim „punctul C de coordonată $\sqrt{5}$ ”).

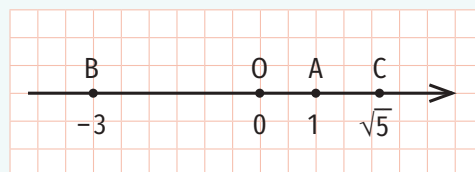


Figura 1

Distanța de la originea axei numerelor la punctul prin care este reprezentat un număr real x pe axa numerelor se numește modulul numărului real x . Se notează $|x|$.

Modulul unui număr real x se mai numește și valoarea absolută a numărului x .

EXEMPLE:

1. Modulul numărului real -3 este egal cu distanța de la punctul O la punctul B(-3), deci $|-3| = 3$ (figura 1).
2. Modulul numărului real $\sqrt{5}$ este egal cu distanța de la punctul O la punctul C($\sqrt{5}$), deci $|\sqrt{5}| = \sqrt{5}$ (figura 1).

OBSERVAȚIE.

Ținând cont de definiția modulului unui număr real, avem:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

EXEMPLE:

1. $|-7| = 7$;
2. $|\frac{-2}{3}| = \frac{2}{3}$;
3. $|\sqrt{10}| = \sqrt{10}$;
4. $|-2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$.

Proprietățile modulului unui număr real

- $|x| \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $|x| = |-x|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ sau } x = -y$;
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$;
- $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$;
- $|x + y| \leq |x| + |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ (inegalitatea triunghiului);
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Vom demonstra în continuare proprietatea $|x + y| \leq |x| + |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Dacă $x = 0$, atunci $|x + y| = |y|$, $|x| = 0$, $|x| + |y| = |y|$, deci $|x + y| = |x| + |y|$, pentru orice număr real y .

Dacă $y = 0$, atunci $|x + y| = |x|$, $|y| = 0$, $|x| + |y| = |x|$, deci $|x + y| = |x| + |y|$, pentru orice număr real x .

Presupunem $x \neq 0$ și $y \neq 0$. Se disting patru cazuri:

- a) Dacă $x > 0$ și $y > 0$, atunci $x + y > 0$ și $|x| = x$, $|y| = y$, $|x| + |y| = x + y$, $|x + y| = x + y$, de unde rezultă $|x + y| = |x| + |y|$.

b) Dacă $x < 0$, $y < 0$, atunci $x + y < 0$ și $|x| = -x$, $|y| = -y$, $|x| + |y| = (-x) + (-y)$, $|x + y| = -(x + y)$, de unde rezultă $|x + y| = |x| + |y|$.

c) Dacă $x > 0$ și $y < 0$, atunci $|x| = x$, $|y| = -y$, $|x| + |y| = x + (-y)$.

În acest caz avem două situații: $x + y \geq 0$ sau $x + y < 0$.

- Dacă $x + y \geq 0$, atunci $|x + y| = x + y = |x| + y \leq |x| + |y|$.
- Dacă $x + y < 0$, atunci $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = (-x) + |y| \leq |y| \leq |x| + |y|$.

d) Dacă $x < 0$ și $y > 0$, demonstrația se face analog cazului c).

Propoziție. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și punctele A și B pe axa numerelor care au coordonatele a și, respectiv, b . Atunci distanța dintre punctele A și B este egală cu $|a - b|$.

Demonstrație:

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și punctele A și B pe axa numerelor, care au coordonatele a și, respectiv, b . Atunci distanța dintre punctele A și B este lungimea segmentului AB.

Dacă $a = b$, atunci distanța dintre punctele A și B este egală cu 0, deci $AB = |a - b|$.

Presupunem $a < b$. Se disting trei cazuri:

a) Dacă $a < 0$ și $b < 0$, atunci $AB = OA - OB = |a| - |b| = (-a) - (-b) = -(a - b) = |a - b|$.

b) Dacă $a > 0$ și $b > 0$, atunci $AB = OB - OA = |b| - |a| = b - a = -(a - b) = |a - b|$.

c) Dacă $a < 0$ și $b > 0$, atunci $AB = OA + OB = |a| + |b| = (-a) + b = -(a - b) = |a - b|$.

Așadar, $AB = |a - b|$.

ȘTIAI CĂ...?

Raportul dintre lungimea și lățimea unei coli de hârtie A4 este exact $\sqrt{2}$, fapt care permite ca, prin tăierea sau plierea foi în două, astfel încât lățimile să se suprapună, noile dimensiuni (A5) să păstreze exact aceleași proporții ca originalul.

Exercițiu rezolvat

Fie x un număr real nenul, cu proprietatea $x + \frac{1}{x} = 3$. Determină $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 &= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x^3} = x^3 + 3x + 3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = \\ &= x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 18 \end{aligned}$$

Aplic

1. Dă exemple de numere naturale n pentru care:

a) $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$;

b) $\sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. Dă exemple de numere $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care:

a) $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$;

b) $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3. Dă exemple de două numere $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ cu proprietatea:

a) $a + b \in \mathbb{Q}$;

b) $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

c) $a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

d) $a \cdot b \in \mathbb{Q}$.

4. Se consideră mulțimea:



$$A = \left\{ -2\sqrt{3}; 1,2(3); -\frac{5}{4}; \sqrt{25}; -\sqrt{(-2)^2}; -\sqrt{10}; \frac{20}{5}; \frac{6}{5}; (-3)^2; \sqrt{2\frac{7}{9}} \right\}.$$

Determină mulțimile: $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $A \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$, $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$.

5. Este posibil ca media aritmetică a trei numere naturale să fie egală cu 7,5? Justifică.

6. Determină a 100-a zecimală a numărului a .

a) $a = 1,2$; b) $a = \frac{5}{3}$; c) $a = \frac{5}{18}$; d) $a = \frac{3}{7}$.

7. Determină suma primelor 50 de zecimale ale numărului real a .

a) $a = \frac{50}{9}$; b) $a = \frac{17}{6}$; c) $a = \frac{13}{14}$.

8. Demonstrează că numărul a este natural.

a) $a = \left(\frac{1}{12} - \frac{2}{3} + \frac{5}{24}\right) \cdot \frac{4}{9} + \frac{7}{6}$; b) $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$.

9. Determină media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b .

a) $a = \left[\left(-\frac{15}{49}\right) : \frac{10}{21} + \frac{5}{21}\right] \cdot \frac{18}{17} : \left(-\frac{2}{7}\right)$, $b = \left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{5} + \frac{7}{15}\right] : 3\right\}^{-1} \cdot \frac{1}{2}$;

b) $a = 2^{15} : 8^3 \cdot 16^2 \cdot 4^{-5}$; $b = 9^5 \cdot 27^2 : 81 \cdot \left(-\frac{1}{243}\right)^{-2}$;

c) $a = \sqrt{3^2 + 4^2}$, $b = \sqrt{250 + 10\sqrt{215 + \sqrt{64 + 2\sqrt{324}}}}$;

d) $a = (9 + 4\sqrt{5})^2$, $b = (4\sqrt{5} - 9)^2$.

e) $a = (3 + \sqrt{3})^3$, $a = (3 - \sqrt{3})^3$;

f) $a = (2 + \sqrt{5})^3$, $a = (\sqrt{5} - 2)^3$.

10. Se consideră numerele reale a și b . Arată că $\sqrt{a \cdot b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$a = 2,1(6) - \frac{31}{8} + 1,08(3)$ și $b = 0,(6) \cdot 1,5 + 3,25 : 0,13 - \left(\frac{1}{30}\right)^{-1}$.

11. Raționalizează numitorii următoarelor fracții:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; c) $\frac{1}{2 - \sqrt{5}}$; e) $\frac{10}{\sqrt{15} - \sqrt{10}}$; g) $\frac{11}{2\sqrt{3} + 1}$; i) $\frac{12}{2\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}$;

b) $\frac{6}{\sqrt{12}}$; d) $\frac{6}{3 + \sqrt{6}}$; f) $\frac{7}{\sqrt{10} + \sqrt{3}}$; h) $\frac{10}{3\sqrt{5} - 5}$; j) $\frac{17}{3\sqrt{6} + 2\sqrt{5}}$.

12. Stabilește dacă a este număr rațional sau număr irațional.

a) $\left(\frac{5}{\sqrt{18}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{11}{\sqrt{72}}\right) : 3$; c) $\frac{10}{8\sqrt{2} - 6\sqrt{3}} + \frac{3}{6\sqrt{2} + 5\sqrt{3}} + \frac{2}{4\sqrt{3} - 7}$;

b) $\frac{8}{\sqrt{6} + 2} + \frac{3}{\sqrt{3} - 2} + \frac{3}{2\sqrt{6} + 3\sqrt{3}}$; d) $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 5} - \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{3} - 3} - \frac{5\sqrt{2}}{2 + \sqrt{3}}\right) : (7\sqrt{3} - 26)$.

13. Determină valorile numărului real x pentru care:

a) $|x| = 5$; d) $|2x + 1| + |4x^2 - 1| = 0$; g) $|3x - 2| + 2 \cdot |2 - 3x| = 9$;

b) $|2x - 1| = 7$; e) $|x - 1| + |x + 2| = 0$; h) $|x^2 - x| = 2$;

c) $\left|\frac{1 - 3x}{4}\right| = 5$; f) $|x| + |-2x| = 5$; i) $||x - 1| - 2| = 3$.

14. Două puncte de pe axa numerelor reale au coordonatele a ($a \in \mathbb{R}$) și, respectiv, 3, iar distanța dintre acestea este egală cu 5. Determină valorile numărului real a .

15. Două puncte de pe axa numerelor reale au coordonatele a ($a \in \mathbb{R}$) și, respectiv, -5, iar distanța dintre acestea este egală cu 7. Determină valorile numărului real a .

16. Demonstrează că $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pentru orice număr natural nenul n .

a) $a = \sqrt{5^n + 3}$;

c) $a = \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}$;

b) $a = \sqrt{4n + 3}$;

d) $a = \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n + 8}$, $n \geq 5$.

ȘTIAI CĂ...?

• Dacă raportul dintre lungimea și lățimea unei coli de hârtie ar fi diferit de $\sqrt{2}$, procesul de fotocopiare ar fi ineficient: la mărirea sau micșorarea unui document, imaginea s-ar deforma sau marginile nu ar fi egale.

• Datorită acestui raport ($\sqrt{2}$), orice dispozitiv care redimensionează un conținut vizual de la un format la altul trebuie doar să aplice un factor de scalare constant, cu scopul de a umple perfect pagina.



PROVOCARE

Demonstrează că singurul raport dintre laturile unui dreptunghi care permite păstrarea proporțiilor prin pliere, astfel încât lățimile să se suprapună, este $\sqrt{2}$.

NUMERE IRAȚIONALE
CELEBRE. NUMĂRUL π

- Valoarea raportului dintre lungimea unui cerc și lungimea diametrului acestuia este un număr irațional, care se notează cu π ($\pi = 3,14159265\dots$), cunoscut sub denumirea „constanta lui Arhimede”.
- Aproximativ în anul 250 î.H., **Arhimede** a demonstrat că $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.
- Notăția π a fost introdusă în anul 1706 de matematicianul galez **William Jones** (1675-1749).
- În anul 1768, **Johann Heinrich Lambert** (1728-1777), matematician, fizician, astronom și filozof important din secolul al XVIII-lea, a demonstrat că numărul π este irațional.
- În anul 2016, omul de știință elvețian **Peter Trueb** a determinat primele 22 459 157 718 361 de zecimale ale numărului π . În acest scop, el a utilizat un server și un sistem de stocare echipat cu câteva zeci de hard-diskuri.
- Ziua Mondială a numărului π este celebrată la 14 martie.

17. Fie a și b numere reale astfel încât $a + b = 5$ și $ab = 6$. Determină $a^3 - b^3$ și $a^3 + b^3$.
18. Fie a și b numere reale. Determină $a \cdot b$, știind că:
 - a) $a^3 + b^3 = 22$ și $a + b = 1$;
 - b) $a^3 - b^3 = -19$ și $a - b = -1$.
19. Fie a și b numere reale astfel încât $a - b = 1$ și $a^3 - b^3 = 19$. Determină $a^2 + b^2$.
20. Fie a și b numere reale astfel încât $a + b = -1$ și $a^3 + b^3 = -61$. Determină $a^2 + b^2$.
21. Fie x un număr real nenul cu proprietatea $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2}$. Determină $x^3 + \frac{1}{x^3}$.
22. Fie x un număr real nenul cu proprietatea $x - \frac{1}{x} = 2$. Determină $x^3 - \frac{1}{x^3}$.
23. Descompune în factori ($x \in \mathbb{R}$):
 - a) $x^3 + x^2 - 2x - 8$;
 - b) $8x^3 - 12x^2 - 6x + 1$;
 - c) $x^3 - x - 24$.
24. Se consideră expresia $E(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, unde x este număr real. Demonstrează că, dacă $E(x) = E(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ și $x \neq y$, atunci $(x + y)(x + y + 1) = xy - 1$.
25. Demonstrează că $\frac{n^3 - 1}{n - 1} + \frac{n^3 + 1}{n + 1} \in \mathbb{N}$, pentru orice $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$.
26. Fie a și b numere reale, astfel încât $a + b$ și $a - b$ să fie numere raționale. Sunt a, b, ab numere raționale? Justifică.
27. Fie a și b numere raționale astfel încât $a + b\sqrt{3} = 0$. Demonstrează că $b = 0$.

INDICAȚII PENTRU REALIZAREA PORTOFOLIULUI

Alege o mapă sau un dosar și adaugă o primă pagină cu numele disciplinei și cu datele tale de identificare (numele tău complet, clasa, școala).

Pe parcursul anului școlar, completează mapa/dosarul cu:

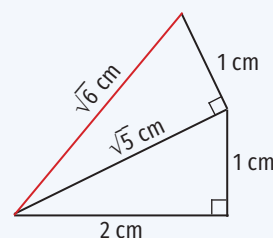
- temele (individuale sau realizate în grup);
- proiectele;
- fișele de lucru;
- fișele de autoevaluare etc.

Criteriile de organizare și de evaluare a portofoliului se vor stabili la nivelul clasei.

Portofoliu

Cu ajutorul instrumentelor geometrice, construiește segmente care să aibă următoarele lungimi:

- $\sqrt{2}$ cm;
- $\sqrt{14}$ cm;
- $\sqrt{3}$ cm;
- $\sqrt{15}$ cm;
- $\sqrt{13}$ cm;
- $\sqrt{42}$ cm.



2. Structura de ordine: compararea și ordonarea numerelor reale; aproximări prin lipsă sau prin adaos; partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

Îmi amintesc



- Determină numărul întreg n cu proprietatea $n < a < n + 1$.

a) $a = 2,53$;	c) $a = \sqrt{153}$;	e) $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$;	g) $a = 7 - 4\sqrt{5}$;
b) $a = -0,3$;	d) $a = -\sqrt{83}$;	f) $a = 2 + \sqrt{10}$;	h) $a = \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$.
- Pe axa numerelor se consideră punctele distincte două câte două $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ și $D(d)$, în această ordine, unde a, b, c, d sunt numere reale nenule.
 - Scrie în ordine crescătoare numerele a, b, c, d cu ajutorul simbolurilor matematice.
 - Precizează care dintre numerele a, b, c, d sunt negative, știind că punctul B este situat în stânga punctului O , iar punctul C este situat în dreapta punctului O .



Învăț

1. Compararea și ordonarea numerelor reale

Definiția 1. Fie $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ și $b = b_0, b_1 b_2 b_3 \dots$ două numere reale, unde $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$, iar $a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$.

Spunem că numărul real a este egal cu numărul real b dacă $a_i = b_i$, pentru orice număr natural i .

Spunem că numărul real a este mai mic decât numărul real b , dacă există un număr natural k astfel încât $a_k < b_k$ și $a_i = b_i$, pentru orice număr natural $i < k$. Scriem $a < b$.

În acest caz, putem spune că b este mai mare decât a și scriem $b > a$.

EXEMPLU:

$2,364 < 2,39$ deoarece $2 = 2$, $3 = 3$ și $6 < 9$;

OBSERVAȚII.



- Dacă $a < 0$, spunem că numărul a este negativ. Evident, $a < 0$ dacă și numai dacă $a_0 < 0$.
- Dacă $a > 0$, spunem că numărul a este pozitiv. Evident, $a > 0$ dacă și numai dacă $a_0 > 0$.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Știm că oricărui număr real i se asociază un punct pe axa numerelor. Fie A și B punctele asociate numerelor a și, respectiv, b . Atunci:

- $a < b$ dacă și numai dacă, pe axa numerelor, punctul A este la stânga punctului B .
- $a < 0$ dacă și numai dacă, pe axa numerelor, punctul A este la stânga punctului O (originea axei numerelor).
- $a > 0$ dacă și numai dacă, pe axa numerelor, punctul A este la dreapta punctului O .

Oricare ar fi numerele reale a și b , are loc una și numai una dintre relațiile $a < b$, $a = b$, $a > b$ (**legea de trihotomie**). Așadar, dacă a nu este mai mare decât b , atunci a este mai mic sau egal cu b , adică $a \leq b$. În loc de $a \leq b$ se poate scrie $b \geq a$.

Relația „ $\leq$ ” definită pe $\mathbb{R}$ are următoarele proprietăți:

- **Reflexivitatea:** $a \leq a$, pentru orice număr real a .
- **Antisimetria:** Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ și $b \leq a$, atunci $a = b$.
- **Tranzitivitatea:** Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ și $b \leq c$, atunci $a \leq c$.

Relația „ $\leq$ ” definită pe $\mathbb{R}$, care satisface aceste proprietăți, se numește **relație de ordine pe $\mathbb{R}$** .

Considerând că pentru orice numere reale a și b avem $a \leq b$ sau $b \leq a$, spunem că **relația de ordine pe $\mathbb{R}$ este totală**.

2. Aproximări prin lipsă sau prin adaos

În practică, valorile exacte ale mărimilor sunt rareori cunoscute, deoarece la orice instrument de măsură apare o anumită eroare. De aceea, în locul valorilor exacte ale mărimilor, de cele mai multe ori suntem nevoiți să folosim valorile lor aproximative. În general, o mărime poate fi reprezentată printr-o fracție zecimală infinită, dar în practică se utilizează doar un număr finit de zecimale, ceea ce reprezintă o valoare aproximativă a mărimii respective.

Fie $a, b, k \in \mathbb{R}$, $k > 0$.

- Numărul b aproximează prin lipsă numărul a cu o eroare mai mică decât k , dacă $b \leq a \leq b + k$ (adică $0 \leq a - b \leq k$).
- Numărul b aproximează prin adaos numărul a cu o eroare mai mică decât k , dacă $b - k \leq a \leq b$.

În practică se folosesc îndeosebi aproximări cu o eroare mai mică decât $1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ etc.

Se consideră $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ un număr real.

- Dacă $a > 0$, aproximările zecimale ale lui a cu o eroare mai mică decât 10^{-n} , $n \in \mathbb{N}^*$, sunt:
 - prin lipsă: $a'_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$;
 - prin adaos: $a''_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n + 10^{-n}$.
- Dacă $a < 0$, aproximările zecimale ale lui a cu o eroare mai mică decât 10^{-n} , $n \in \mathbb{N}^*$, sunt:
 - prin lipsă: $a'_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n - 10^{-n}$;
 - prin adaos: $a''_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$.

OBSERVAȚIE.

Fie $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ un număr real și a'_n, a''_n aproximările zecimale ale lui a prin lipsă, respectiv prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-n} , $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:

- $a'_n, a''_n \in \mathbb{Q}$;
- $a'_n \leq a \leq a''_n$;
- $a'_n + 10^{-n} = a''_n$.

EXEMPLU:

Număr	Aproximare prin lipsă cu eroare mai mică decât:					Aproximare prin adaos cu eroare mai mică decât:				
	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
2,1245787	2	2,1	2,12	2,124	2,1245	3	2,2	2,13	2,125	2,1246
-5,245368	-6	-5,3	-5,25	-5,246	-5,2454	-5	-5,2	-5,24	-5,245	-5,2453

Aproximarea zecimală prin lipsă, cu o eroare mai mică decât 10^{-n} , $n \in \mathbb{N}^*$, a numărului real $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ se mai numește și trunchierea după a n -a zecimală a numărului a .

Rotunjirea la a n -a zecimală a numărului real $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ este cel mai apropiat de a dintre a'_n și a''_n .

EXEMPLE:

1. Rotunjirea la a patra zecimală a numărului real $\sqrt{2}$ este 1,4142, deoarece $\sqrt{2} = 1,414235\dots$, iar aproximările sale prin lipsă, respectiv prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-4} , sunt 1,4142 și 1,4143. Dintre acestea, 1,4142 este mai apropiat de $\sqrt{2}$.
2. Rotunjirea la a treia zecimală a numărului real $-1,2347$ este $-1,235$, deoarece aproximările sale prin lipsă, respectiv prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-3} , sunt $-1,235$ și $-1,234$. Dintre acestea, $-1,235$ este mai apropiat de $-1,2347$.
3. Rotunjirea la a doua zecimală a numărului real $-0,7219$ este $-0,72$, deoarece aproximările sale prin lipsă, respectiv prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-2} , sunt $-0,73$ și $-0,72$. Dintre acestea, $-0,72$ este mai apropiat de $-0,7219$.

3. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

Știm că, pentru orice număr real a , există și este unic un număr întreg n astfel încât $n \leq a < n + 1$. Numărul întreg n reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Definiția 1. Partea întreagă a numărului real a este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu a . Se notează cu $[a]$.

EXEMPLE:

1. $[0] = 0$;
2. $[7] = 7$;
3. $[-3] = -3$;
4. $[2,51] = 2$, deoarece $2 < 2,51 < 3$;
5. $\left[-\frac{5}{6}\right] = -1$, deoarece $-1 < -\frac{5}{6} < 0$;
6. $[-\sqrt{7}] = -3$, deoarece $-3 < -\sqrt{7} < -2$.

OBSERVAȚII.

1. $[a] \leq a < [a] + 1$, pentru orice număr real a .
2. $a - 1 < [a] \leq a$, pentru orice număr real a .
3. $[a + n] = [a] + n$, pentru orice număr real a și orice număr întreg n .

Definiția 2. Partea fracționară a numărului real a este diferența dintre numărul a și partea sa întreagă. Se notează cu $\{a\}$.

Așadar, $\{a\} = a - [a]$, pentru orice număr real a .

Cum $[a] \leq a < [a] + 1$, rezultă că $0 \leq a - [a] < 1$, deci $0 \leq \{a\} < 1$, pentru orice număr real a .

EXEMPLE:

1. $\{7\} = 7 - [7] = 7 - 7 = 0$;
2. $\{2,51\} = 2,51 - [2,51] = 2,51 - 2 = 0,51$;
3. $\left\{-\frac{5}{6}\right\} = -\frac{5}{6} - \left[-\frac{5}{6}\right] = -\frac{5}{6} - (-1) = -\frac{5}{6} + 1 = \frac{1}{6}$;
4. $\{-\sqrt{7}\} = -\sqrt{7} - [-\sqrt{7}] = -\sqrt{7} - (-3) = -\sqrt{7} + 3$.

OBSERVAȚIE.

$\{a + n\} = \{a\}$, pentru orice număr real a și orice număr întreg n .



ȘTIAI CĂ...?

Algoritmii care verifică dacă un cod de bare este valid folosesc partea întreagă pentru a calcula „cifra de control”. Aceasta este ultima cifră din cod și are rolul de a preveni erorile: dacă scannerul citește greșit un număr, suma finală nu se va mai potrivi cu cifra de control, iar sistemul va bloca tranzacția.

Pentru a determina cifra de control (C), procedezi astfel:

- calculezi $S = I + 3P$, unde I reprezintă suma numerelor de pe pozițiile impare, iar P reprezintă suma numerelor de pe pozițiile pare ale codului de bare;

$$a = 10 - \left(S - \left\lfloor \frac{S}{10} \right\rfloor \cdot 10 \right);$$

- calculezi

$$C = a - \left\lfloor \frac{a}{10} \right\rfloor \cdot 10.$$



PROVOCARE

Determină cifrele de control ale următoarelor coduri de bare:

- a) 594123456789(C)
b) 484848484855(C)

Exerciții rezolvate

1. Calculează $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{2} - 1| - |\sqrt{3} + 2|$.

Rezolvare:

$$\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0 \Rightarrow |\sqrt{2} - \sqrt{3}| = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} > 1 \Rightarrow \sqrt{2} - 1 > 0 \Rightarrow |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$$

$$\sqrt{3} + 2 > 0 \Rightarrow |\sqrt{3} + 2| = \sqrt{3} + 2$$

Obținem:

$$|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{2} - 1| - |\sqrt{3} + 2| = (-\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{3} + 2) = -\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1 - \sqrt{3} - 2 = -3.$$

2. Arată că numărul $A = \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{7})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{7})^2}$ este irațional.

Rezolvare:

$$A = \sqrt{(2\sqrt{5} - 5)^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{7})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{7})^2} = |2\sqrt{5} - 5| + |3 - \sqrt{7}| + |\sqrt{5} - \sqrt{7}|$$

$$2\sqrt{5} < 5 \Rightarrow 2\sqrt{5} - 5 < 0 \Rightarrow |2\sqrt{5} - 5| = -(2\sqrt{5} - 5) = -2\sqrt{5} + 5$$

$$3 > \sqrt{7} \Rightarrow 3 - \sqrt{7} > 0 \Rightarrow |3 - \sqrt{7}| = 3 - \sqrt{7}$$

$$\sqrt{5} < \sqrt{7} \Rightarrow \sqrt{5} - \sqrt{7} < 0 \Rightarrow |\sqrt{5} - \sqrt{7}| = -(\sqrt{5} - \sqrt{7}) = -\sqrt{5} + \sqrt{7}$$

Obținem:

$$A = |-2\sqrt{5} + 5| + |3 - \sqrt{7}| + |-\sqrt{5} + \sqrt{7}| = -2\sqrt{5} + 5 + 3 - \sqrt{7} + (-\sqrt{5} + \sqrt{7}) = -2\sqrt{5} + 5 + 3 - \sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{7} = -3\sqrt{5} + 8 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

3. Compară numerele reale $a = 3\sqrt{2} - 2$ și $b = 2\sqrt{6} - \sqrt{3}$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= (3\sqrt{2} - 2)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2 + 2^2 = 22 - 12\sqrt{2} \\ b^2 &= (2\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 = (2\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 27 - 12\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$22 < 27$$

$$\Rightarrow 22 - 12\sqrt{2} < 27 - 12\sqrt{2} \Rightarrow a^2 < b^2.$$

Cum $a > 0$, $b > 0$ și $a^2 < b^2$, rezultă că $a < b$.

4. Determină partea întreagă și partea fracționară a numărului real $\frac{1}{3\sqrt{2} - 4}$.

Rezolvare:

$$\frac{1}{3\sqrt{2} - 4} = \frac{3\sqrt{2} + 4}{(3\sqrt{2})^2 - 4^2} = \frac{3\sqrt{2} + 4}{2}$$

Rotunjim numărul real $\sqrt{2}$ la a doua zecimală și obținem 1,41.

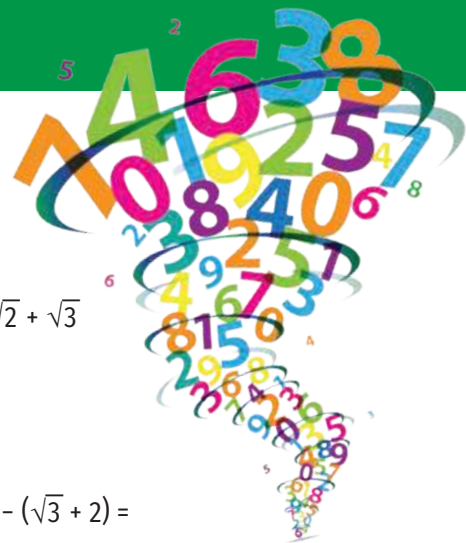
$$\text{Atunci } \frac{3\sqrt{2} + 4}{2} \approx 4,1, \text{ de unde rezultă } \left\lfloor \frac{1}{3\sqrt{2} - 4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3\sqrt{2} + 4}{2} \right\rfloor = 4 \text{ și}$$

$$\left\{ \frac{1}{3\sqrt{2} - 4} \right\} = \left\{ \frac{3\sqrt{2} + 4}{2} \right\} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{2}.$$

Putem proceda și astfel:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{18} \Rightarrow 4 < 3\sqrt{2} < 5 \Rightarrow 8 < 3\sqrt{2} + 4 < 9 \Rightarrow 4 < \frac{3\sqrt{2} + 4}{2} < 4,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{3\sqrt{2} + 4}{2} \right\rfloor = 4, \left\{ \frac{3\sqrt{2} + 4}{2} \right\} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{2} \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{3\sqrt{2} - 4} \right\rfloor = 4, \left\{ \frac{1}{3\sqrt{2} - 4} \right\} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{2}.$$



5. a) Demonstrează că numărul real $\sqrt{n^2 + 6n + 5}$ este irațional, pentru orice număr natural nenul n .

b) Determină partea întreagă și partea fracționară a numărului real $\sqrt{n^2 + 6n + 5}$, unde n este număr natural nenul.

Rezolvare:

$n^2 + 4n + 4 < n^2 + 6n + 5 < n^2 + 6n + 9$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (n+2)^2 < n^2 + 6n + 5 < (n+3)^2$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt{n^2 + 6n + 5}$ este număr irațional, deoarece între pătratele a două numere naturale consecutive nu mai există pătratul unui alt număr întreg ($n^2 + 6n + 5$ este număr natural, deci poate fi numai pătratul unui număr întreg).

b) $(n+2)^2 < n^2 + 6n + 5 < (n+3)^2$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n+2 < \sqrt{n^2 + 6n + 5} < n+3$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$ Așadar, $[\sqrt{n^2 + 6n + 5}] = n+2$ și $\{\sqrt{n^2 + 6n + 5}\} = \sqrt{n^2 + 6n + 5} - n - 2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Determină rotunjirea numărului real $-\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$ la a treia zecimală.

Rezolvare:

$$-\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = -\frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} = -\frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{3}$$

Cu ajutorul aplicației *Calculator* de pe telefonul mobil, tabletă sau computer, determinăm primele șase zecimale exacte ale numerelor reale $\sqrt{5}$ și $\sqrt{2}$. Astfel, $\sqrt{5} = 2,236067...$ și $\sqrt{2} = 1,414213...$

$$\sqrt{5} - \sqrt{2} = 0,821854... \Rightarrow 2(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 1,643708... \Rightarrow -\frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{3} = -0,547902...$$

Aproximările prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-3} ale numărului real $-\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$ sunt $-0,548$ și $-0,547$, de unde rezultă că rotunjirea la a treia zecimală este $-0,548$.

Aplic

1. Dă exemple de numere iraționale care aparțin intervalului de numere reale $[2,1; 2,2]$.

2. Dă exemple de numere raționale care aparțin intervalului de numere reale $(\sqrt{15}, 4)$.

3. Ordonează crescător numerele reale:

a) $0,1(2); 0,(12); 0,12(1); 0,12;$

c) $\frac{2023}{2024}, \frac{2024}{2025}, \frac{2025}{2026}, \frac{2026}{2027};$

b) $-1,31(2); -1,(312); -1,3(12); -1,312;$

d) $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{7}, -\frac{2}{3};$

4. Compară numerele reale:

a) $2\sqrt{5}$ și $3\sqrt{2};$

e) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ și $\frac{3}{4\sqrt{5}};$

b) $6\sqrt{2}$ și $8;$

f) $-\frac{2}{3\sqrt{6}}$ și $-\frac{3}{8\sqrt{2}};$

c) $-5\sqrt{3}$ și $-9;$

g) $13 - 2\sqrt{3}$ și $2\sqrt{3} - 11;$

d) $-3\sqrt{15}$ și $-4\sqrt{10};$

h) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ și $6 - \sqrt{6}.$

5. Ordonează descrescător numerele reale:

a) $-4\sqrt{3}, -5\sqrt{5}, -3\sqrt{6}, -2\sqrt{15};$

b) $\sqrt{5} - 2, 2 - \sqrt{3}, \sqrt{3} - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1.$

6. Demonstrează că $\sqrt{14} - 3 > \sqrt{15} - \sqrt{10} > 4 - \sqrt{11}.$

CONTEXTUALIZEZ

Sistemul de Poziționare Globală (GPS) este un instrument de măsurare a timpului și de aproximare a numerelor reale.

Telefonul tău nu știe unde te afli, ci primește mesaje de la sateliți. Aceștia trimit semnale radio care se propagă cu viteza luminii ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s) și care conțin momentul exact al emiterii. Telefonul (receptorul) notează momentul recepției.

Distanța se calculează prin formula $d = c \cdot \Delta t$, unde c este viteza luminii în vid, iar Δt este timpul de propagare a semnalului (diferența de timp dintre momentul recepției semnalului și momentul emiterii acestuia).

Dacă sistemul face o eroare de aproximare în calculul timpului de 10^{-10} secunde, atunci eroarea de poziționare este de $0,03$ m = 3 cm. Dacă eroarea de aproximare a timpului ar fi 10^{-7} secunde, atunci eroarea de poziționare ar fi de câteva zeci de metri, ceea ce ar face imposibilă navigarea pe străzi înguste.

CONTEXTUALIZEZ

Sunetul produs de o voce sau de o chitară este o undă a cărei intensitate variază constant, putând fi reprezentată în orice moment prin numere reale. Totuși, un computer nu poate stoca „infinitatea” de valori ale unei unde. Pentru a transforma sunetul în fișier (MP3 sau WAV), computerul „măsoară” unda de zeci de mii de ori pe secundă și o transformă într-un număr întreg, prin rotunjire. Cu cât eroarea de aproximare este mai mică, cu atât muzica se aude mai clar și mai aproape de realitate.

Deci, când asculți melodia preferată la căști, asculți de fapt miliarde de aproximări matematice redate atât de rapid, încât creierul tău le percepe ca pe un sunet continuu.

7. Calculează:

- $|4\sqrt{3} - 7| + |2\sqrt{3} - 3| + 2 \cdot |\sqrt{3} + 1|$;
- $|3\sqrt{5} - 7| - |\sqrt{5} - 2| + 2 \cdot |2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}| + |6\sqrt{2} - 9|$;
- $\sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} + \sqrt{(2\sqrt{2} - 3)^2}$;
- $|2\sqrt{3} - 4| + |-2\sqrt{3} - 1| - |5 - 2\sqrt{3}|$;
- $|\sqrt{(\sqrt{2} - 3)^2} - 1| - |\sqrt{2} - 4|$;
- $\sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{7})^2} + \sqrt{(-\sqrt{7} + 3)^2} - |2 - \sqrt{5}|$;
- $|\sqrt{20} - 2\sqrt{7}| - |-3\sqrt{5} - \sqrt{7}| - 3|\sqrt{7} - 2\sqrt{5}|$.

8. Reprezintă pe axa numerelor reale: $2,4$; $3,2$; $-2,3$; $2\frac{1}{2}$; $-3\frac{1}{4}$; $\sqrt{5}$; $-2\sqrt{3}$; $-\sqrt{7}$; $-\frac{\sqrt{15}}{2}$.

9. Determină aproximările prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-n} , unde $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ pentru următoarele numere reale: $\frac{3}{4}$; $-\frac{5}{6}$; $1,258321$; $-2,4235871$; $-4,2$; $0,(3)$; $-2,1(23)$; $\sqrt{7}$; $-\sqrt{5}$; $-\frac{3}{\sqrt{2}}$; $-\frac{\sqrt{6}}{4}$; $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$; $\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$.

10. Determină rotunjirile la a n -a zecimală, unde $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ pentru următoarele numere reale: $-\frac{3}{2}$; $-1,4$; $5,123456$; $-0,4785621$; $1,(321)$; $-3,11(32)$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{10}$; $\frac{\sqrt{5}}{5}$; $-\frac{\sqrt{6}}{4}$; $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{7}}$.

11. Se consideră numărul real $a = \frac{1}{\sqrt{3} + 1}$.

- Aproximează numărul a prin lipsă și prin adaos, cu eroare mai mică decât 10^{-2} .
- Determină partea întreagă a numărului a .
- Stabilește dacă numărul a este rațional sau irațional.

12. Fie x un număr real. Exprimă cu ajutorul modulului:

- $-3 < x < 3$;
- $-9 < x < -7$;
- $1 \leq x + 4 \leq 7$;
- $-\frac{8}{3} \leq x \leq -\frac{4}{3}$;
- $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$;
- $a < x < b$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$).

13. Determină valorile numărului real x pentru care:

- $|x| \leq 6$;
- $|2x - 3| < 5$;
- $|4 - 6x| \leq 2$;
- $\left| \frac{1 - 2x}{3} \right| < 3$.

14. Determină partea întreagă și partea fracționară a numărului real a .

- $a = -3,5$;
- $a = -\frac{15}{9}$;
- $a = \sqrt{10}$;
- $a = 3 + \sqrt{15}$;
- $a = 1,0(6)$;
- $a = 2,051$;
- $a = -2\sqrt{5}$;
- $a = \frac{1}{5 - \sqrt{3}}$;
- $a = \frac{10}{7}$;
- $a = -3,99$;
- $a = \frac{2\sqrt{7}}{3}$;
- $a = \frac{1}{3 + \sqrt{6}}$;
- $a = -5, (3)$;
- $a = -\frac{4}{5}$;
- $a = \sqrt{2} - \sqrt{7}$;
- $a = \frac{1}{2\sqrt{5} + 4}$.

15. Determină mulțimea valorilor numărului real x .

- $[x] = 1$;
- $[-3x + 5] = -2$;
- $[2x - 1] = 3$;
- $\left[\frac{4x + 1}{6} \right] = -4$.

16. Calculează:

- a) $[\sqrt{2026}] - 50 \cdot \{-2,1\}$; e) $[(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2] - [(2 + \sqrt{5})^2]$;
 b) $[2 - \sqrt{3}] + \left\{\frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right\}$; f) $[(1 + \sqrt{3})^3] - [1 + \sqrt{3}]^3$;
 c) $\left[\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}\right] - \left\{\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}\right\} - [\sqrt{5}] - \{-\sqrt{5}\}$; g) $\{(\sqrt{3} - 1)^3\} - \{(2 - \sqrt{2})^3\}$;
 d) $4 \cdot \left\{\frac{1}{-3 + \sqrt{5}}\right\} + \left\{\frac{1}{\sqrt{5} + 2}\right\}$; h) $\left\{\frac{4}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^3}\right\} - \left\{\frac{2}{(3 - 2\sqrt{2})^3}\right\}$.

17. Determină partea întreagă și partea fracționară a numărului real a .

- a) $a = \sqrt{2026^2 - 2026}$; c) $a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{49 \cdot 50}$;
 b) $a = \sqrt{2027^2 + 2027}$; d) $a = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{47 \cdot 49}$.

18. Calculează:

- a) $\left[\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}\right]$;
 b) $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{100}]$;
 c) $[\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + [\sqrt{3 \cdot 4}] + \dots + [\sqrt{99 \cdot 100}]$.

19. Fie a un număr real, cu proprietatea $a \in [0, 1)$. Arată că numărul

$$\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{a^2 - 3(2a-3)} - \sqrt{(2-a)^2} + \sqrt{a(a+4)} + 4 \text{ este întreg.}$$

20. Fie a un număr real, cu proprietatea $-2 \leq a \leq 3$. Arată că numărul

$$\sqrt{(a+2)^2} + |a-4| + |7-2a| - 2|3-a| \text{ aparține intervalului de numere reale } (4\sqrt{3}, 5\sqrt{2}).$$

21. Demonstrează că:

- a) $\sqrt{a^2 - 6a + 10} + \sqrt{b^2 - 4b + 13} \geq 4$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$;
 b) $\sqrt{4a(a-1)} + 5 + \sqrt{9b^2 + 4(3b+5)} \geq 6$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

22. Fie a și b numere reale pozitive, iar m_a, m_g, m_h reprezintă media aritmetică, media geometrică și, respectiv, media armonică a numerelor a și b . Demonstrează că:

- a) $m_a \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$; b) $m_h \leq m_g \leq m_a$; c) $m_g - m_h \leq m_a - m_a$.

23. Fie n un număr natural nenul și $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere reale pozitive. Demonstrează că $\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_3} + \sqrt{a_3 a_4} + \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} + \sqrt{a_n a_1} \leq n \cdot m_a$, unde m_a reprezintă media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, \dots, a_n$.

24. Determină partea întreagă și partea fracționară a numărului real a .

- a) $a = \sqrt{n^2 + n}, n \in \mathbb{N}$; c) $a = \sqrt{n^2 + 7n + 11}, n \in \mathbb{N}$;
 b) $a = \sqrt{n^2 + 4n + 3}, n \in \mathbb{N}$; d) $a = \sqrt{4n^2 + 3n}, n \in \mathbb{N}$.

25. Ana a înregistrat în tabelul următor temperaturile măsurate la aceeași oră pe parcursul unei săptămâni.

Ziua	Luni	Marti	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura	-3,9 °C	-2,6 °C	-4,1 °C	-1,6 °C	0 °C	1,9 °C	3,3 °C

- a) În ce zile au fost înregistrate temperaturi pozitive?
 b) Reprezintă pe axa numerelor reale numerele asociate valorilor temperaturilor din tabelul Anei.
 c) Ordonează crescător temperaturile înregistrate de Ana în tabel.
 d) Calculează diferența dintre cea mai mare și cea mai mică temperatură înregistrate.
 e) Determină media temperaturilor înregistrate de Ana în tabel.



SĂ NE AMINTIM!

- **media aritmetică** a numerelor reale pozitive a și b este egală cu $\frac{a+b}{2}$;
- **media geometrică** a numerelor reale pozitive a și b este egală cu $\sqrt{a \cdot b}$;
- **media armonică** a numerelor reale pozitive a și b este egală cu $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

ȘTIAI CĂ...?



O eroare de aproximare prin lipsă a cauzat un haos imens la bursa din Vancouver în 1982.



Indicele bursier era calculat de mii de ori pe zi, iar software-ul trunchia rezultatul după a treia zecimală, în loc să îl rotunjească la a treia zecimală. Deși diferența părea infimă, modul acesta de calcul a dus la scăderea artificială a indicelui la fiecare tranzacție și, în mai puțin de doi ani, valoarea lui a ajuns de la 1 000 la 524,8, deși, în realitate, bursa crescuse.

Când matematicienii au analizat software-ul, au descoperit eroarea. În weekendul din 25 noiembrie 1983, au corectat codul, iar luni dimineață, când au pornit computerul cu algoritmul de rotunjire corect, indicele a „sărit” de la 524 la valoarea sa reală de 1 098,892.

26. Un elev are la matematică notele 7, 8, 9 și 5.

- Determină media aritmetică a notelor elevului.
- Care este media la matematică a elevului?
- Ce notă trebuie să mai obțină elevul pentru ca media să fie 8?
- Este posibil ca elevul să obțină media 9 după ce mai primește încă 2 note? Justifică răspunsul.
- Care sunt cele două note egale pe care trebuie să le obțină elevul pentru ca media celor 6 note să fie 8?

27. Pe ambalajul unui produs este înscrisă masa acestuia: $25 \pm 0,02$ g.

- Scrie mulțimea valorilor posibile ale masei produsului, exprimată în grame.
- Exprimă mulțimea valorilor posibile ale masei produsului (în grame) folosind modulul.
- Reprezintă pe axa numerelor reale valorile celei mai mari și celei mai mici dintre masele posibile ale produsului, exprimate în grame. Care este distanța dintre cele două puncte obținute pe axa numerelor?

INDICAȚIE:

Dacă pe ambalajul unui produs este marcată masa acestuia sub forma $a \pm b$ g, atunci masa reală a produsului poate fi minimum $a - b$ grame și maximum $a + b$ grame.

28. Temperatura optimă într-un laborator trebuie să fie între 18°C și 22°C . Exprimă această condiție cu ajutorul modulului.

29. Un senzor măsoară temperatura $t = 20,3^\circ\text{C}$, cu o eroare de măsurare de $\pm 0,03^\circ\text{C}$.

- Determină intervalul în care se poate afla temperatura reală.
- Exprimă mulțimea valorilor posibile ale temperaturii folosind modulul.
- Determină aproximările temperaturii cu o eroare mai mică decât 10^{-2} .
- Reprezintă pe axa numerelor reale valorile extreme ale temperaturii posibile și calculează diferența dintre temperatura maximă și temperatura minimă.

30. Într-o sală de clasă se află o tablă dreptunghiulară cu dimensiunile 3 m, respectiv 2 m. Trei elevi măsoară lungimea diagonalei tablei. În tabelul de mai jos sunt înregistrate rezultatele obținute de aceștia:



Nume elev	Ana	Bogdan	Carmen
Rezultatul măsurătorii	3,6 m	3,7 m	3,5 m

- Determină lungimea reală a diagonalei tablei.
- Calculează eroarea fiecărei măsurători (diferența în valoare absolută față de valoarea reală).
- Reprezintă pe axa numerelor reale valorile obținute prin măsurare de către cei trei elevi, precum și valoarea lungimii diagonalei tablei (exprimate în metri).
- Care elev a măsurat cu cea mai mare precizie? Justifică răspunsul.
- Rotunjește lungimea reală a diagonalei tablei, exprimată în metri, la a doua zecimală.

Exerciții recapitulative

1. Se consideră mulțimea $A = \left\{ -\sqrt{17}; 1, (3); -\frac{2}{4}; \sqrt{4}; -\sqrt{(-3)^4}; -2^2; -\sqrt{5}; \frac{32}{8}; \frac{6}{10}; (-2)^3; \sqrt{6\frac{1}{4}} \right\}$.
 - a) Determină mulțimile: $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $A \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$, $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$.
 - b) Reprezintă pe axa numerelor reale elementele mulțimii A .
 - c) Determină partea întreagă și partea fracționară a elementelor mulțimii A .
2. Se consideră numerele reale $a = \left(-\frac{5}{12} \cdot \frac{25}{18} + \frac{7}{10} \right) \cdot \frac{5}{2} + 3$, $b = \left\{ \left[\left(\frac{4}{3} \right)^{-1} + \frac{1}{4} \right] : \frac{1}{8} - 7 \right\} \cdot (-3)^2$,
 $c = \left(2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2} \right) : \frac{7}{12} - \left(3 : 0, (3) - 3, (3) : \frac{1}{3} \right)$, $d = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{6}}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{3 - \sqrt{6}}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{6}}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{3 - \sqrt{6}}}$.
 - a) Precizează care dintre numerele reale a, b, c sunt raționale.
 - b) Scrie aproximările prin lipsă și prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-3} , ale numărului real d .
 - c) Reprezintă, pe axa numerelor reale, numerele a, b, c , media aritmetică a numerelor a și b și media aritmetică a numerelor a, b și c .
 - d) Ordonează descrescător numerele $\frac{3}{a}, \frac{8}{b}, \frac{10}{c}, \frac{3}{d}$.
3. Se consideră numerele reale $a = \frac{2}{3 - \sqrt{7}} + \frac{2}{3 + \sqrt{7}} - \sqrt{7}$ și $b = \sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} + \sqrt{(\sqrt{7} - 1)^2} + 1$.
 - a) Compară numerele reale a și b .
 - b) Determină partea întreagă și partea fracționară a numerelor a și b .
 - c) Determină numerele raționale x și y pentru care $\frac{a}{b} = x + y\sqrt{7}$.
4. Determină valorile numărului real x pentru care:
 - a) $|x + 2| + |x^2 + 9| = 0$;
 - b) $|x^2 - 8| = 1$;
 - c) $||1 - 2x| + 2| = 5$;
 - d) $\left| \frac{5 + 3x}{4} \right| = 2$;
 - e) $|x - 2| + |x^2 - 4| \leq 0$;
 - f) $|3 - 5x| < 2$.
5. Fie x un număr real nenul cu proprietatea $x - \frac{1}{x} = 4$. Determină $x^3 - \frac{1}{x^3}$.
6. Compară numerele reale:
 - a) $3\sqrt{7}$ și 8 ;
 - b) $-6\sqrt{5}$ și $-5\sqrt{6}$;
 - c) $\frac{2}{\sqrt{15}}$ și $\frac{4}{3\sqrt{6}}$;
 - d) $3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$ și $6 - \sqrt{15}$.
7. Determină partea întreagă și partea fracționară a numărului real a .
 - a) $a = -1,7(2)$;
 - b) $a = \frac{17}{3}$;
 - c) $a = -5\sqrt{6}$;
 - d) $a = 2 + \sqrt{10}$;
 - e) $\sqrt{n^2 + 2n}$, $n \in \mathbb{N}$;
 - f) $a = \sqrt{n^2 + 9n + 12}$, $n \in \mathbb{N}$.
8. Se consideră numerele reale: $-5,68568$; $-\frac{7}{5}$; $-1,(32)$; $2,(5)$; $-2\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{3} - 1}$.
 - a) Ordonează crescător numerele.
 - b) Determină aproximările numerelor prin lipsă și prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-n} , unde $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, și rotunjirile numerelor la a n -a zecimală, unde $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.
9. Pentru ca peștii dintr-un acvariu să fie sănătoși, nivelul pH-ului apei trebuie să fie 7,2, cu o toleranță de 0,4.
 - a) Scrie intervalul de valori admise pentru pH-ul apei din acvariu.
 - b) Exprimă condiția de siguranță a pH-ului folosind modulul unui număr real.
 - c) Un senzor măsoară pH-ul și afișează valoarea 7,58. Determină abaterea față de valoarea ideală de 7,2.
 - d) Dacă senzorul are o eroare de precizie de 0,05, determină valoarea minimă reală pe care o poate avea pH-ul atunci când aparatul indică 7,58.



Timp de lucru: 45 de minute

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I

30 de puncte

30 de puncte	1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.
(10 p.)	A. Aproximarea prin lipsă, cu o eroare mai mică decât 10^{-2} , a numărului real $-1,548$ este: a) $-1,55$; b) $-1,54$; c) $-1,53$; d) $-1,44$.
(10 p.)	B. Numărul real $\sqrt{2\frac{7}{9}}$ aparține mulțimii: a) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; b) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; c) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; d) $\mathbb{Z}$.
(10 p.)	C. Fie x un număr real cu proprietatea $-5 < x < -1$. Atunci: a) $ x < 1$; b) $ x - 2 < 1$; c) $ x + 3 < 2$; d) $ x - 3 < 2$.

Subiectul al II-lea

60 de puncte

Scrie rezolvările complete.

25 de puncte	1. În cadrul unui experiment, un elev trebuie să prepare o soluție a cărei concentrație optimă trebuie să respecte condiția $ c - 0,12 \leq 0,005$.
(10 p.)	a) Exprimă mulțimea valorilor posibile ale concentrației sub formă de interval de numere reale.
(5 p.)	b) Soluția obținută de elev are o concentrație de 0,1248. Este aceasta conformă? Justifică.
(10 p.)	c) Reprezintă pe axa numerelor reale valorile extreme admise ale concentrației soluției.
10 puncte	2. Compară numerele a și b : $a = \sqrt{(2\sqrt{3} - 4)^2} + 1 - \sqrt{3} - \sqrt{12}$; $b = -2$.
15 puncte	3. Fie a și b numere reale astfel încât $a - b = -\frac{1}{6}$ și $a^3 - b^3 = -\frac{37}{216}$.
(10 p.)	a) Determină $a^2 + b^2$.
(5 p.)	b) Determină aproximarea prin lipsă, cu o eroare mai mică decât 10^{-1} , a numărului real $a^2 + b^2$.
10 puncte	4. Determină partea întreagă și partea fracționară a numărului real $\sqrt{n^2 + 2n}$, unde n este număr natural nenul.

Autoevaluare

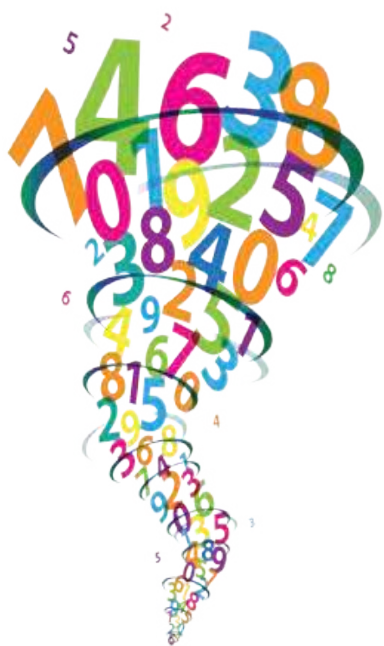
Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din această unitate.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	5 foarte bine	4 bine	3 mediu	2 slab	1 foarte slab
Mi-a fost ușor să rezolv exercițiile.					
Am înțeles criteriile de rezolvare.					
Mi-am amintit conținuturile învățate.					

Elemente de logică matematică

- ▶ 1. Propoziții și predicate; operații: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența; cuantificatori; reguli de negare
 - ▶ 1.1. Propoziții și predicate
 - ▶ 1.2. Operații: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența
 - ▶ 1.3. Cuantificatori
 - ▶ 1.4. Reguli de negare
- ▶ 2. Metode de raționament: metoda reducerii la absurd; metoda inducției matematice
 - ▶ 2.1. Metoda reducerii la absurd
 - ▶ 2.2. Metoda inducției matematice





1. Propoziții și predicate

Descopăr

Precizează dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false.

1. Balena este un pește.
2. O oră are 3 600 de secunde.
3. Soluția ecuației $x + 2 = 3$, $x \in \mathbb{R}$, este $x = 1$.
4. Hai acasă!
5. $x + y + z = 2$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.
6. Unde mergem?
7. π este număr irațional.
8. $x = y$, $x, y \in \mathbb{R}$.



Învăț



Logica matematică studiază regulile de bază, după care se pot combina afirmațiile pentru a construi raționamente valabile. În matematică, enunțurile pot fi adevărate sau false. Putem spune că logica matematică este „gramatica gândirii corecte”.

Definiția 1. Un enunț este un ansamblu de simboluri cărora li s-a dat un anumit sens.

EXEMPLE:

1. „Numărul 2 este impar.”
2. „ $3 \in \mathbb{Z}$ ”
3. „ $x + 5 \leq 3$, $x \in \mathbb{R}$ ”
4. „Cât este ceasul?”

Rezolvând exercițiul propus la secțiunea **Descopăr**, observăm că:

- despre unele enunțuri putem spune cu certitudine că sunt adevărate sau false;
- unor enunțuri nu li se poate atribui una dintre valorile „adevărat” sau „fals”;
- unele enunțuri devin adevărate sau false în funcție de valorile pe care le primesc necunoscutele de care depind.

Definiția 2. Se numește **propoziție**, în sensul logicii matematice, un enunț care este adevărat sau fals (dar nu ambele simultan).

Propozițiile se notează cu litere mici, de obicei p, q, r, s , sau cu litere mici cu indici, de exemplu p_1, q_2, r_3 .

EXEMPLE:

1. p : „ $5 - 2 = 2$ ”
2. q_2 : „ $9 : 3$ ”
3. r_3 : „ $3 \leq 6$ ”
4. q : „Craiova este reședința județului Dolj.”

Definiția 3. Proprietatea unei propoziții p de a fi adevărată sau falsă se numește **valoarea de adevăr a propoziției p** .

Valoarea de adevăr a unei propoziții este „adevărul” (notat A sau 1), dacă propoziția este adevărată, sau „falsul” (notat F sau 0), dacă propoziția este falsă.

OBSERVAȚIE.

Logica matematică se mai numește și **logică bivalentă**, deoarece singurele valori de adevăr care pot fi atribuite unei propoziții sunt „adevărul” și „falsul”.

EXEMPLE:

1. Propoziția p : „ $7 + 3 = 21$ ” este falsă, deci valoarea sa de adevăr este F (sau 0).
2. Propoziția q : „Laturile pătratului sunt congruente.” este adevărată, deci valoarea sa de adevăr este A (sau 1).

OBSERVAȚII.

1. O teoremă din matematică este o propoziție adevărată.
2. Enunțurilor de tipul „Hai acasă!” sau „Unde ai fost?” nu li se poate atribui o valoare de adevăr. Acestea nu sunt propoziții în sensul logicii matematice.

Definiția 4. Se numește **predicat un enunț care depinde de una sau mai multe variabile și care devine propoziție adevărată sau propoziție falsă în funcție de valorile pe care le atribuim variabilei/variabilelor.**

OBSERVAȚIE.

La definirea unui predicat se indică mulțimea/mulțimile în care variabila/variabilele ia/iau valori.

Definiția 5. Mulțimea de adevăr a unui predicat este mulțimea tuturor valorilor variabilei/variabilelor pentru care predicaatul devine o propoziție adevărată.

OBSERVAȚII.

1. Predicatele se notează tot cu litere mici, urmate de paranteze rotunde între care se pun variabilele, de exemplu, $p(x)$, $q(x, y)$, $p_1(x, y, z)$, $q_2(x_1, x_2, x_3)$.
2. În funcție de numărul de variabile de care depinde, un predicat poate fi: **unar** – notat, de exemplu, $p(x)$; **binar** – notat, de exemplu, $p(x, y)$; **ternar** – notat, de exemplu, $p(x, y, z)$ etc.

EXEMPLE:

1. Enunțul $p(x)$: „ $x^2 - 2x - 3 = 0$ ”, unde $x \in \mathbb{R}$, este un predicat unar.

Pentru $x = 1$, obținem propoziția $p(1)$: „ $1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 0$ ”, care este falsă.

Pentru $x = 3$, obținem propoziția $p(3)$: „ $3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 0$ ”, care este adevărată.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $\{-1, 3\}$, adică mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Enunțul $p(x, y)$: „ $x^2 + y^2 = 5$ ”, unde $x \in \mathbb{Z}$ și $y \in \mathbb{Z}$, este un predicat binar.

Pentru $x = 1$, $y = 0$, obținem propoziția $p(1, 0)$: „ $1^2 + 0^2 = 5$ ”, care este falsă.

Pentru $x = -2$, $y = 1$, obținem propoziția $p(-2, 1)$: „ $(-2)^2 + 1^2 = 5$ ”, care este adevărată.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x, y)$ este $\{(-2, -1), (-2, 1), (-1, -2), (-1, 2), (1, -2), (1, 2), (2, -1), (2, 1)\}$.

3. Enunțul $p(x, y, z)$: „ $x^2 + y^2 = z^2$ ”, unde $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, este un predicat ternar.

Pentru $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, obținem propoziția $p(1, 2, 3)$: „ $1^2 + 2^2 = 3^2$ ”, care este falsă.

Pentru $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, obținem propoziția $p(3, 4, 5)$: „ $3^2 + 4^2 = 5^2$ ”, care este adevărată.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x, y, z)$ este formată din toate **tripletele pitagoreice**: $\{(3, 4, 5), (5, 12, 13), (6, 8, 10)$ etc.}.



Gottlob Frege
(1848-1925)

ȘTIAI CĂ...?

• Denumirile anterioare ale logicii matematice au fost *logică simbolică* (opusă logicii filosofice) și *metamatematică*. Primul termen încă este folosit, dar al doilea termen este utilizat în prezent pentru a desemna anumite aspecte ale teoriei demonstrației.

• **Gottlob Frege**, matematician, filosof și logician german, este considerat fondatorul logicii moderne datorită volumului *Notăția conceptelor: limbajul formal al gândirii pure, elaborat după modelul aritmeticii* (nu a fost tradus în limba română).

Exerciții rezolvate

1. Precizează care dintre enunțurile următoare este sau nu propoziție. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor identificate.

- a) „Închide ușa!” c) „1 este număr prim.” e) „ $x^2 + 1 = 10$ ”, $x \in \mathbb{Z}$
b) „Ce faci?” d) „ $2 + 2 = 4$ ” f) „Cartea este un aliment.”

Rezolvare:

- a) Enunțul nu este o propoziție, deoarece nu îi putem atribui una dintre valorile „adevărat” sau „fals”.
b) Enunțul nu este o propoziție, deoarece nu îi putem atribui una dintre valorile „adevărat” sau „fals”.
c) Enunțul este o propoziție falsă.
d) Enunțul este o propoziție adevărată.
e) Enunțul nu este o propoziție, deoarece pentru anumite valori ale variabilei este adevărat, iar pentru altele este fals (enunțul este predicat unar).
f) Enunțul este o propoziție falsă.

2. Stabilește mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$.

- a) $p(x)$: „ $2(x - 1) + 3 = x$ ”, $x \in \mathbb{R}$; b) $p(x)$: „ $3x - 9 < 4x + 2$ ”, $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

a) Rezolvăm ecuația $2(x - 1) + 3 = x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$2(x - 1) + 3 = x \Leftrightarrow 2x - 2 + 3 = x \Leftrightarrow 2x - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $\{-1\}$.

b) Rezolvăm inecuația $3x - 9 < 4x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

$$3x - 9 < 4x + 2 \Leftrightarrow 3x - 4x < 2 + 9 \Leftrightarrow -x < 11 \Leftrightarrow x > -11 \Leftrightarrow x \in (-11, +\infty)$$

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $(-11, +\infty)$.

3. Determină mulțimea de adevăr a predicatului $p(x, y)$: „ $|3x - 4| + |-2y - 5| = 0$ ”, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} |3x - 4| \geq 0, \text{ pentru orice număr real } x \\ |-2y - 5| \geq 0, \text{ pentru orice număr real } y \end{array} \right\} \Rightarrow |3x - 4| = 0 \text{ și } |-2y - 5| = 0$$

$$|3x - 4| + |-2y - 5| = 0$$

$$|3x - 4| = 0 \Leftrightarrow 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$|-2y - 5| = 0 \Leftrightarrow -2y - 5 = 0 \Leftrightarrow -2y = 5 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}$$

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x, y)$ este $\left\{\left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{2}\right)\right\}$.

Aplic

- Identifică propozițiile și predicatele dintre enunțurile următoare. Pentru fiecare dintre propozițiile identificate, precizează valoarea de adevăr, iar pentru fiecare dintre predicatele identificate, precizează mulțimea de adevăr.
 - „10 este număr prim.”
 - „Cum este vremea?”
 - „ $72 : 8 = 7$ ”
 - „Triunghiul isoscel are două laturi congruente.”
 - „ $72 : x = 12$ ”, $x \in \mathbb{Z}^*$
 - „ $x + \sqrt{y} = 1$ ”, $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}$
 - „ $x + 2 = 3$ ”, $x \in \mathbb{Z}$
 - „ $x^2 - 4x + 4 = 0$ ”, $x \in \mathbb{Z}$
 - „Aria unui triunghi este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi și lungimea înălțimii corespunzătoare acesteia.”
 - „Șterge praful!”
 - „ $2 : 8 = 0,4$ ”
 - „ $x - 3 \leq 5$ ”, $x \in \mathbb{R}$
 - „ $4x^2 - 4x + 1 = 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$
 - „În intervalul de numere reale $(-3, 2]$ sunt 5 numere întregi.”
 - „ $\sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{25}$ ”
 - „ $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$ ”
 - „Calculează $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$!”
- Fie predicatul $p(x)$: „ $x^2 \geq x$ ”, unde $x \in \mathbb{R}$. Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor:
 - $p(0)$;
 - $p(-1)$;
 - $p(\frac{2}{3})$;
 - $p(\sqrt{2})$;
 - $p(\frac{1}{2})$.
- Fie predicatul $p(x, y)$: „ x divide y ”, unde $x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}$. Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor:
 - $p(2, 1)$;
 - $p(3, 9)$;
 - $p(1, 10)$;
 - $p(5, 5)$.
- Fie predicatul $p(x, y)$: „ $x^2 - 2y^2 = 3$ ”, unde $x, y \in \mathbb{R}$. Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor:
 - $p(1, 1)$;
 - $p(0, -2)$;
 - $p(3, -\sqrt{3})$.
- Determină mulțimile de adevăr ale predicatelor următoare:
 - $p(x)$: „ $(x + 2) \cdot 3 - 1 = -2x + 5$ ”, $x \in \mathbb{R}$;
 - $p(x)$: „ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ”, $x \in \mathbb{Z}$;
 - $p(x)$: „ $|x - 2| = 5$ ”, $x \in \mathbb{R}$;
 - $p(x)$: „ $|x + 3| + |x^2 - 9| = 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$;
 - $p(x)$: „ $15 : x$ ”, $x \in \mathbb{N}^*$;
 - $p(x)$: „ $\frac{8}{x+1} \in \mathbb{N}$ ”, $x \in \mathbb{N}$;
 - $p(x)$: „ $(x - 3)^2 - 1 = 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$;
 - $p(x)$: „ $\frac{2x-1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$ ”, $x \in \mathbb{R}$;
 - $p(x)$: „ $|2 - 3x| \leq 4$ ”, $x \in \mathbb{R}$;
 - $p(x)$: „ $2x - 1 - (x + 3) \leq 4 - x$ ”, $x \in \mathbb{R}$;
 - $p(x)$: „ $5(x + 2) - 3(x - 1) > -2$ ”, $x \in \mathbb{R}$;
 - $p(x, y)$: „ $|x - 2| + |y - 1| = 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$.

LUCRAȚI ÎN PERECHI!

Harta conceptuală:
Propoziții și predicate

Realizați o hartă conceptuală cu titlul „Propoziții și predicate”.

- Creați o ramură principală pentru **propoziții** și o alta pentru **predicate**. Dați câte trei exemple din fiecare categorie.
- Creați ramuri secundare pentru predicate unar, binar și ternar. Dați câte un exemplu pentru fiecare caz.

Folosiți culori diferite pentru fiecare secțiune.





1.2. Operații: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența

Descopăr

Precizează valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

1. p : „2 nu divide 4.”
2. q : „2 divide 4.”
3. r : „2 divide 4 sau 2 este număr prim.”
4. s : „Dacă 2 divide 7, atunci 2 este număr prim.”
5. t : „2 divide 4 și 2 este număr prim.”

Învăț

Utilizând elemente de legătură, care în limbajul curent sunt exprimate prin cuvintele „nu”, „sau”, „și”, „implică”, „echivalent”, din propoziții simple se pot forma propoziții noi.

OBSERVAȚII.

1. În loc de „**implică**” se poate folosi „**dacă ..., atunci**”, iar în loc de „**echivalent**” se poate folosi „**dacă și numai dacă**”.
2. Elementele de legătură „**nu**”, „**sau**”, „**și**”, „**implică**”, „**echivalent**” se numesc **operatori logici** sau **conectori logici**.
3. Propoziția obținută în urma folosirii conectorilor logici se numește **propoziție compusă**.

EXEMPLU:

Se consideră propozițiile p : „ $2 + 3 = 5$ ” și q : „Numărul natural 2 este număr prim.”.

Cu ajutorul operatorilor logici se pot forma propoziții compuse, precum:

- „ $2 + 3 = 5$ **și** numărul natural 2 este număr prim.”
- „ $2 + 3 = 5$ **sau** numărul natural 2 este număr prim.”
- „ $2 + 3 = 5$ **implică** numărul natural 2 este număr prim.” sau „**Dacă** $2 + 3 = 5$, **atunci** numărul natural 2 este număr prim.”
- „ $2 + 3 = 5$ **echivalent** cu numărul natural 2 este număr prim.” sau „ $2 + 3 = 5$ **dacă și numai dacă** numărul natural 2 este număr prim.”

Valoarea de adevăr a unei **propoziții compuse** este determinată de valorile de adevăr ale **propozițiilor componente**.

Operațiile logice elementare cu propoziții sunt negația, disjuncția, conjuncția, implicația și echivalența.

1. Negația

A. Negația propozițiilor

Negația propoziției p este propoziția „**non p** ”, care se notează $\neg p$ sau $\bar{p}$ și care este adevărată când p este falsă și falsă când p este adevărată.

Valoarea de adevăr a propoziției „*non p*” este ilustrată în tabelul de adevăr alăturat:

EXEMPLE:

1. p : „Câinele este un mamifer.” (A)

2. p : „Numărul 7 este par.” (F)

$\neg p$: „Câinele nu este un mamifer.” (F)

$\neg p$: „Numărul 7 nu este par.” (A)

p	$\neg p$
1	0
0	1

B. Negația predicatelor

Se consideră predicatul $p(x)$, unde $x \in E$, $E \neq \emptyset$.

Negația predicatului $p(x)$ se notează $\neg p(x)$ sau $\overline{p(x)}$. Mulțimea de adevăr a predicatului $\neg p(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care predicatul $p(x)$ devine o propoziție falsă.

EXEMPLU:

$p(x)$: „ $x \geq 2$ ”, $x \in \mathbb{R}$, $\neg p(x)$: „ $x < 2$ ”, $x \in \mathbb{R}$

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $[2, +\infty)$, iar mulțimea de adevăr a predicatului $\neg p(x)$ este $(-\infty, 2)$.

2. Conjuncția

A. Conjuncția propozițiilor

Conjuncția propozițiilor p și q este propoziția „ p și q ”, notată $p \wedge q$, care este adevărată când ambele propoziții sunt adevărate și falsă în celelalte cazuri.

Valoarea de adevăr a propoziției „ p și q ” este ilustrată în tabelul de adevăr alăturat:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

EXEMPLE:

1. Fie propozițiile p : „ $15 > 10$ ” și q : „ $8 : 2$ ”. Propoziția $p \wedge q$: „ $15 > 10$ și $8 : 2$ ” este adevărată, deoarece atât p , cât și q sunt propoziții adevărate.

2. Fie propozițiile p : „ $2 + 3 = 6$ ” și q : „Pătratul este un paralelogram”. Propoziția $p \wedge q$: „ $2 + 3 = 6$ și pătratul este un paralelogram” este falsă, deoarece propoziția p este falsă.

OBSERVAȚIE.

Propoziția $p \wedge (\neg p)$, care este întotdeauna falsă, exprimă **principiul contradicției**, potrivit căruia **o propoziție nu poate fi simultan și adevărată, și falsă**.

B. Conjuncția predicatelor

Se consideră predicatele $p(x)$ și $q(x)$, unde $x \in E$ și $E \neq \emptyset$.

Conjuncția predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul „ $p(x)$ și $q(x)$ ”, notat $p(x) \wedge q(x)$.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \wedge q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care ambele predicate $p(x)$ și $q(x)$ devin propoziții adevărate.

EXEMPLU:

Se consideră predicatele $p(x)$: „ x este număr prim”, $x \in \mathbb{N}$, și $q(x)$: „ $x < 17$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Conjuncția predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul $p(x) \wedge q(x)$: „ x este număr prim și $x < 17$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$, iar mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$ este $\{0, 1, 2, 3, \dots, 16\}$.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \wedge q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care ambele predicate ($p(x)$, $q(x)$) devin propoziții adevărate, adică mulțimea $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

Observăm că, dacă notăm cu A mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ și cu B mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$, atunci mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \wedge q(x)$ este $A \cap B$.

Într-adevăr, un element x_0 aparține mulțimii de adevăr a predicatului $p(x) \wedge q(x)$ atunci când propozițiile $p(x_0)$ și $q(x_0)$ sunt simultan adevărate, adică atunci când $x_0 \in A$ și $x_0 \in B$, deci $x_0 \in A \cap B$.

3. Disjuncția

A. Disjuncția propozițiilor

Disjuncția propozițiilor p și q este propoziția „ p sau q ”, notată $p \vee q$, care este adevărată dacă cel puțin una dintre propoziții este adevărată și falsă când ambele propoziții sunt false.

Valoarea de adevăr a propoziției „ p sau q ” este ilustrată în tabelul de adevăr alăturat:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

EXEMPLU:

Se consideră propozițiile p : „3 este număr natural.” și q : „3 este număr par.”. Propoziția $p \vee q$: „3 este număr natural sau este par.” este adevărată, deoarece propoziția p este adevărată.

OBSERVAȚIE.

Propoziția $p \vee (\neg p)$ este adevărată pentru orice propoziție p și exprimă **principiul terțului exclus**, potrivit căruia **o propoziție este sau adevărată, sau falsă**.

B. Disjuncția predicatelor

Se consideră predicatele $p(x)$ și $q(x)$, unde $x \in E$ și $E \neq \emptyset$.

Disjuncția predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul „ $p(x)$ sau $q(x)$ ”, notat $p(x) \vee q(x)$. Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \vee q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care cel puțin unul dintre predicatele $p(x)$ și $q(x)$ devine propoziție adevărată.

EXEMPLU:

Se consideră $p(x)$: „ $x + 3 > 6$ ”, $x \in \mathbb{N}$, și $q(x)$: „ $x < 7$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Disjuncția predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul $p(x) \vee q(x)$: „ $x + 3 > 6$ sau $x < 7$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $\{4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$, iar mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$ este $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \vee q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care cel puțin unul dintre predicatele $p(x)$ și $q(x)$ devine propoziție adevărată, adică mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$, care reprezintă mulțimea numerelor naturale.

Observăm că, dacă notăm cu A mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ și cu B mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$, atunci mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \vee q(x)$ este $A \cup B$.

Într-adevăr, un element x_0 aparține mulțimii de adevăr a predicatului $p(x) \vee q(x)$ atunci când cel puțin una dintre propozițiile $p(x_0)$ și $q(x_0)$ este adevărată, adică atunci când $x_0 \in A$ sau $x_0 \in B$, deci $x_0 \in A \cup B$.

4. Implicația

A. Implicația propozițiilor

Implicația propozițiilor p și q , în această ordine, este propoziția „ p implică q ” sau „dacă p , atunci q ” (notată $p \rightarrow q$), care este falsă dacă p este adevărată și q este falsă și este adevărată în celelalte cazuri.

Propoziția p se numește **premisă** sau **ipoteză**, iar propoziția q se numește **concluzie**.

Valoarea de adevăr a propoziției „ p implică q ” este ilustrată în tabelul de adevăr alăturat:

OBSERVAȚIE.

Propoziția „ p implică q ” se poate citi și „dacă p , atunci q ” sau „din p rezultă q ”.

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

EXEMPLE:

- Se consideră propozițiile p : „8 este multiplu al lui 4.” și q : „6 este număr par.”. Propoziția $p \rightarrow q$: „8 este multiplu al lui 4 implică 6 este număr par.” este adevărată, deoarece ambele propoziții p și q sunt adevărate.
- Se consideră propozițiile p : „ $2 + 3 = 5$ ” și q : „ $2^2 + 3^2 = 5^2$ ”. Propoziția $p \rightarrow q$: „ $2 + 3 = 5$ implică $2^2 + 3^2 = 5^2$ ” este falsă, deoarece propoziția p este adevărată și propoziția q este falsă.

B. Implicația predicatelor

Se consideră predicatele $p(x)$ și $q(x)$, unde $x \in E$ și $E \neq \emptyset$.

Implicația predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ (în această ordine) este predicatul „ $p(x)$ implică $q(x)$ ” sau „dacă $p(x)$, atunci $q(x)$ ”, notat $p(x) \rightarrow q(x)$.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \rightarrow q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care predicatul $p(x) \rightarrow q(x)$ devine o propoziție adevărată.

EXEMPLE:

- Fie predicatele $p(x)$: „ $x > 3$ ”, $x \in \mathbb{N}$, și $q(x)$: „ $x > 5$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Implicația predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul $p(x) \rightarrow q(x)$: „ $x > 3$ implică $x > 5$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $\{4, 5, 6, \dots\}$, iar mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$ este $\{6, 7, 8, \dots\}$.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \rightarrow q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care fie predicatul $p(x)$ devine propoziție falsă (mulțimea $\{0, 1, 2, 3\}$), fie ambele predicate $p(x)$ și $q(x)$ devin propoziții adevărate (mulțimea $\{6, 7, 8, \dots\}$, adică $\mathbb{N} \setminus \{4, 5\}$).

- Fie predicatele $p(x)$: „ $x : 6$ ”, $x \in \mathbb{N}$ și $q(x)$: „ $x : 3$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Implicația predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul $p(x) \rightarrow q(x)$: „ $x : 6$ implică $x : 3$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $\{0, 6, 12, 18, \dots\}$, iar mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$ este $\{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\}$.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \rightarrow q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care fie predicatul $p(x)$ devine propoziție falsă (mulțimea $\mathbb{N} \setminus \{0, 6, 12, 18, \dots\}$), fie ambele predicate $p(x)$ și $q(x)$ devin propoziții adevărate (mulțimea $\{0, 6, 12, 18, \dots\}$, adică $\mathbb{N}$).

Dacă notăm cu A mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ și cu B mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$, atunci $A = \{0, 6, 12, 18, \dots\}$ și $B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\}$. Observăm că orice element din mulțimea A aparține și mulțimii B (orice multiplu de 6 este și multiplu de 3), deci $A \subset B$.

5. Echivalența

A. Echivalența propozițiilor

Echivalența propozițiilor p și q este propoziția „ p echivalent cu q ” sau „ p dacă și numai dacă q ” (notată $p \leftrightarrow q$), care este adevărată când ambele propoziții au aceeași valoare de adevăr și este falsă în celelalte cazuri.

Valoarea de adevăr a propoziției „ p echivalent cu q ” este ilustrată în tabelul de adevăr alăturat:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

EXEMPLU:

1. Se consideră propozițiile p : „ $8 : 4 = 2$ ” și q : „ $6 + 3 = 9$ ”.

Propoziția $p \leftrightarrow q$: „ $8 : 4 = 2$ echivalent cu $6 + 3 = 9$ ” este adevărată, deoarece ambele propoziții p și q sunt adevărate.

2. Se consideră propozițiile p : „ $3 + 3 = 9$ ” și q : „ $5 < 6$ ”. Propoziția $p \leftrightarrow q$: „ $3 + 3 = 9$ dacă și numai dacă $5 < 6$ ” este falsă, deoarece propozițiile nu au aceeași valoare de adevăr (propoziția p este falsă și propoziția q este adevărată).

B. Echivalența predicatelor

Se consideră predicatele $p(x)$ și $q(x)$, unde $x \in E$ și $E \neq \emptyset$.

Echivalența predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul „ $p(x)$ este echivalent cu $q(x)$ ” sau „ $p(x)$ dacă și numai dacă $q(x)$ ”, notat $p(x) \leftrightarrow q(x)$.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \leftrightarrow q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care predicatele $p(x)$ și $q(x)$ devin propoziții cu aceeași valoare de adevăr (sunt ambele adevărate sau ambele false).

EXEMPLU:

Se consideră predicatele $p(x)$: „ x este număr par.”, $x \in \mathbb{N}$ și $q(x)$: „ $x : 2$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Echivalența predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul $p(x) \leftrightarrow q(x)$: „ x este număr par dacă și numai dacă $x : 2$ ”, $x \in \mathbb{N}$. Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$, iar mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$ este $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$.

Dacă notăm cu A mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ și cu B mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$, atunci $A = B$.

În general, două predicate sunt echivalente dacă au aceeași mulțime de adevăr.

În calculul propozițional, cu litere (prin care se notează propoziții) și cu simbolurile operatorilor logici ($\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) se formează expresii numite **formule ale calculului propozițional**.

Două formule ale calculului propozițional α și β se numesc **echivalente** dacă, pentru orice valori de adevăr ale propozițiilor care le compun, au **aceeași valoare de adevăr**. Notăm acest lucru prin $\alpha \equiv \beta$.

EXEMPLU:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

O formulă a calculului propozițional care este adevărată, indiferent de valorile de adevăr ale propozițiilor care o compun, se numește **tautologie**.

EXEMPLU:  

$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ este tautologie.

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

O formulă a calculului propozițional care este falsă, indiferent de valorile de adevăr ale propozițiilor care o compun, se numește **contradicție**.

Aplic

1. Scrie negațiile următoarelor propoziții:

- | | |
|---|---------------------------------|
| a) „Temperatura aerului este pozitivă.” | e) „ $2 + 9 = 10$ ” |
| b) „Îmi place matematica.” | f) „Trenul are întârziere.” |
| c) „ $122 = 144$ ” | g) „ $2 < 5$ ” |
| d) „ $\pi = 3,14$ ” | h) „Un triunghi are 4 vârfuri.” |

2. Verifică dacă următoarele propoziții compuse sunt adevărate:

- a) „Numărul natural 10 este par și este mai mare decât 8.”
 b) „ $10 < 11$ sau $10^2 = 20$ ”
 c) „Dacă $5 > 8$, atunci 7 este număr par.”
 d) „Dacă triunghiul are trei laturi, atunci pătratul are cinci vârfuri.”
 e) „ $\sqrt{2} \in \mathbb{N}$ dacă și numai dacă $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$.”
 f) „Numărul 121 este par sau este pătrat perfect.”

3. Se consideră următoarele propoziții: p : „5 este număr prim”, q : „2 este pătratul unui număr natural” și r : „ $2 + 2 = 5$ ”. Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor: $p \vee q$, $p \vee r$, $q \rightarrow p$, $r \leftrightarrow q$, $\neg p$, $p \wedge r$, $r \rightarrow p$, $p \leftrightarrow q$, $\neg q$.

4. Se consideră propozițiile: p_1 : „ $3,2 < 3,15$ ”; p_2 : „ $\sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 3\sqrt{2} + \sqrt{12} = 0$ ”;
 p_3 : „ $(3 - 5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}) \cdot 2 = 5$ ”; p_4 : „ $\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{18} = 6$ ”; p_5 : „ $5,36 + 2,4 = 7,40$ ”.

Stabilește valoarea de adevăr a fiecărei propoziții:

- | | | | |
|---------------------|--------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|
| a) $\neg p_1$; | d) $p_1 \rightarrow p_4$; | g) $p_4 \leftrightarrow p_1$; | j) $p_3 \vee p_5$; |
| b) $\neg p_5$; | e) $p_2 \rightarrow p_5$; | h) $p_2 \wedge p_3$; | k) $p_4 \vee p_2$; |
| c) $p_1 \vee p_4$; | f) $p_3 \leftrightarrow p_2$; | i) $p_3 \wedge p_4$; | l) $(\neg p_2) \vee (\neg p_3)$. |

5. Se consideră predicatele $p(x)$: „ $2x - 6 < 3x + 1$ ”, $x \in \mathbb{R}$, și $q(x)$: „ $|x + 2| \leq 11$ ”, $x \in \mathbb{R}$. Determină mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \wedge q(x)$.

EXERSEAZĂ!

Verifică dacă următoarele raționamente matematice sunt corecte folosind echivalențele logice.

- Dacă numărul n este divizibil cu 6, atunci acesta este divizibil cu 2.

Numărul n este divizibil cu 6. Prin urmare, n este divizibil cu 2.

- Dacă patrulaterul ABCD este dreptunghi, atunci acesta are diagonalele congruente.

Patrulaterul ABCD nu are diagonalele congruente. Prin urmare, ABCD nu este dreptunghi.

- Dacă numărul n este divizibil cu 9, atunci acesta este divizibil cu 3.

Numărul n este divizibil cu 3. Prin urmare, n este divizibil cu 9.

- Dacă numărul n este divizibil cu 12, atunci acesta este divizibil cu 4.

Dacă numărul n este divizibil cu 4, atunci acesta este un număr par. Prin urmare, dacă numărul n este divizibil cu 12, atunci este un număr par.

EXERSEAZĂ!

Fie propozițiile:

p : „Andrei învață la matematică.”

q : „Andrei este obosit.”

r : „Andrei primește o notă mare.”

i) Scrie următoarele propoziții:

$q \rightarrow r$;

$p \wedge q$;

$\neg p$;

$\neg(p \vee q)$;

$(\neg p) \vee (\neg q)$;

$(r \wedge q) \rightarrow p$;

$(p \wedge q) \vee p$.

ii) Scrie formulele de calcul propozițional corespunzătoare enunțurilor:

a) Andrei nu învață la matematică, dar primește o notă mare.

b) Dacă Andrei este obosit și nu învață la matematică, atunci nu primește o notă mare.

c) Nu este adevărat că Andrei este obosit sau nu învață la matematică.

d) Dacă Andrei învață la matematică, atunci primește o notă mare.

e) Andrei învață la matematică dacă și numai dacă nu este obosit.



6. Se consideră predicatele $p(x)$: „ $2(x - 3) - 4(x + 1) > -18$ ”, $x \in \mathbb{R}$, și $q(x)$: „ $3x - 9 \geq 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$. Determină mulțimile de adevăr ale predicatelor:
 - a) $\neg p(x)$;
 - b) $p(x) \vee q(x)$;
 - c) $p(x) \wedge q(x)$;
 - d) $p(x) \rightarrow q(x)$;
 - e) $p(x) \leftrightarrow q(x)$.
7. Se consideră predicatele $p(x, y)$: „ $2x + y = 6$ ”, $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și $q(x, y)$: „ $3x + y = 8$ ”, $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determină mulțimile de adevăr ale predicatelor:
 - a) $p(x, y) \vee q(x, y)$;
 - b) $p(x, y) \rightarrow q(x, y)$;
 - c) $q(x, y) \rightarrow p(x, y)$;
 - d) $p(x, y) \leftrightarrow q(x, y)$.
8. Folosind propozițiile p : „12 este număr impar”, q : „ $3 + 4 = 7$ ” și r : „7 divide 12”, scrie în caiet câte două propoziții cu fiecare dintre operatorii logici „nu”, „sau”, „și”, „implică”, „echivalent”. Precizează valorile de adevăr ale acestora.
9. Se consideră predicatele $p(x)$: „ $x - 1 \leq 10$ ”, $x \in \mathbb{R}$, și $q(x)$: „ $2x - 3 > 5$ ”, $x \in \mathbb{R}$. Determină mulțimea de adevăr a fiecărui predicat: $\neg p(x)$, $p(x) \vee q(x)$, $p(x) \wedge q(x)$.
10. Se consideră predicatele $p(x)$: „ $x - 1 = 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$, și $q(x)$: „ $x^2 - 1 = 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$.
 - a) Determină mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \rightarrow q(x)$.
 - b) Sunt predicatele $p(x)$ și $q(x)$ echivalente?
11. Identifică predicatele implicate în următoarele enunțuri, apoi scrie enunțurile folosind simboluri logice.
 - a) „Un număr natural este par dacă și numai dacă este divizibil cu 2.”
 - b) „Dacă un număr natural este multiplu de 4, atunci este număr par.”
 - c) „Un număr natural este divizibil cu 3 dacă și numai dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3.”
 - d) „Dacă un patrulater este romb, atunci laturile lui sunt congruente.”
12. Se consideră propoziția compusă „Dacă în triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 30^\circ$ și $\sphericalangle B = 70^\circ$, atunci $\sphericalangle C = 80^\circ$.”.
 - a) Identifică propozițiile simple care alcătuiesc propoziția dată și notează-le cu literele p , q și r .
 - b) Scrie propoziția compusă dată folosind literele p , q , r și operatori logici.
13. Fie p și q două propoziții simple. Realizează tabelul de adevăr pentru fiecare dintre următoarele propoziții compuse:
 - a) $(p \vee q) \rightarrow p$;
 - b) $q \rightarrow (p \wedge q)$;
 - c) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow q$;
 - d) $(\neg p \vee q) \rightarrow \neg p$;
 - e) $\neg q \wedge (p \vee q)$;
 - f) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$;
 - g) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \vee q)$;
 - h) $(\neg p \vee q) \rightarrow \neg p$.
14. Demonstrează următoarele echivalențe cu ajutorul tabelelor de adevăr:
 - a) $p \equiv \neg(\neg p)$;
 - b) $p \rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$;
 - c) $p \rightarrow q \equiv (\neg q) \rightarrow (\neg p)$;
 - d) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.
15. Arată că următoarele formule ale calculului propozițional sunt tautologii:
 - a) $p \rightarrow (p \vee q)$;
 - b) $(p \wedge q) \rightarrow r$;
 - c) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$;
 - d) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$;
 - e) $[(p \vee q) \vee r] \leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$;
 - f) $[(p \wedge q) \wedge r] \leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$.

1.3. Cuantificatori

Descopăr

1. Într-o clasă sunt 28 de elevi. Se consideră propozițiile p : „Toți elevii sunt prezenți.” și q : „Există un elev absent.”. Pot fi adevărate simultan cele două propoziții?
2. Care dintre propozițiile p : „Pentru orice număr natural x , $x + 1 > x$.” și q : „Există un număr natural x pentru care $x + 1 = x$.” este adevărată?
3. Care dintre propozițiile p : „Orice număr par este divizibil cu 2.”, q : „Există un număr natural divizibil cu 7.” și r : „Orice număr natural este divizibil cu 7.” sunt adevărate?



Învăț

Cuantificatorul universal

Se consideră $p(x)$ un predicat unar, unde $x \in E$ și $E \neq \emptyset$.

Propoziția „Oricare ar fi $x \in E$ are loc $p(x)$.”, notată $(\forall x) p(x)$, se numește propoziție universală asociată predicatului $p(x)$.

Cuantificatorul „**oricare ar fi**” sau „**pentru oricare**” se numește **cuantificator universal** și se notează cu simbolul „ $\forall$ ”.

Propoziția $(\forall x) p(x)$ este adevărată, dacă pentru orice $x \in E$, propoziția $p(x)$ este adevărată.

Propoziția $(\forall x) p(x)$ este falsă dacă există cel puțin un element $x_0 \in E$ pentru care propoziția $p(x_0)$ este falsă.

EXEMPLE:

1. Fie predicatul $p(x)$: „ $x^2 + 3 > 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$.

Propoziția $(\forall x) p(x)$: „Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 3 > 0$.” este adevărată.

2. Fie predicatul $p(x)$: „ $x^2 - 5 \leq 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$.

Propoziția $(\forall x) p(x)$: „Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 5 \leq 0$.” este falsă, deoarece există $x_0 = 3$ pentru care propoziția $p(3)$: „ $3^2 - 5 \leq 0$ ” este falsă.

Cuantificatorul existențial

Fie $p(x)$ un predicat unar, unde $x \in E$ și $E \neq \emptyset$.

Propoziția „Există cel puțin un x în E astfel încât are loc $p(x)$.”, notată $(\exists x) p(x)$, se numește propoziție existențială asociată predicatului $p(x)$.

Cuantificatorul „**există**” se numește **cuantificator existențial** și se notează cu simbolul „ $\exists$ ”.

Propoziția $(\exists x) p(x)$ este adevărată dacă există cel puțin o valoare $x_0 \in E$ pentru care $p(x_0)$ este propoziție adevărată.

Propoziția $(\exists x) p(x)$ este falsă dacă, pentru orice $x \in E$, propoziția $p(x)$ este falsă.

EXERSEAZĂ!

1. Precizează valoarea de adevăr a fiecărei propoziții:

- a) $(\forall x)(\forall y)(x \cdot y = 0)$,
 $x, y \in \mathbb{R}$;
 b) $(\forall x)(\exists y)(x \cdot y = 0)$,
 $x, y \in \mathbb{R}$;
 c) $(\exists x)(\forall y)(x \cdot y = 0)$,
 $x, y \in \mathbb{R}$;
 d) $(\exists x)(\exists y)(x \cdot y = 0)$,
 $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Fie $E \neq \emptyset$, $F \neq \emptyset$.

Scrie câte o propoziție adevărată și una falsă pentru fiecare structură:

- a) $(\forall x)(\forall y)p(x, y)$,
 $x \in E, y \in F$;
 b) $(\forall x)(\exists y)p(x, y)$,
 $x \in E, y \in F$;
 c) $(\exists x)(\forall y)p(x, y)$,
 $x \in E, y \in F$;
 d) $(\exists x)(\exists y)p(x, y)$,
 $x \in E, y \in F$.

EXEMPLE:

1. Fie predicatul $p(x)$: „ $x^2 - 4 < 0$ ”, $x \in \mathbb{Z}$.

Propoziția $(\exists x)p(x)$: „Există $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x^2 - 4 < 0$ ” este adevărată, deoarece există $x_0 = 1$ pentru care propoziția $p(1)$: „ $1^2 - 4 < 0$ ” este adevărată.

2. Fie predicatul $p(x)$: „ $x^2 < 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$.

Propoziția $(\exists x)p(x)$: „Există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2 < 0$ ” este falsă, deoarece nu există niciun număr real x_0 astfel încât $x_0^2 < 0$.

OBSERVAȚIE.

Dacă predicatul are mai multe variabile, atunci se pot forma propoziții utilizând fie numai cuantificatorul universal „ $\forall$ ”, fie numai cuantificatorul existențial „ $\exists$ ”, dar și combinații ale ambilor cuantificatori. De exemplu, pentru predicatul binar $p(x, y)$, putem alcătui următoarele propoziții folosind cuantificatorii:

- $(\forall x)(\forall y)p(x, y)$; • $(\forall x)(\exists y)p(x, y)$;
- $(\exists x)(\exists y)p(x, y)$; • $(\exists x)(\forall y)p(x, y)$.

Exercițiu rezolvat

Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor următoare:

- a) $(\forall x)(x + 1 > x)$, unde $x \in \mathbb{N}$; c) $(\forall x)(\exists y)(y = x + 2)$, unde $x, y \in \mathbb{N}$;
 b) $(\exists x)(x - 3 = 0)$, unde $x \in \mathbb{Z}$; d) $(\exists x)(x < 0)$, unde $x \in \mathbb{N}$.

Rezolvare:

a) Rezolvăm în $\mathbb{N}$ inecuația $x + 1 > x$ și obținem $1 > 0$, ceea ce este adevărat. Așadar, $x + 1 > x$ pentru orice număr natural x , de unde rezultă că propoziția este adevărată.

b) Rezolvăm în $\mathbb{Z}$ ecuația $x - 3 = 0$ și obținem $x = 3$. Deci, există $x_0 = 3 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x_0 - 3 = 0$, prin urmare propoziția este adevărată.

c) $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 2 \in \mathbb{N} \Rightarrow (\exists y) \in \mathbb{N}, y = x + 2 \Rightarrow$ Propoziția este adevărată.

d) Cum orice număr natural este mai mare sau egal cu 0, propoziția este falsă.

Portofoliu

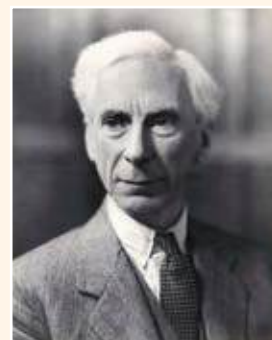
Logica în viața cotidiană

Logica este prezentă în viața de zi cu zi, chiar dacă nu ne dăm seama. De fiecare dată când luăm o decizie sau respectăm o regulă, folosim operații logice. De exemplu, când spui „dacă învăț, iau notă bună”, folosești implicația. Astfel, logica ne ajută să gândim corect și să luăm decizii mai bune.

1. Pentru fiecare operație logică, scrie definiția, formularea cu ajutorul simbolurilor și două exemple (unul cu propoziții și unul cu predicate).
2. Descrie o situație reală din viața ta (la școală, în familie, cu prietenii) în care să folosești cel puțin trei operații logice.
3. Creează o bandă desenată (trei-șase cadre) în care să folosești cel puțin trei operații logice.

Aplic

- Stabilește valorile de adevăr ale următoarelor propoziții:
 - „Există substanțe care nu se dizolvă în apă.”
 - „Toți oamenii au nevoie de apă pentru a trăi.”
 - „Există o persoană care îi cunoaște pe toți oamenii.”
 - „Toți oamenii folosesc internetul.”
 - „Fiecare pacient are un medic.”
- Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor următoare:
 - $(\exists x)(2x - 3 = 7), x \in \mathbb{R};$
 - $(\exists x)(4x + 5 = 3), x \in \mathbb{Z};$
 - $(\forall x)(6 - 2x \neq 2), x \in \mathbb{N};$
 - $(\forall x)(5 - 2x > 2 + x), x \in \mathbb{N};$
 - $(\exists x)(5x + 3 < 2(x + 4)), x \in \mathbb{R};$
 - $(\exists x)(1 - x \geq -2(x - 1)), x \in \mathbb{Z}.$
- Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor următoare:
 - $(\forall x)(\exists y)(y \geq x), x, y \in \mathbb{N};$
 - $(\exists x)(\forall y)(x \geq y), x, y \in \mathbb{R};$
 - $(\forall x)(\exists y)(y = x - 1), x, y \in \mathbb{N};$
 - $(\forall x)(\exists y)(x = 2y \text{ sau } x = 2y + 1), x, y \in \mathbb{N};$
 - $(\exists x)(\forall y)(xy = y), x, y \in \mathbb{Z};$
 - $(\forall x)(\exists y)(xy = y), x, y \in \mathbb{Z}.$
 - $(\exists x)(\forall y)(y = x - 1), x, y \in \mathbb{N};$
- Scris propozițiile următoare folosind cuantificatori și precizează valorile de adevăr ale acestora:
 - „Pentru orice număr întreg, există un număr întreg mai mare decât el.”
 - „Pentru orice număr real x , există un număr real y astfel încât $x + y = 1$.”
 - „Există un număr natural care este multiplu de 4 și multiplu de 6.”
 - „Pentru orice număr natural există un număr natural mai mare decât dublul său.”
 - „Pentru orice număr real x , există un număr real y astfel încât $y^2 = x^2$.”
 - „Oricare ar fi numerele reale x și y , $x^2 + 1 + y^2 > 0$.”
 - „Oricare ar fi numărul natural x , există un număr natural y astfel încât $x : y$.”
 - „Există numere naturale x și y astfel încât $x + 2y = 3$ și $2x - 3y = -1$.”
 - „Există un număr real x astfel încât $x \cdot y = 0$, pentru orice număr real y .”
- Stabilește valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
 $(\forall x)(\forall y) p(x, y) \wedge q(x, y), (\exists x)(\exists y) p(x, y) \wedge q(x, y), (\forall x)(\forall y) p(x, y) \vee q(x, y),$
 $(\exists x)(\exists y) p(x, y) \vee q(x, y).$
 - $p(x, y): „3x - 2y + 5 = 0”, x, y \in \mathbb{R}, \text{ și } q(x, y): „x + 4y = 5”, x, y \in \mathbb{R};$
 - $p(x, y): „2x - 3y = 8”, x, y \in \mathbb{R}, \text{ și } q(x, y): „-6x + 9y - 24 = 0”, x, y \in \mathbb{R};$
 - $p(x, y): „3x + y + 5 = 0”, x, y \in \mathbb{R}, \text{ și } q(x, y): „6x + 2y = -10”, x, y \in \mathbb{R}.$
- Precizează valoarea de adevăr a fiecăreia dintre propozițiile următoare:
 - $(\forall x)(\forall y)(x + y = 0), x, y \in \mathbb{R};$
 - $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0), x, y \in \mathbb{R};$
 - $(\exists x)(\forall y)(x + y = 0), x, y \in \mathbb{R};$
 - $(\exists x)(\exists y)(x + y = 0), x, y \in \mathbb{R}.$



Bertrand Russell
(1872-1970)



Giuseppe Peano
(1858-1932)

ȘTIAI CĂ...?

Notăția actuală pentru cuantificatorii predicatelor se datorează în principal influențelor filosofului și logicianului **Bertrand Russell** și a matematicianului **Giuseppe Peano**.

$\forall$ (cuantificatorul universal): un „A” inversat, derivat din cuvântul *All* sau *Alle* (toți/fiecare).

$\exists$ (cuantificatorul existențial): un „E” rotit, derivat din cuvântul *Exists* sau *Existiert* (există).



1.4. Reguli de negare

Descopăr

Scrie negația fiecăreia dintre propozițiile următoare:

- | | |
|---|---|
| a) „ $\pi \in \mathbb{Q}$ ” | e) „Dacă plouă, atunci iau umbrela.” |
| b) „ $3 \geq 1$ ” | f) „12 este multiplu de 3, dacă și numai dacă 12 este multiplu de 4.” |
| c) „Astăzi plouă și este frig.” | g) „Toți elevii au rezolvat problema.” |
| d) „Triunghiul ABC este isoscel sau dreptunghic.” | h) „Există un număr natural divizibil cu 7.” |

Învăț

Din rezolvarea subpunctelor de la c) la f) ale exercițiului propus la secțiunea **Descopăr**, observăm că negarea unei propoziții compuse nu înseamnă doar adăugarea cuvântului „nu”, ci presupune modificarea operatorului logic al enunțului.

Regulile de negare ale propozițiilor compuse

Se consideră p și q propoziții simple. Atunci:

- Negația propoziției „ p și q ” ($p \wedge q$) este propoziția „non p sau non q ”, notată $(\neg p) \vee (\neg q)$.
- Negația propoziției „ p sau q ” ($p \vee q$) este propoziția „non p și non q ”, notată $(\neg p) \wedge (\neg q)$.
- Negația propoziției „ p implică q ” ($p \rightarrow q$) este propoziția „ p și non q ”, notată $p \wedge (\neg q)$.
- Negația propoziției „ p echivalent cu q ” ($p \leftrightarrow q$) este propoziția „(p și non q) sau (non p și q)”, notată $[p \wedge (\neg q)] \vee [(\neg p) \wedge q]$.

EXEMPLE:

1. Negația propoziției „Numărul 6 este par și este multiplu de 3.” este propoziția „Numărul 6 nu este par sau nu este multiplu de 3.”
2. Negația propoziției „Numărul 5 este par sau este număr prim.” este propoziția „Numărul 5 nu este par și nu este număr prim.”
3. Negația propoziției „Dacă 12 este multiplu de 4, atunci este număr par.” este propoziția „12 este multiplu de 4 și nu este număr par.”
4. Negația propoziției „ $2^3 = 8$ echivalent cu $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.” este propoziția „($2^3 = 8$ și $2 \cdot 2 \cdot 2 \neq 8$) sau ($2^3 \neq 8$ și $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$).”

OBSERVAȚIE.

Regulile de negare ale conjuncției și disjuncției se numesc **Legile lui De Morgan**, după matematicianul britanic Augustus De Morgan.



Augustus De Morgan (1806-1871)
matematician britanic,
considerat întemeietorul logicii formale

Regulile de negare ale propozițiilor universale și existențiale



Fie $p(x)$, unde $x \in E$, $E \neq \emptyset$, un predicat unar.

- **Negația propoziției „Oricare ar fi x din E are loc $p(x)$.” este propoziția „Există cel puțin un element x în E pentru care nu are loc $p(x)$.”**
- **Negația propoziției „Există cel puțin un x în E astfel încât are loc $p(x)$.” este propoziția „Oricare ar fi x din E , nu are loc $p(x)$.”**

EXEMPLE:

1. Negația propoziției „ $(\forall x) (x^2 \geq 0)$ ”, $x \in \mathbb{R}$ este „ $(\exists x) (x^2 < 0)$ ”, $x \in \mathbb{R}$.
2. Negația propoziției „ $(\exists x) (x^2 = 2)$ ”, $x \in \mathbb{R}$ este „ $(\forall x) (x^2 \neq 2)$ ”, $x \in \mathbb{R}$.

OBSERVAȚIE.

Regulile de negare formulate anterior se adaptează în mod corespunzător și pentru negarea propozițiilor obținute prin cuantificarea predicatelor care au n variabile. De exemplu, negația propoziției $(\forall x) (\exists y) p(x, y)$ poate fi formulată $(\exists x) [\neg((\exists y) p(x, y))]$ sau $(\exists x) (\forall y) (\neg p(x, y))$.

Aplic



1. Pentru fiecare dintre propozițiile compuse de mai jos, scrie propozițiile simple care o alcătuiesc și negația.
 - a) „Elevul a învățat și a rezolvat exercițiile.”
 - b) „12 este număr natural par sau impar.”
 - c) „Dacă un număr natural este divizibil cu 4, atunci este par.”
 - d) „Dacă un număr este multiplu de 6, atunci este multiplu de 2.”
 - e) „Triunghiul ABC este dreptunghic și are un unghi cu măsura egală cu 30° .”
 - f) „Numărul 16 este divizibil cu 2 și numărul 10 este divizibil cu 3.”
 - g) „Un triunghi este echilateral dacă și numai dacă toate unghiurile sale au măsurile egale cu 60° .”
 - h) „Un număr natural este prim dacă și numai dacă are exact doi divizori.”
2. Scrie negația fiecărei propoziții.
 - a) „Orice număr natural este mai mare sau egal cu 0.”
 - b) „Există un număr întreg care este multiplu de 3.”
 - c) „Pentru orice număr real x , dacă $x > 1$, atunci $x^2 > 1$.”
 - d) „Există un număr natural care este divizibil cu 4 și cu 6.”
 - e) „Toate numerele reale pozitive au inversul pozitiv.”
 - f) „Există un număr prim mai mare decât 50.”
 - g) „Pentru orice număr întreg x , dacă x este multiplu de 10, atunci este multiplu de 5.”
 - h) „Nu există un număr real al cărui pătrat să fie negativ.”
 - i) „Pentru orice număr real x și orice număr real y , $x + y \neq 0$.”
 - j) „Pentru orice număr real x există un număr real y astfel încât $x^2 \cdot y > 0$.”
 - k) „Există un număr real x astfel încât $y > x$, pentru orice număr real y .”
 - l) „Există numerele reale x și y astfel încât $y^3 \leq 3^x$.”
 - m) „Toți elevii din clasă au manualul de matematică.”
 - n) „Toate magazinele sunt deschise duminică.”
 - o) „Există un autobuz care ajunge la timp în fiecare zi.”

JOC ÎN ECHIPE:



„Universalul sub atac”

Elevii se vor împărți în două echipe:

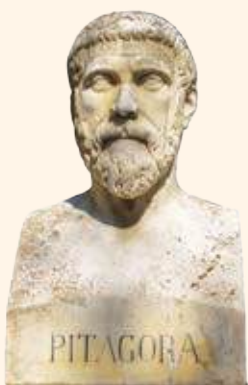
 „Demolatorii”
(neagă propozițiile date)

 „Apărătorii”
(susțin propozițiile date)

Demolatorii trebuie să găsească UN contraexemplu.

Apărătorii trebuie să arate că NU există excepții.

- Pentru orice număr real x avem $x^2 > 0$.
- Suma oricăror două numere impare este un număr par.
- Oricare ar fi numărul întreg n , numărul $n^2 + n$ este par.
- Dacă un număr natural se divide cu 3, atunci el se divide și cu 9.
- Pentru orice număr real x avem $\sqrt{x^2} = x$.
- Oricare ar fi numărul natural n , numărul $2^n + 1$ este prim.
- Produsul oricăror două numere iraționale este un număr irațional.
- Pentru orice numere reale a și b , dacă $a^2 = b^2$, atunci $a = b$.
- Orice număr prim mai mare decât 2 este număr impar.
- Pentru orice număr real x avem $x + 1 > x$.



ȘTIAI CĂ...?

Școala pitagoreică, fondată de Pitagora în secolul al VI-lea î.H., susținea că toate măsurile pot fi exprimate prin rapoarte de numere întregi, adică prin numere raționale. În acest context, pitagoreicii au studiat lungimea diagonalei unui pătrat de latură 1 (adică $\sqrt{2}$). Unul dintre discipoli a descoperit faptul că aceasta nu poate fi exprimată ca raport de numere întregi, deci este un număr irațional.

Surse antice îi atribuie această descoperire lui Hippiasos din Metaponte, dar nu există dovezi istorice sigure. Se spune că rezultatul a fost ținut secret, deoarece contrazicea convingerile pitagoreice.

2.1. Metoda reducerii la absurd

Descopăr



1. Fie a, b și c trei numere reale, astfel încât $a + b + c < 12$. Demonstrează că cel puțin unul dintre numerele a, b sau c este mai mic decât 4.
2. Demonstrează că nu există niciun număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 5.
3. Fie propozițiile p și q . Demonstrează echivalența $p \rightarrow q \equiv (\neg q) \rightarrow (\neg p)$.

Învăț

Se consideră propozițiile p și q și echivalența $p \rightarrow q \equiv (\neg q) \rightarrow (\neg p)$.

Tabelul valorilor de adevăr este:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$(\neg q) \rightarrow (\neg p)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1

Folosind această echivalență, în loc să demonstrăm implicația $p \rightarrow q$, demonstrăm implicația $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$. Această metodă de demonstrație se numește **metoda reducerii la absurd**.

EXEMPLU:

Să demonstrăm că numărul natural 2 nu este pătratul niciunui număr rațional.

Presupunem că numărul natural 2 este pătratul numărului rațional pozitiv a (altfel spus, $a^2 = 2$). Putem scrie $a = \frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și $(m, n) = 1$ (m și n sunt prime între ele).

Avem $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, de unde rezultă $\frac{m^2}{n^2} = 2$, deci $m^2 = 2 \cdot n^2$.

Cum $2 \cdot n^2 : 2$, obținem $m^2 : 2$, ceea ce implică $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ (m este număr par).

Înlocuind m cu $2k$ în relația $m^2 = 2 \cdot n^2$, obținem $4 \cdot k^2 = 2 \cdot n^2$, ceea ce implică $n^2 = 2 \cdot k^2$. De aici rezultă că n este un număr par.

Am obținut că m și n sunt numere naturale pare, deci 2 este un divizor comun al lor, ceea ce contrazice $(m, n) = 1$.

Această contradicție ne arată că presupunerea făcută (a număr rațional, $a^2 = 2$) este falsă.

Deci a nu este număr rațional.

Exerciții rezolvate

1. Dacă în n cutii se află m bomboane ($m > n$), atunci există cel puțin o cutie în care se află cel puțin două bomboane (**principiul lui Dirichlet**).

Rezolvare:

Presupunem că nu există nicio cutie în care să se afle cel puțin două bomboane, adică în fiecare cutie există cel mult o bomboană. Astfel, în cele n cutii vom avea cel mult n bomboane. Cum numărul de bomboane este m și $m > n$, am obținut o contradicție. Așadar, există cel puțin o cutie în care sunt cel puțin două bomboane.

2. La o reuniune, fiecare persoană prezintă dă mâna cu exact trei persoane. Arată că numărul participanților la reuniune este par.

Rezolvare:

Fie n numărul persoanelor participante la reuniune.

Presupunem că n este impar. Deoarece vor avea loc $3n$ strângeri de mână, rezultă că $3n$ este impar. Dar fiecare strângere este numărată de două ori, astfel că $3n$ trebuie să fie par, ceea ce este o contradicție. Așadar, presupunerea este falsă, deci la reuniune participă un număr par de persoane.

3. Demonstrează că există o infinitate de numere prime.

Rezolvare:

Presupunem că există un număr finit de numere prime. Fie $p_1, p_2, \dots, p_n$ toate numerele prime existente. Atunci numărul $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ nu este divizibil cu niciunul dintre numerele prime $p_1, p_2, \dots, p_n$. Deci N este număr prim sau este divizibil cu un alt număr prim diferit de $p_1, p_2, \dots, p_n$, ceea ce contrazice presupunerea făcută. Așadar, există o infinitate de numere prime.

Aplic

1. Demonstrează că numărul natural 3 nu este pătratul niciunui număr rațional.
2. Fie n un număr natural. Demonstrează că, dacă n^2 este impar, atunci n este impar.
3. Demonstrează că fracția $\frac{3n+8}{2n+5}$ este ireductibilă, pentru orice număr natural n .
4. Demonstrează că nu există numere naturale x și y astfel încât $x^2 - 2y^2 = 1$ și ambele numere, x și y , să fie pare.
5. Fie a, b, c și d numere reale. Arată că cel mai mic dintre numerele $a - b^2, b - c^2, c - d^2, d - a^2$ nu poate fi mai mare decât $\frac{1}{4}$.
6. Demonstrează că, pentru orice număr natural nenul n , numărul $12n + 1$ nu se poate scrie ca diferență a două numere prime.

Portofoliu

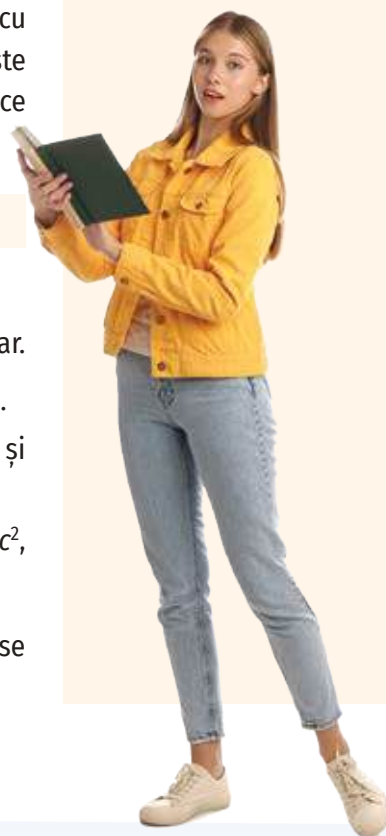
Rezolvă următoarea problemă, aplicând principiul lui Dirichlet.

La un seminar participă treisprezece persoane. Fiecare persoană cunoaște cel mult două limbi străine, iar oricare două persoane pot comunica într-o limbă străină comună. Demonstrează că există cel puțin șapte persoane care cunosc aceeași limbă.

ȘTIAI CĂ...?

Principiul lui Dirichlet
(Principiul cutiilor)

Se consideră k obiecte plasate în n cutii. Dacă $k > n$, adică sunt mai multe obiecte decât cutii, atunci există cel puțin o cutie care conține cel puțin două obiecte.



2.2. Metoda inducției matematice

Descopăr

1. Se consideră expresia $E(n) = n^2 + n + 17$, unde n este număr natural.
 - a) Arată că $E(0)$, $E(1)$, $E(2)$, $E(3)$ sunt numere prime.
 - b) Sunt $E(10)$ și $E(14)$ numere prime?
 - c) Pe baza observațiilor făcute prin rezolvarea subpunctelor a) și b), putem afirma că $E(n)$ este prim pentru orice număr natural n ?
 - d) Calculează $E(16)$. Ce observi?
2. Se consideră suma $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$, unde n este număr natural nenul.
 - a) Calculează sumele S_1 , S_2 , S_3 și S_4 . Ce observi?
 - b) Propune o formulă generală pentru calculul sumei S_n .
 - c) Cum poți demonstra că această formulă este valabilă și pentru calculul sumei S_{1000} , fără a efectua suma?

Învăț

Principiul inducției matematice

Dacă o propoziție $P(n)$, n fiind un număr natural, este adevărată pentru $n = 0$ și, din faptul că propoziția este adevărată pentru $n = k$ (k fiind un număr natural oarecare), rezultă că aceasta este adevărată și pentru numărul natural $n = k + 1$, atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n .

Din acest principiu derivă metoda de demonstrație numită **metoda inducției matematice**.

Fie $P(n)$ o propoziție care depinde de un număr natural $n \geq m$, m fiind un număr natural fixat.

Demonstrația prin metoda inducției matematice a propoziției $P(n)$ constă în două etape:

1. Se verifică faptul că propoziția $P(m)$ este adevărată.
2. Se presupune că propoziția $P(k)$ este adevărată și se demonstrează că propoziția $P(k + 1)$ este adevărată, k fiind un număr natural mai mare sau egal cu m .

Dacă ambele etape ale demonstrației sunt verificate, atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geq m$.

EXEMPLE:

1. $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$, pentru orice număr natural nenul n .

Fie propoziția $P(n)$: $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$, unde n este număr natural nenul.

– Verificăm faptul că propoziția $P(1)$ este adevărată:

$$P(1): 2 = 1(1 + 1) \Rightarrow P(1) \text{ este adevărată.}$$

– Demonstrăm $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

$P(k)$: $2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k(k+1)$, unde k este număr natural nenul;

$P(k+1)$: $2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k+1) = (k+1)(k+1+1)$, unde k este număr natural nenul;

$P(k+1)$: $2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$, unde k este număr natural nenul.

$$\underbrace{2 + 4 + 6 + \dots + 2k}_{k(k+1)} + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2) \Rightarrow P(k+1) \text{ este adevărată.}$$

Ambele etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sunt verificate, prin urmare propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n .

2. $7^n - 1$ este divizibil cu 6, pentru orice număr natural n .

Fie propoziția $P(n)$: $7^n - 1$ este divizibil cu 6, unde n este număr natural.

– Verificăm faptul că propoziția $P(0)$ este adevărată:

$P(0)$: $7^0 - 1$ este divizibil cu 6 $\Rightarrow P(0)$ este adevărată.

– Demonstrăm $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

$P(k)$: $7^k - 1$ este divizibil cu 6, unde k este număr natural;

$P(k+1)$: $7^{k+1} - 1$ este divizibil cu 6, unde k este număr natural;

$7^{k+1} - 1 = 7 \cdot 7^k - 7 + 6 = 7(7^k - 1) + 6$, unde k este număr natural.

Cum $7^k - 1$ este divizibil cu 6, rezultă că $7(7^k - 1) + 6$ este divizibil cu 6, deci propoziția $P(k+1)$ este adevărată.

Ambele etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sunt verificate, prin urmare propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n .

Exerciții rezolvate

- 1.** Calculează suma $S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, și apoi demonstrează că rezultatul obținut este corect, folosind metoda inducției matematice.

Rezolvare:

Observăm că forma generală a unui termen al sumei S este $\frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)}$, unde k este număr natural nenul.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2k+1) - (2k-1)}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(2k+1)}{(2k-1) \cdot (2k+1)} - \frac{(2k-1)}{(2k-1) \cdot (2k+1)} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right), \text{ pentru orice } \\ &\text{număr natural nenul } k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}, \text{ pentru } \\ &\text{orice număr natural nenul } n. \end{aligned}$$

Fie $P(n)$: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$, unde n este număr natural nenul.



ȘTIAI CĂ...?

- Întregul univers digital se bazează pe logica lui **George Boole**. El a înlocuit cuvintele „adevărat” și „fals” cu cifrele 1 și 0. Fără această simplificare, denumită **algebră booleană**, computerele și telefoanele mobile de astăzi nu ar fi putut exista.
- Matematicianul român **Grigore Moisil** este considerat „părintele informaticii” în România. Acesta a fost printre primii din lume care a folosit logica matematică pentru a explica funcționarea circuitelor electronice, demonstrând că matematica pură poate fi folosită pentru a construi mașini de calcul inteligente. Grigore Moisil este cel care a introdus informatica în școlile și universitățile din România, într-o vreme în care mulți considerau computerele doar niște curiozități ingineresti.

Demonstrăm că $P(n)$, unde n este număr natural nenul, este adevărată prin metoda inducției matematice.

– Verificăm faptul că propoziția $P(1)$ este adevărată:

$$P(1): \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} \Rightarrow P(1) \text{ este adevărată.}$$

– Demonstrăm $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

$$P(k): \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = \frac{k}{2k+1}, \text{ unde } k \text{ este număr natural nenul.}$$

$$P(k+1): \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} + \frac{1}{(2k+1) \cdot (2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}, \text{ unde } k \text{ este număr natural nenul;}$$

$$\underbrace{\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)}}_{\frac{k}{2k+1}} + \frac{1}{(2k+1) \cdot (2k+3)} =$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1) \cdot (2k+3)} = \frac{k(2k+3) + 1}{(2k+1) \cdot (2k+3)} = \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k+1) \cdot (2k+3)} =$$

$$= \frac{(2k+1) \cdot (k+1)}{(2k+1) \cdot (2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} \Rightarrow P(k+1) \text{ este adevărată.}$$

Ambele etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sunt verificate, prin urmare propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n .

2. Arată că $2^n > n^2$, pentru orice număr natural $n \geq 5$.

Rezolvare:

Fie $P(n): 2^n > n^2$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$.

– Verificăm că propoziția $P(5)$ este adevărată:

$$P(5): 2^5 > 5^2 \Rightarrow P(5) \text{ este adevărată.}$$

– Demonstrăm $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

$$P(k): 2^k > k^2, \text{ unde } k \in \mathbb{N}, k \geq 5;$$

$$P(k+1): 2^{k+1} > (k+1)^2, \text{ unde } k \in \mathbb{N}, k \geq 5.$$

Deoarece $2^k > k^2 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2 \Leftrightarrow 2^{k+1} > 2 \cdot k^2$, pentru a demonstra $2^{k+1} > (k+1)^2$ este suficient să demonstrăm că $2 \cdot k^2 > (k+1)^2$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 5$.

$$2 \cdot k^2 > (k+1)^2 \Leftrightarrow 2 \cdot k^2 > k^2 + 2k + 1 \Leftrightarrow k^2 - 2k - 1 > 0 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 > 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k-1)^2 > 2, \text{ adevărat pentru orice } k \in \mathbb{N}, k \geq 5.$$

Așadar, $2^{k+1} > 2 \cdot k^2 > (k+1)^2$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 5$, de unde rezultă că propoziția $P(k+1)$ este adevărată.

Ambele etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sunt verificate, prin urmare propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geq 5$.

Aplic

1. Folosind metoda inducției matematice, demonstrează că:

$$a) 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ pentru orice număr natural nenul } n;$$

$$b) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ pentru orice număr natural nenul } n;$$

$$c) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2, \text{ pentru orice număr natural nenul } n;$$

d) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, pentru orice număr natural nenul n ;

e) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n \cdot (3n+1) = n(n+1)^2$, pentru orice număr natural nenul n ;

f) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n ;

g) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$, pentru orice număr natural nenul n ;

h) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{3}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$, pentru orice număr natural nenul n ;

i) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$, pentru orice număr natural nenul n ;

j) $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$, pentru orice număr natural nenul n ;

k) $3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{33\dots3}_{n \text{ cifre de } 3} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$, pentru orice număr natural nenul n .

2. Demonstrează inegalitățile:

a) $3^n > 2n + 1$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$;

b) $2^n > (n+1)^2$, pentru orice număr natural $n \geq 6$;

c) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, pentru orice număr natural $n \geq 2$;

d) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$, pentru orice număr natural nenul n ;

e) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 1 + \frac{n-1}{n}$, pentru orice număr natural $n, n \geq 3$;

f) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < n$, pentru orice număr natural $n \geq 2$.

3. Demonstrează că, pentru orice număr natural n , avem:

a) $n^3 + 5n : 6$;

d) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} : 17$;

b) $7^{2n} - 4^{2n} : 33$;

e) $2n^3 + 3n^2 + 7n : 6$;

c) $4^n + 15n - 1 : 9$;

f) $9^{n+1} - 8n - 9 : 16$.

4. Pentru n număr natural nenul, calculează și apoi demonstrează prin metoda inducției matematice că rezultatele obținute sunt corecte.

a) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

c) $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

d) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$, $n \in \mathbb{N}^*$;

e) $2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + \dots + (n+1) \cdot (n+4)$, $n \in \mathbb{N}^*$;

f) $1 + 2 \cdot (1+2) + 3 \cdot (1+2+3) + \dots + n \cdot (1+2+\dots+n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

ȘTIAI CĂ...?

• Matematicianul **Bertrand Russell** a descoperit o eroare logică celebră, numită „paradoxul lui Russell”, care a forțat savanții să rescrie bazele matematicii. El a arătat că logica are nevoie de reguli stricte pentru a nu intra în contradicție cu ea însăși.

• **David Hilbert**, unul dintre cei mai mari matematicieni, a crezut că matematica poate fi complet automatizată. Acesta a lansat provocarea ca orice problemă matematică să poată fi rezolvată printr-un set finit de pași logici, deschizând calea către inventarea algoritmilor.

• **Kurt Gödel** a demonstrat, spre uimirea tuturor, că logica are limite. El a dovedit matematic faptul că, în orice sistem complex, există adevăruri care pot fi intuite, dar care nu vor putea fi niciodată demonstrate prin calcul.

Exerciții recapitulative

1. Stabilește valoarea de adevăr a propoziției p .

a) p : „ $\sqrt{2}$ este număr rațional.”;

b) p : „ $-1, (13) = -\frac{112}{99}$ ”;

c) p : „ $\sqrt{2^2 + 3^2} = 5$ ”;

d) p : „ $2^{-1} = -2$ ”.

2. Determină mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$.

a) $p(x)$: „ $|x - 2| + |4 - x^2| = 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$;

b) $p(x)$: „ $3x^2 - 14x - 35 = 0$ ”, $x \in \mathbb{Z}$.

3. Fie propozițiile p : „196 este pătrat perfect.” și q : „Un triunghi echilateral cu latura egală cu 10 cm are aria mai mare decât 40 cm².”. Determină valorile de adevăr ale propozițiilor p , $p \vee q$, $p \rightarrow q$.

4. Stabilește corespondența între coloanele A și B, astfel încât fiecărei propoziții compuse din coloana A să-i corespundă notația adecvată din coloana B:

A
1. „ $15 > 8$ și $2 + 8 = 10$ ”
2. „Dacă $[2,05] = 2$, atunci $\{2,05\} = 0,05$.”
3. „ $\left +\frac{3}{7}\right = \frac{3}{7}$ dacă și numai dacă $\left -\frac{3}{7}\right = \frac{3}{7}$ ”
4. „ $2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{5} = 10\sqrt{15}$ sau $-2 - 8 = -10$ ”

B
a. $p \leftrightarrow q$
b. $p \wedge q$
c. $p \rightarrow q$
d. $p \vee q$
e. $\neg p$

5. Se consideră predicatul $p(x, y)$: „ $x + 2y = 3$ ”, unde $x, y \in \mathbb{Z}$. Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor:

a) $p(1, 1)$;

b) $p(1, 0)$;

c) $(\exists x) p(x, -1)$;

d) $(\forall x) (\exists y) p(x, y)$.

6. Precizează valorile de adevăr ale următoarelor propoziții compuse:

a) „Dacă un număr este divizibil cu 12, atunci este divizibil cu 4.”

b) „Dacă $3 + 4 = 10$, atunci Luna este un satelit al Pământului.”

c) „3 este multiplu de 3 și 2 este multiplu de 4.”

7. Scrie negațiile propozițiilor următoare:

a) $(\forall x) \left(\frac{x}{x+1} \neq 1\right)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

b) $(\forall x) (x \text{ este par sau } x \text{ este impar})$, $x \in \mathbb{N}$;

c) $(\exists x) \left(\frac{1}{x} = x\right)$, $x \in \mathbb{R}^*$;

d) $(\exists x) (x^2 = 2)$, $x \in \mathbb{R}$.

8. Scrie negațiile propozițiilor următoare:

a) „Printr-un punct exterior unei drepte trece o singură paralelă la acea dreaptă.”

b) „Toate pătratele sunt dreptunghiuri.”

c) „Dacă un număr este pătrat perfect, atunci este natural.”

d) „Numărul 7 este prim și este impar.”

e) „Cel puțin un număr întreg este negativ.”

f) „8 este impar sau $4 > 2$.”

g) „Un număr este multiplu de 6 dacă și numai dacă este multiplu de 3.”

h) „Toți elevii care participă la olimpiade au medii peste 9.”

i) „Există în bibliotecă o carte nouă, care nu este împrumutată.”

j) „Toate produsele perisabile din magazin sunt la reducere.”

k) „Niciun tren anulat nu sosește la timp.”

l) „Există un locuitor al orașului care deține mașină, dar nu are permis de conducere.”



9. Se consideră predicatele $p_1(x)$: „ $x + 2 > 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$ și $p_2(x)$: „ $x - 1 \leq 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$. Determină mulțimile de adevăr ale predicatelor:
- a) $p_1(x)$; c) $p_1(x) \vee p_2(x)$; e) $(\neg p_1(x)) \wedge p_2(x)$;
 b) $p_2(x)$; d) $p_1(x) \wedge p_2(x)$; f) $p_1(x) \wedge (\neg p_2(x))$.
10. La ora de matematică, cei 28 de elevi ai unei clase participă la următorul joc: ies la tablă în ordine alfabetică și fiecare dintre ei scrie cu două numere mai mult decât a scris colegul care a ieșit la tablă înaintea lui. Primul elev a scris un număr.
- a) Câte numere a scris cel de-al 28-lea elev?
 b) Câte numere vor fi pe tablă după ce scrie numerele ultimul elev?
 c) Câte numere ar fi pe tablă după ce scrie ultimul elev, dacă în clasă ar fi n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) elevi? Demonstrează că rezultatul este corect folosind metoda inducției matematice.
11. Demonstrează că:
- a) $2 + 7 + 14 + \dots + (n^2 + 2n - 1) = \frac{n(2n^2 + 9n + 1)}{6}$, pentru orice număr natural nenul n ;
 b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$, pentru orice număr natural nenul n ;
 c) $1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < \frac{2n-1}{n}$, pentru orice număr natural $n > 3$;
 d) $\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, pentru orice număr natural $n \geq 2$;
 e) $\frac{1}{4n} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, pentru orice număr natural nenul n ;
 f) $(2^{n+1} \cdot 5^n + 7) : 9$, pentru orice număr natural nenul n ;
 g) $(21^{2n+1} - 23^n - 4^n) : 19$, pentru orice număr natural n ;
 h) $3^{2n+3} + 40n - 27 : 64$, pentru orice număr natural nenul n .
12. Fie n un număr natural, $n \geq 3$. Demonstrează că oricare ar fi n puncte în plan, astfel încât oricare 3 puncte să fie necoliniare, se pot construi $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ triunghiuri având vârfurile în aceste puncte.

Portofoliu

BucLa memoriei

Ești în ziua 40 a show-ului *Survival Genesis*. Te afli pe o insulă vulcanică, izolată, din Pacificul de Sud, iar tribul tău „Phoenix” este la limita epuizării. Ca șef de trib, porți pe umeri responsabilitatea întregii echipe: dacă nu ajungeți la punctul de extracție înainte de apus, sunteți eliminați din competiție.

În fața ta, jungla se desparte în două poteci identice. În mijlocul lor stă Păstrătorul Timpului, un localnic care cunoaște insula ca pe propria palmă. Însă producătorii au adăugat o regulă: acest om spune într-o zi adevărul, iar în următoarea zi minte. Nu ai nicio metodă electronică de a verifica în ce zi te afli, iar ceasul tău biometric indică faptul că mai ai doar două minute pentru a decide.

a) Formulează o singură întrebare pe care să i-o adresezi Păstrătorului Timpului, astfel încât, indiferent dacă astăzi el spune adevărul sau minte, să poți deduce cu certitudine, în funcție de răspunsul lui, care este drumul spre salvare.

b) Creează propria versiune a jocului „BucLa memoriei” cu trei personaje: unul care spune adevărul, unul care minte și unul care răspunde la întâmplare. Scrie setul minim de întrebări pe care le folosești pentru a-l identifica pe cel care spune adevărul.

Timp de lucru: 45 de minute

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I

30 de puncte

30 de puncte	1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.
(10 p.)	A. Dintre enunțurile următoare, cel care este propoziție în sensul logicii matematice este: a) „$x + 5 = 12$”, $x \in \mathbb{R}$ c) „Ai făcut tema?”
(10 p.)	b) „Închide geamul!” d) „7 este multiplu al lui 3.”
(10 p.)	B. Disjuncția propozițiilor simple p și q este propoziția: a) $p \wedge q$; b) $p \vee q$; c) $p \leftrightarrow q$; d) $p \rightarrow q$.
(10 p.)	C. Dintre propozițiile de mai jos, cea adevărată este: a) „8 este număr impar.” c) „Toate numerele întregi sunt pozitive.” b) „$3 > 10$” d) „Există un număr natural mai mare decât 9.”

Subiectul al II-lea

60 de puncte

Scrie rezolvările complete.

10 puncte	1. Determină mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$: „ $2(x - 1) + 3x = x - 3(x + 2)$ ”, $x \in \mathbb{R}$.
20 de puncte	2. Scrie negațiile următoarelor propoziții:
(10 p.)	a) $(\forall x) (x \text{ este par sau } x \text{ este impar}), x \in \mathbb{N}$;
(10 p.)	b) $(\exists x) (x^2 = -4), x \in \mathbb{Z}$.
10 puncte	3. Se consideră propoziția p : „Un număr este multiplu de 6 dacă și numai dacă este multiplu de 3.”
(4 p.)	a) Scrie propozițiile simple care compun propoziția p .
(6 p.)	b) Determină valoarea de adevăr a propoziției p .
10 puncte	4. Stabilește dacă propoziția următoare este adevărată sau falsă: $(\forall x) (\exists y) (x^2 - 4x + 4 > y)$, unde $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}$.
10 puncte	5. Demonstrează că $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$, pentru orice număr natural nenul n .

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din această unitate.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	5 foarte bine	4 bine	3 mediu	2 slab	1 foarte slab
Mi-a fost ușor să rezolv exercițiile.					
Am înțeles criteriile de rezolvare.					
Mi-am amintit conținuturile învățate.					

Polinoame cu coeficienți reali

- ▶ 1. Forma algebrică a unui polinom, operații cu polinoame: adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar
- ▶ 2. Teorema împărțirii cu rest; algoritmul de împărțire a polinoamelor; împărțirea cu $X - a$, schema lui Horner; divizibilitatea polinoamelor: definiție
- ▶ 3. Rădăcini reale ale polinoamelor; teorema lui Bézout





1. Forma algebrică a unui polinom, operații cu polinoame: adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar

Îmi amintesc

Se consideră expresiile algebrice $E_1(x) = 2x^2 - 3x + 4$ și $E_2(x) = x + 3$, unde x este număr real.

a) Calculează $E_1(-2) - E_2(4)$.

b) Calculează $E_1(x) + E_2(x)$, $E_1(x) - E_2(x)$, $E_1(x) - 2E_2(x)$, $E_1(x) \cdot E_2(x)$, unde x este număr real.

Învăț

Pentru rezolvarea anumitor probleme din matematică sau fizică folosim diverse formule. De exemplu:

- Pentru aria totală a cubului avem formula $A_t = 4l^2$, unde l reprezintă lungimea muchiei cubului.

Membrul drept al formulei este un **monom în nedeterminata l** , iar acest monom este produsul dintre constanta (numărul) 4 și pătratul nedeterminantei l .

- Pentru aria laterală a conului avem formula $A_l = \pi RG$, unde R reprezintă lungimea razei conului și G reprezintă lungimea generatoarei acestuia. Membrul drept al formulei este un **monom în nedeterminatele R și G** .

- Formula care modelează mișcarea unui obiect aruncat sub un anumit unghi este $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$, unde g (acelerația gravitațională), v_0 (viteza inițială) și h_0 (înălțimea de la care este aruncat obiectul) sunt constante. Membrul drept este o **sumă de monoame** (în nedeterminata t) care nu sunt asemenea (părțile literale nu sunt identice). Această sumă reprezintă un **polinom în nedeterminata t** .

Definiția 1. Monomul este cea mai simplă expresie algebrică, formată dintr-un singur termen care reprezintă un produs între un număr real (numit coeficient) și o parte literală scrisă ca un produs de puteri cu exponent natural, a căror bază este reprezentată printr-o literă (care poate lipsi). Termenul care nu conține parte literală se numește termen liber. Literele care formează partea literală se numesc nedeterminate.

EXEMPLE:

1. $3X^2Y^3$ este un monom care are coeficientul 3 și partea literală X^2Y^3 , în nedeterminatele X și Y ;
2. $-Y^4$ este un monom care are coeficientul -1 și partea literală Y^4 , în nedeterminata Y ;
3. 2 este un monom care nu are parte literală, reprezintă o constantă; se mai numește și termen liber.

Două sau mai multe monoame sunt asemenea dacă au aceeași parte literală.

De exemplu, $3X^2Y^3$, $-2X^2Y^3$ și $6X^2Y^3$ sunt monoame asemenea.

Operații cu monoame

- **Adunarea/scăderea monoamelor** se efectuează numai între monoame asemenea. Pentru a aduna/scădea monoame asemenea, se adună/se scad coeficienții acestora și se transcrie partea literală.

EXEMPLE:

1. $4X - 3X + 8X = (4 - 3 + 8)X = 9X$;

2. $3X^3Y^2 - 5X^3Y^2 + 8X^3Y^2 = (3 - 5 + 8)X^3Y^2 = 6X^3Y^2$.



OBSERVAȚII.

1. Adunarea monoamelor este **comutativă** și **asociativă**.
2. Monomul constant 0 este element neutru pentru adunarea monoamelor.
- **Înmulțirea** a două sau mai multor monoame se efectuează astfel: se înmulțesc coeficienții între ei (aplicând regulile de înmulțire a numerelor reale) și părțile literale între ele (aplicând regula de înmulțire a puterilor care au aceeași bază, dacă este cazul).

EXEMPLE:

1. $2X \cdot 3X^2 = (2 \cdot 3)(X \cdot X^2) = 6X^3$;
2. $(3X^3Y^2) \cdot (8XY^5) = (3 \cdot 8)(X^3 \cdot X)(Y^2 \cdot Y^5) = 24X^4Y^7$.

OBSERVAȚII.

1. Înmulțirea monoamelor este **comutativă** și **asociativă**.
2. Monomul constant 1 este element neutru pentru înmulțirea monoamelor.
- **Împărțirea** a două monoame nenule cu o singură nedeterminată, unde exponentul nedeterminatei deîmpărțitului este mai mare decât exponentul nedeterminatei împărțitorului, se efectuează astfel: se împarte coeficientul deîmpărțitului la coeficientul împărțitorului și partea literală a deîmpărțitului la partea literală a împărțitorului (aplicând regula de împărțire a puterilor care au aceeași bază).

EXEMPLU: $(48X^5) : (8X^2) = (48 : 8)(X^5 : X^2) = 6X^{5-2} = 6X^3$.

Definiția 2. Se numește **polinom** un monom sau o sumă de monoame care nu sunt asemenea.

EXEMPLE:

1. $3X^3Y - 5X^2Y^2 + 8XY^2 - 6$ este un polinom în nedeterminatele X și Y .
2. $X^3 - X^2 + 7X - 1$ este un polinom în nedeterminata X .

În continuare ne propunem să studiem polinoame cu coeficienți reali, într-o singură nedeterminată, pe care o vom nota cu X .

Definiția 3. Se numește **formă algebrică a polinomului f cu coeficienți reali în nedeterminata X** expresia $f = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$, unde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$.

OBSERVAȚII:

1. Numerele $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ se numesc coeficienții polinomului f , a_n se numește **coeficient dominant**, iar a_0 se numește **termen liber**.
2. Termenul a_kX^k este **termenul de rang k** , iar a_k este coeficientul de rang k .
3. Polinomul f se mai poate scrie și astfel: $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$. Termenul a_nX^n se numește termen principal.
4. Dacă $a_n = 1$, polinomul se numește **polinom unitar** sau **polinom monic**.
5. Polinoamele se pot nota cu litere mici (de exemplu $f, g, h, \dots$ etc.) sau cu majuscule (de exemplu $P, Q, R, \dots$). În continuare vom nota polinoamele cu litere mici.
6. Notăm cu $\mathbb{R}[X]$ mulțimea polinoamelor în nedeterminata X cu coeficienți numere reale.
7. Polinomul $f = 0$ se numește **polinom nul**.

EXEMPLE:

1. $f = 5 + 3X - X^2 + 2X^3$ este un polinom în nedeterminata X cu coeficienții $a_0 = 5$, $a_1 = 3$, $a_2 = -1$ și $a_3 = 2$. Coeficienții polinomului f sunt numere reale, deci $f \in \mathbb{R}[X]$.

2. $f = X^4 - 2X^2 + 1$, este un polinom în nedeterminata X cu coeficienții: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -2$, $a_3 = 0$ și $a_4 = 1$. Coeficienții polinomului f sunt numere reale, deci $f \in \mathbb{R}[X]$.

Definiția 4. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$. Spunem că polinomul f are gradul n ($n \in \mathbb{N}$) dacă $a_n \neq 0$ și $a_{n+k} = 0$, pentru orice număr natural nenul k .

Dacă polinomul f are gradul n , notăm $\text{grad}(f) = n$.

OBSERVAȚIE.

Prin convenție, gradul polinomul nul ($f = 0$) este $-\infty$.

EXEMPLE:

1. Gradul polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 5 - 3X + 5X^3 - 4X^4 + X^5$, este 5, deoarece $a_5 \neq 0$ ($a_5 = 1$) și $a_n = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$.

2. Gradul polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2$ este 0, deoarece $a_0 \neq 0$ ($a_0 = 2$) și $a_n = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = (m^2 - 1)X^5 + (m + 1)X^4 + (m - 1)X^3 - (3m - 2)X + 3$. Gradul polinomului f se stabilește în funcție de valorile coeficienților acestuia.

- Dacă $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m^2 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq \pm 1 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, atunci $\text{grad}(f) = 5$.
- Dacă $m = 1$, atunci $f = 2X^4 - X + 3$ și $\text{grad}(f) = 4$.
- Dacă $m = -1$, atunci $f = -2X^3 + 5X + 3$ și $\text{grad}(f) = 3$.

Polinoame egale

Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$, $g = b_0 + b_1X + \dots + b_{m-1}X^{m-1} + b_mX^m$, $\text{grad}(f) = n$ și $\text{grad}(g) = m$. Spunem că polinoamele f și g sunt egale (notăm $f = g$) dacă și numai dacă au același grad și coeficienții respectiv egali ($n = m$, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$).

Valoarea unui polinom

Definiția 5. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$ și $\alpha \in \mathbb{R}$.

Numărul $f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_n\alpha^n$ se numește valoarea polinomului f în α .

EXEMPLU:

Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 5 + 3X - 2X^3 + X^5$. Valoarea polinomului f în -2 este:

$$f(-2) = 5 + 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-2)^3 + (-2)^5 = 5 - 6 + 16 - 32 = -17.$$

OBSERVAȚIE.

Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$. Atunci:

1. $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = f(1)$;
2. $a_0 = f(0)$.

Definiția 6. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$. Asociind fiecărui număr real α numărul $f(\alpha)$ (valoarea polinomului f în α), obținem funcția $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{f}(\alpha) = f(\alpha)$, numită funcția polinomială asociată polinomului f .

EXEMPLU:

Funcția polinomială asociată polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2 + 3X - 5X^3$, este $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{f}(\alpha) = 2 + 3\alpha - 5\alpha^3$.

Operații cu polinoame

1. Adunarea polinoamelor

Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$, $g = b_0 + b_1X + \dots + b_{m-1}X^{m-1} + b_mX^m$, $m \leq n$. Prin adunarea polinoamelor f și g se obține polinomul:

$$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + \dots + (a_m + b_m)X^m + a_{m+1}X^{m+1} + \dots + a_nX^n.$$

OBSERVAȚIE.

Dacă $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $\text{grad}(f) = n$ și $\text{grad}(g) = m$, atunci gradul polinomului $f + g$ este mai mic sau egal cu cel mai mare dintre gradele polinoamelor f și g .

EXEMPLU:

Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2 + 3X - 3X^2 + 3X^3$, $g = -1 - 2X + 5X^2 + X^3 - 2X^4$. Atunci:

$$f + g = [2 + (-1)] + [3 + (-2)]X + (-3 + 5)X^2 + (3 + 1)X^3 - 2X^4 = 1 + X + 2X^2 + 4X^3 - 2X^4.$$

Sau scriem termenii celor două polinoame unul după altul, apoi adunăm monoamele asemenea:

$$f + g = 2 + \underline{3X} - \underline{3X^2} + \underline{3X^3} - 1 - \underline{2X} + \underline{5X^2} + \underline{X^3} - \underline{2X^4} = 1 + X + 2X^2 + 4X^3 - 2X^4.$$

Pentru orice polinom $f \in \mathbb{R}[X]$, definim **opusul polinomului f** notat $-f \in \mathbb{R}[X]$, ai cărui coeficienți sunt respectiv numere reale opuse numerelor reale care reprezintă coeficienților polinomului f .

EXEMPLU:

Dacă $f = 3 - X + 8X^2 - 2X^4$, atunci $-f = -3 + X - 8X^2 + 2X^4$.

Proprietățile adunării polinoamelor

- Adunarea polinoamelor este comutativă:

$$f + g = g + f, \text{ pentru orice } f, g \in \mathbb{R}[X];$$

- Adunarea polinoamelor este asociativă:

$$(f + g) + h = f + (g + h), \text{ pentru orice } f, g, h \in \mathbb{R}[X];$$

- Polinomul nul este element neutru pentru adunarea polinoamelor:

$$f + 0 = 0 + f = f, \text{ pentru orice } f \in \mathbb{R}[X];$$

- Pentru orice polinom f există opusul său, notat $-f$:

$$f + (-f) = (-f) + f = 0, \text{ pentru orice } f \in \mathbb{R}[X];$$

2. Înmulțirea unui polinom cu o constantă

Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Prin înmulțirea polinomului f cu constanta α se obține polinomul notat $\alpha \cdot f$: $\alpha \cdot f = \alpha a_0 + (\alpha a_1)X + \dots + (\alpha a_{n-1})X^{n-1} + (\alpha a_n)X^n$.

EXEMPLE:

1. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2 - X - 3X^2 + 2X^4$ și $\alpha = 2$. Prin înmulțirea polinomului f cu constanta α obținem polinomul $2f = 2 \cdot (2 - X - 3X^2 + 2X^4) = 4 - 2X - 6X^2 + 4X^4$.

2. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = -2 + 6X - 4X^3 + 2X^4$ și $\alpha = -\frac{1}{2}$. Prin înmulțirea polinomului f cu constanta α obținem polinomul $-\frac{1}{2}f = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2 + 6X - 4X^3 + 2X^4) = 1 - 3X + 2X^3 - X^4$.



OBSERVAȚII.

1. $a \cdot (b \cdot f) = (ab) \cdot f$, pentru orice $f \in \mathbb{R}[X]$ și $a, b \in \mathbb{R}$;
2. $a \cdot f + b \cdot f = (a + b) \cdot f$, pentru orice $f \in \mathbb{R}[X]$ și $a, b \in \mathbb{R}$;
3. $1 \cdot f = f \cdot 1 = f$, pentru orice $f \in \mathbb{R}[X]$;
4. $(-1) \cdot f = f \cdot (-1) = -f$, pentru orice $f \in \mathbb{R}[X]$;
5. $0 \cdot f = f \cdot 0 = 0$, pentru orice $f \in \mathbb{R}[X]$.

3. Înmulțirea polinoamelor

Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$ ($a_n \neq 0$) și $g = b_0 + b_1X + \dots + b_{m-1}X^{m-1} + b_mX^m$ ($b_m \neq 0$). Prin produsul (înmulțirea) polinoamelor f și g se obține polinomul notat $f \cdot g$, care reprezintă suma produselor fiecărui termen al polinomului f cu fiecare termen al polinomului g .

OBSERVAȚIE:

Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$ ($a_n \neq 0$) și $g = b_0 + b_1X + \dots + b_{m-1}X^{m-1} + b_mX^m$ ($b_m \neq 0$). Atunci:

1. $\text{grad}(f \cdot g) = m + n$;
2. $f \cdot g = c_0 + c_1X + \dots + c_kX^k + \dots + c_{n-1}X^{m+n-1} + c_{m+n}X^{m+n}$, unde:

$$c_0 = a_0b_0;$$

$$c_1 = a_1b_0 + a_0b_1;$$

$$c_2 = a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2;$$

...

$$c_k = a_kb_0 + a_{k-1}b_1 + a_{k-2}b_2 + \dots + a_{k-i}b_i + \dots + a_0b_k;$$

...

$$c_{m+n-1} = a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1};$$

$$c_{m+n} = a_nb_m.$$

EXEMPLU:

Fie $f = 2 - X + X^3$ și $g = 1 - X$. Atunci:

$$f \cdot g = (2 - X + X^3) \cdot (1 - X) = 2 - 2X - X + X^2 + X^3 - X^4 = 2 - 3X + X^2 + X^3 - X^4.$$

Proprietățile înmulțirii polinoamelor

- Înmulțirea polinoamelor este comutativă:

$$f \cdot g = g \cdot f, \text{ pentru orice } f, g \in \mathbb{R}[X].$$

- Înmulțirea polinoamelor este asociativă:

$$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h), \text{ pentru orice } f, g, h \in \mathbb{R}[X].$$

- $f \cdot 0 = 0 \cdot f = 0$, pentru orice $f \in \mathbb{R}[X]$.



- Polinomul $g = 1$ este element neutru pentru înmulțirea polinoamelor:

$$f \cdot 1 = 1 \cdot f = f, \text{ pentru orice } f \in \mathbb{R}[X];$$

- Înmulțirea polinoamelor este distributivă față de adunarea polinoamelor:

$$f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h, \text{ pentru orice } f, g, h \in \mathbb{R}[X];$$

$$(g + h) \cdot f = g \cdot f + h \cdot f, \text{ pentru orice } f, g, h \in \mathbb{R}[X].$$

Exerciții rezolvate

1. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 5 - m + 2X - (1 - 2m)X^3 + 2X^4$. Determină numărul real m pentru care valoarea polinomului f în -1 este 12.

Rezolvare:

Deoarece valoarea polinomului f în -1 este 12, avem:

$$f(-1) = 12 \Leftrightarrow 5 - m + 2(-1) - (1 - 2m)(-1)^3 + 2(-1)^4 = 12 \Leftrightarrow 5 - m - 2 + 1 - 2m + 2 = 12 \\ \Leftrightarrow -3m + 6 = 12 \Leftrightarrow m = -2.$$

2. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2m - 1 + 3X + (1 - n)X^3$ și $g = 1 + 3X + qX^2 + X^3$. Determină numerele reale m, n și q pentru care $f = g$.

Rezolvare:

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} \text{grad } f = \text{grad } g \\ 2m - 1 = 1 \\ 0 = q \\ 1 - n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{grad } f = \text{grad } g = 3 \\ m = 1 \\ q = 0 \\ n = 0 \end{cases}$$

Așadar, $m = 1$ și $n = q = 0$.

3. Se consideră polinoamele $f, g, h \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + aX^3 + 5X^2 + bX - 6$, $g = X^2 + 5X + 6$ și $h = X^2 - 1$.

a) Scrie sub formă algebrică polinomul $g \cdot h$.

b) Determină numerele reale a și b pentru care $f = g \cdot h$.

c) Pentru $a = 5$ și $b = -5$, determină numerele reale α pentru care $f(\alpha) = 0$.

Rezolvare:

$$a) g \cdot h = (X^2 + 5X + 6) \cdot (X^2 - 1) = X^4 - X^2 + 5X^3 - 5X + 6X^2 - 6 = X^4 + 5X^3 + 5X^2 - 5X - 6$$

Forma algebrică a polinomului $g \cdot h$ este $g \cdot h = -6 - 5X + 5X^2 + 5X^3 + X^4$.

$$b) f = g \cdot h \xrightarrow{\text{conform a)}} X^4 + aX^3 + 5X^2 + bX - 6 = X^4 + 5X^3 + 5X^2 - 5X - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 5 \text{ și } b = -5.$$

c) Conform a) și b), pentru $a = 5$ și $b = -5$ avem $f = g \cdot h$. Deci $f(\alpha) = g(\alpha) \cdot h(\alpha)$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) \cdot h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(\alpha) = 0 \\ \text{sau} \\ f(\alpha) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + 5\alpha + 6 = 0 \\ \text{sau} \\ \alpha^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in \{-2, -3\} \\ \text{sau} \\ \alpha \in \{-1, 1\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \in \{-3, -2, -1, 1\}.$$



ȘTIAI CĂ...?

Teoria polinoamelor este rezultatul a secole de căutări, duelurilor intelectuale și a momentelor de geniu. Iată figurile cheie care au definit acest domeniu:

• **Al-Khwarizmi**

(cca. 780 – 850), matematician, astronom și geograf islamic, a sistematizat metodele de rezolvare a ecuațiilor de gradul I și II. Cuvântul „algorithm” provine din numele său, iar cuvântul „algebră” provine din titlul celei mai importante dintre lucrările sale, tradusă în limba latină în secolul al XII-lea d.H. Într-o epocă lipsită de simbolismul modern (x , $+$, $=$), Al-Khwarizmi redacta totul sub formă de text, numind necunoscuta „lucru” sau „rădăcină”, iar pătratul acesteia „avere”.

• **François Viète**

(1540 – 1603), matematician francez și consilier al regilor Franței, este considerat părintele algebrei moderne. Acesta a introdus folosirea literelor pentru a reprezenta coeficienții și variabilele.

4. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X + 1)^{10} + X^9 + X + 2$, având forma algebrică $f = a_0 + a_1X + \dots + a_9X^9 + a_{10}X^{10}$.

- Determină termenul liber al polinomului f .
- Calculează suma coeficienților polinomului f .
- Demonstrează că $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10} = 2^9 + 2$.

Rezolvare:

- a) Termenul liber al polinomului f este a_0 . Calculăm valoarea polinomului f în 0.

$$\text{Din } f = (X + 1)^{10} + X^9 + X + 2 \text{ obținem } f(0) = (0 + 1)^{10} + 0^9 + 0 + 2 = 3. \quad (1)$$

$$\text{Din } f = a_0 + a_1X + \dots + a_9X^9 + a_{10}X^{10} \text{ obținem } f(0) = a_0. \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2) obținem } a_0 = 3.$$

- b) Suma coeficienților polinomului f este: $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$.

Calculăm valoarea polinomului f în 1.

$$\text{Din } f = (X + 1)^{10} + X^9 + X + 2 \text{ obținem } f(1) = (1 + 1)^{10} + 1^9 + 1 + 2 = 2^{10} + 4. \quad (3)$$

$$\text{Din } f = a_0 + a_1X + \dots + a_9X^9 + a_{10}X^{10} \text{ obținem } f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{10}. \quad (4)$$

$$\text{Din (3) și (4) obținem } a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 2^{10} + 4.$$

- c) Calculăm valoarea polinomului f în -1.

$$\text{Din } f = (X + 1)^{10} + X^9 + X + 2 \text{ obținem } f(-1) = (-1 + 1)^{10} + (-1)^9 + (-1) + 2 = 0. \quad (5)$$

$$\text{Din } f = a_0 + a_1X + \dots + a_9X^9 + a_{10}X^{10} \text{ obținem } f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots - a_9 + a_{10}. \quad (6)$$

Din (5) și (6) obținem

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots - a_9 + a_{10} = 0 \Leftrightarrow a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10} = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_9. \quad (7)$$

$$\text{Conform punctului b), avem } a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 2^{10} + 4. \quad (8)$$

$$\text{Din (7) și (8) obținem } a_2 + a_4 + \dots + a_{10} = \frac{1}{2} \cdot (2^{10} + 4).$$

$$\text{Deci } a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10} = 2^9 + 2.$$

5. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = m^2 - 2mX + X^2 + 4X^3 + n^2X^4 - 4nX^5$. Determină coeficienții polinomului f , știind că suma lor este 0.

Rezolvare:

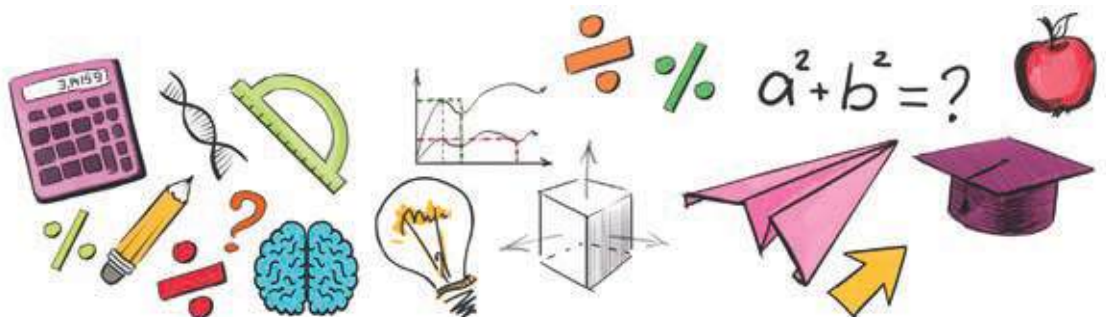
$$f \in \mathbb{R}[X] \Rightarrow m^2, -2m, n^2, -4n \in \mathbb{R} \Rightarrow m, n \in \mathbb{R}$$

Știm că suma coeficienților polinomului f este $f(1)$. Având în vedere că suma coeficienților polinomului f este 0, rezultă că $f(1) = 0$.

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m \cdot 1 + 1^2 + 4 \cdot 1^3 + n^2 \cdot 1^4 - 4n \cdot 1^5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + 4 + n^2 - 4n = 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 + (n - 2)^2 = 0$$

Cum $m, n \in \mathbb{R}$, rezultă că $m - 1 = 0$ și $n - 2 = 0$, deci $m = 1$ și $n = 2$. Înlocuind m și n în forma algebrică a polinomului f obținem $f = 1 - 2X + X^2 + 4X^3 + 4X^4 - 8X^5$. Coeficienții polinomului f sunt $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$, $a_4 = 4$ și $a_5 = -8$.



Aplic

1. Scrie coeficienții polinomului f .
 - a) $f \in \mathbb{R}[X], f = -1 + X + X^2 - X^4$; c) $f \in \mathbb{R}[X], f = -2X^6 - 7X^3 - X - 2$;
 - b) $f \in \mathbb{R}[X], f = 2X - X^2 - X^4$; d) $f \in \mathbb{R}[X], f = 1 + X + X^7 + 4X^8 - X^9 - 9X^{10}$.
2. a) Fie $f, g \in \mathbb{R}[X], f = a - 1 + X + 2bX^2 - X^3, g = -1 + (3 - 2c)X + 4X^2 - dX^3$.
Determină numerele reale a, b, c , și d pentru care $f = g$.
b) Fie $f, g \in \mathbb{R}[X], f = 3 + (m^2 + 1)X + 2X^2 - (1 - n)X^4, g = 3 + 3X + 2X^2 - (p + 2)X^3$.
Determină numerele reale m, n , și p pentru care $f = g$.
c) Fie $f, g \in \mathbb{R}[X], f = X + 2bX^2 + (1 - 2a)X^4, g = c^2 - 1 + X + 4X^2 - (d^2 - d)X^3$.
Determină numerele reale a, b, c , și d pentru care $f = g$.
d) Fie $f, g \in \mathbb{R}[X], f = 3 + (m^2 + 1)X + 2X^2 - (1 - n)X^3 - (2 - p^2)X^5, g = 3 + 5X + 2X^2 - (q + 2)X^4$. Determină numerele reale m, n, p și q pentru care $f = g$.
3. a) Fie $f \in \mathbb{R}[X], f = 1 - 3X + 4X^2 + 4X^3 - 2X^8 - X^9$. Determină valoarea polinomului f în -2 .
b) Fie $f \in \mathbb{R}[X], f = 1 + 3X + 6X^2 + 4X^3$. Determină valoarea polinomului f în $-\frac{1}{2}$.
c) Fie $g \in \mathbb{R}[X], g = X^{50} + 4X^{45} - X^{20} - 9X^2 + 5X - 2$. Determină valoarea polinomului g în -1 .
d) Fie $f \in \mathbb{R}[X], f = X^5 + 4X^4 - X^3 - 9X^2 + 5X - 2$. Determină valoarea polinomului f în $\sqrt{2}$.
e) Fie $f \in \mathbb{R}[X], f = 1 + X + X^2 + X^3$. Determină valoarea polinomului f în $1 - \sqrt{2}$.
4. Determină gradul polinomului f în funcție valorile numărului real m .
 - a) $f = (m - 2)X^3 - (1 + m)X^2 + X + 1, f \in \mathbb{R}[X]$;
 - b) $f = (2m + 6)X^3 - (9 - m^2)X^2 + X + 27 + m^3, f \in \mathbb{R}[X]$;
 - c) $f = (m^3 - 1)X^5 + (m^2 + 2m - 3)X^4 - (m^2 - 1)X^3 - 9X - 2, f \in \mathbb{R}[X]$;
 - d) $f = (m^3 + 1)X^5 + (m^2 - 2m - 3)X^4 - (m^2 - 1)X^3 - (2m - 2)X, f \in \mathbb{R}[X]$;
 - e) $f = (m^3 - 4m)X^{100} + (m^2 + 2m)X^{50} - (2 - m)X^{30} - 9mX - 2, f \in \mathbb{R}[X]$.
5. Determină numărul real m pentru care polinoamele f și g au același grad:
 $f = (m - 2)X^3 + (m + 2)X^2 + (1 - m)X - 3$;
 $g = (m^3 - 4m)X^4 + (m^2 - 3m + 2)X^3 + mX^2 + m - 2$.
6. Calculează $f + g$.
 - a) $f = X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 5, g = 2X^4 + X^3 - 3X^2 - 5X - 7$;
 - b) $f = -X^4 + \sqrt{2}X^3 + \sqrt{3}X^2 - 6X + 5, g = 2X^4 - \sqrt{2}X^3 - \sqrt{3}X^2 + 6X$;
 - c) $f = X^3 - 3X^2 - \frac{2}{3}X, g = 2X^4 - X^3 + 2X^2 - \frac{1}{3}X - 1$;
 - d) $f = X^4 - 5X^3 - 2X, g = X^3 - 3X^2 - 7$;
 - e) $f = -X^4 - aX^3 + 3X^2 - (2 - m)X + 5, g = 2X^4 + (1 + a)X^3 - 3X^2 - mX - 7, a, m \in \mathbb{R}$.
7. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X], f = 3X^4 - X^3 + 3X^2 + 3, g = 2X^4 + X^3 - 5X + 2$. Determină forma algebrică a polinomului $2f - 3g$.
8. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X], f = 4X^4 - X^3 + 6X^2 - 2X + 5, g = 2X^4 + X^3 + 3X^2 - 5X - 7$.
Determină coeficienții polinomului $-f + 2g$.

ȘTIAI CĂ...?

Figuri cheie care au definit teoria polinoamelor:

- **Girolamo Cardano** (1501-1576), matematician, medic și filosof italian, a publicat formule de rezolvare pentru ecuațiile de gradul III și IV în lucrarea *Ars Magna* (1545).
- **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), matematician, astronom și fizician german, unul dintre cei mai mari matematicieni din toate timpurile.
- **Évariste Galois** (1811-1832), matematician francez, a demonstrat că ecuațiile de grad mai mare sau egal cu 5 nu pot fi rezolvate prin formule generale (cu radicali), punând bazele teoriei grupurilor.
- **Étienne Bézout** (1730-1783), matematician francez deosebit de influent, cunoscut mai ales pentru contribuțiile sale în algebra polinoamelor și pentru manualele sale, care au format generații de ingineri și ofițeri (inclusiv pe Napoleon).

ȘTIAI CĂ...?

William George

Horner (1786–1837), matematician englez din epoca georgiană. Nu a fost un academician de rang înalt de la început, ci a lucrat ca profesor și director de școală la vârsta de doar 18 ani era deja director secund la Kingswood School. Deși nu a urmat studii universitare de prestigiu, a fost un geniu al calculului numeric.

9. Fie $f, g, h \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 1$, $g = aX^4 - X^2 - 3X + 2$, $h = X^3 - bX^2 + cX - 1$. Determină numerele reale a, b și c pentru care $f + 2g + 3h = 1$.
10. Calculează $f \cdot g$.
 - a) $f = X + 5$, $g = X^2 - 5X + 25$;
 - b) $f = X^2 + 3X + 9$, $g = X - 3$;
 - c) $f = X^2 - X + 1$, $g = X^2 + X - 1$;
 - d) $f = X^3 + 1$, $g = X^6 - X^3 + 1$;
 - e) $f = X + 1$, $g = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$;
 - f) $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, $g = X - 1$;
 - g) $f = X^3 + X^2 + 9X + 9$, $g = X - 1$.
11. Fie polinoamele $f = X + 2$, $g = 2X - 1$. Calculează $(f - g)^2$ și $f^2 - g^2$.
12. Fie polinoamele $f = 2X^2 - X + 2$, $g = X^2 - 2X - 1$ și $h = X^2 + 2X + 1$. Calculează $f \cdot g + f \cdot h$ și $f \cdot g - f \cdot h$ în două moduri.
13. Scrie sub formă algebrică polinomul f .
 - a) $f = (X - 1)(X + 1)(X - 2)(X + 2)$;
 - b) $f = (X^2 + 1)(2X + 1)(X + 2)$;
 - c) $f = (X^2 + X + 1)(X + 3)(X - 2)$;
 - d) $f = (X^2 - X + 1)(X - 3)$;
 - e) $f = (X^2 + X + 1)(2X + 3)$;
 - f) $f = (X^2 - X + 2)(X + 5)$;
 - g) $f = (X^3 - 1)(X + 4)$;
 - h) $f = (2X - 1)(X^2 + 1)$;
 - i) $f = (X^2 - 1)(2X + 3)$;
 - j) $f = (X + 3)(X - 2)(2X - 1)$;
 - k) $f = (4X^2 - 1)(X + 1)$;
 - l) $f = (2X^2 - 1)(X^2 - 1)$;
 - m) $f = (X + 1)(X + 2)(2X + 1)$;
 - n) $f = (2X - 1)(3X - 1)(X - 1)$.
14. Determină numerele reale m, n și p pentru care polinomul $f = 2X^2 + 7X + 6$ este egal cu polinomul $g = m(X + 1)^2 + n(X + 1) + p$.
15. Determină numerele reale a, b și c pentru care polinomul $f = 3(X^2 + 8)$ este egal cu polinomul $f = a(X - 2)^2 + b(X - 2) + c$.
16. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X + 1)^{15} + (X - 1)^{15} + X^9 - X + 2$, având forma algebrică $f = a_0 + a_1X + \dots + a_9X^9 + a_{10}X^{10}$.
 - a) Determină termenul liber al polinomului f .
 - b) Calculează suma coeficienților polinomului f .
 - c) Demonstrează că $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_9 = 2^{15}$.
17. Fie polinoamele $f, g, h \in \mathbb{R}[X]$, $f = 1 + X + X^2 + \dots + X^{100}$, $g = 1 + 2X + 3X^2 + \dots + 100X^{99}$ și $h = f \cdot g$, cu forma algebrică $h = a_0 + a_1X + \dots + a_{198}X^{198} + a_{199}X^{199}$.
 - a) Calculează $a_0 + a_1 + \dots + a_{198} + a_{199}$.
 - b) Determină coeficienții a_0, a_1, a_2, a_{198} și a_{199} .
18. Demonstrează prin metoda inducției matematice identitatea de polinoame: $(1 + 2X + 3X^2 + \dots + nX^{n-1})(1 - X)^2 = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1, n \in \mathbb{N}^*$.
19. Determină numerele reale a și b știind că există un polinom $g \in \mathbb{R}[X]$, astfel încât $f = g^2$, unde $f = X^4 - 2X^3 + 5X^2 + aX + b$.

2. Teorema împărțirii cu rest; algoritmul de împărțire a polinoamelor; împărțirea cu $X - a$, schema lui Horner; divizibilitatea polinoamelor: definiție

Îmi amintesc

1. Fie numerele naturale 872 și 7. Determină numerele naturale c și r pentru care $872 = 7 \cdot c + r$, unde $r < 7$.
 - Cum ai determinat numerele naturale c și r ?
 - Câte soluții are problema?
 - Cum se numesc numerele 872 și 7?
 - Cum se numesc numerele naturale c și r ?
2. Fie numerele naturale 225 și 9.
 - a) Determină numerele naturale c și r pentru care $225 = 9 \cdot c + r$, unde $r < 9$.
 - b) Dacă $225 = 9 \cdot c + r$ și $r = 0$, atunci $225 = 9 \cdot c$. Ce este 9 pentru 225, dar 225 pentru 9?



Învăț

Știm din clasele anterioare că, pentru orice numere naturale a și b , $b \neq 0$, există și sunt unice numerele naturale c și r , numite cât, respectiv rest, astfel încât $a = b \cdot c + r$, $r < b$. Numărul a se numește deîmpărțit, iar numărul b se numește împărțitor.

De exemplu, pentru $a = 872$ și $b = 7$, prin efectuarea împărțirii lui a la b , obținem câtul $c = 124$ și restul $r = 4$.

Prin împărțirea numărului 225 la 9 obținem câtul 25 și restul 0. În acest caz avem $225 = 9 \cdot 25$. Numărul 225 este multiplu al numerelor 9 și 25, iar numerele 9 și 25 sunt divizori ai numărului 225.

$$\begin{array}{r|l}
 872 & 7 \\
 \underline{7} & \\
 17 & \\
 \underline{14} & \\
 28 & \\
 \underline{28} & \\
 4 &
 \end{array}$$

deîmpărțit împărțitor cât rest

Teorema 1. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $g \neq 0$. Atunci există și sunt unice polinoamele $q, r \in \mathbb{R}[X]$, astfel încât $f = g \cdot q + r$ și $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$.

Demonstrație:

Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \dots + a_1 X + a_0$ ($a_m \neq 0$), $g = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X + b_0$ ($b_n \neq 0$).
 Avem $\text{grad}(f) = m$ și $\text{grad}(g) = n$.

- Demonstrăm existența polinoamelor c și r .

Distingem două cazuri:

i) $\text{grad}(f) < \text{grad}(g)$;

Dacă $\text{grad}(f) < \text{grad}(g)$, atunci $q = 0$ și $r = f$, $\text{grad}(r) = \text{grad}(f) < \text{grad}(g)$.

ii) $\text{grad}(f) \geq \text{grad}(g)$.

Dacă $\text{grad}(f) \geq \text{grad}(g)$ ($\text{grad}(f) = m$ și $\text{grad}(g) = n$), atunci $m \geq n$. Demonstrăm folosind metoda inducției matematice.

Fie $P(m)$: Pentru orice $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $g \neq 0$, $\text{grad}(f) = m$ și $\text{grad}(g) = n$ ($m \geq n$), există polinoamele $q, r \in \mathbb{R}[X]$, astfel încât $f = g \cdot q + r$ și $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$, $m \in \mathbb{N}$.

– Verificăm faptul că propoziția $P(0)$ este adevărată:

Dacă $m = 0$ ($m \geq n$), atunci $f = a_0$, $a_0 \neq 0$ și $g = b_0$, $b_0 \neq 0$. Considerăm $q = a_0 \cdot b_0^{-1}$ și $r = 0$, deci $P(0)$ este adevărată.

– Demonstrăm $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Presupunem că pentru orice polinom f ($\text{grad}(f) = k$), există polinoamele q și r , astfel încât $f = g \cdot q + r$.

Dacă f este un polinom de gradul $k+1$, atunci $f = a_{k+1}X^{k+1} + f_1$, ($a_{k+1} \neq 0$) și $\text{grad}(f_1) \leq k$. (1)

Așadar, pentru polinomul f_1 există q_1 și r_1 astfel încât:

$$f_1 = g \cdot q_1 + r_1, \text{grad}(r_1) < \text{grad}(g) \leq k. (2)$$

$$a_{k+1}X^{k+1} = a_{k+1}X \cdot X^k = a_{k+1}X(g \cdot q_2 + r_2) = a_{k+1}X \cdot g \cdot q_2 + a_{k+1}X \cdot r_2, \text{grad}(r_2) < k. (3)$$

Înlocuind relațiile (2) și (3) în (1) obținem:

$$f = a_{k+1}X \cdot g \cdot q_2 + a_{k+1}X \cdot r_2 + g \cdot q_1 + r_1 = g \cdot (a_{k+1}X \cdot q_2 + q_1) + (a_{k+1}X \cdot r_2 + r_1).$$

Notăm $q = a_{k+1}X \cdot q_2 + q_1$ și $r = a_{k+1}X \cdot r_2 + r_1$, $\text{grad}(r) < k+1$. Deci afirmația este adevărată și pentru polinoamele de grad $k+1$, de unde rezultă că $P(k+1)$ este adevărată.

Ambele etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sunt verificate, prin urmare propoziția $P(m)$ este adevărată pentru orice număr natural m .

• Demonstrăm unicitatea polinoamelor q și r .

Știm că, pentru orice polinoame $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $g \neq 0$, există polinoamele $q, r \in \mathbb{R}[X]$, astfel încât $f = g \cdot q + r$ și $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$. (4)

Dacă ar exista și polinoamele $q_1, r_1 \in \mathbb{R}[X]$, astfel încât $f = g \cdot q_1 + r_1$ și $\text{grad}(r_1) < \text{grad}(g)$ (5), atunci $\text{grad}(r_1 - r) < \text{grad}(g)$. (6)

Scăzând relația (5) din (4) obținem:

$$0 = g \cdot (q - q_1) + r - r_1 \Leftrightarrow r - r_1 = g \cdot (q_1 - q) (7) \text{ și } \text{grad}(r - r_1) < \text{grad}(g).$$

Dacă $q_1 \neq q$, conform (7), $\text{grad}(r - r_1) \geq \text{grad}(g)$, ceea ce contrazice relația (6), deci $q_1 = q$. Dacă $q_1 = q$, atunci conform (7) avem $r - r_1 = 0$, de unde rezultă $r_1 = r$. Am demonstrat că polinoamele q și r sunt unice.

OBSERVAȚIE:

Polinoamele f, g, q și r din teorema 1 se numesc *deîmpărțit*, *împărțitor*, *cât* și, respectiv, *rest*.

Algoritm pentru împărțirea a două polinoame

Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $g \neq 0$. Conform teoremei 1, există și sunt unice polinoamele $c, r \in \mathbb{R}[X]$, astfel încât $f = g \cdot q + r$ și $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$.

Dacă $\text{grad}(f) < \text{grad}(g)$, atunci $q = 0$ și $r = f$.

Dacă $\text{grad}(f) \geq \text{grad}(g)$, considerăm $f = a_mX^m + a_{m-1}X^{m-1} + \dots + a_1X + a_0$ ($a_m \neq 0$) și $g = b_nX^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_1X + b_0$ ($b_n \neq 0$). Deci $\text{grad}(f) = m$ și $\text{grad}(g) = n$, unde $m \geq n$.

Pentru a efectua $f : g$, procedăm astfel:

- Scriem polinoamele în ordinea descrescătoare a puterilor lui X .
- Reprezentăm împărțirea în felul următor:

$$\begin{array}{r|l} a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \dots + a_1 X + a_0 & b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X + b_0 \end{array}$$

Dacă lipsește un termen, de exemplu $a_2 = 0$, se lasă un spațiu gol între $a_3 X^3$ și $a_1 X$.

Se împarte termenul principal al polinomului f (adică $a_m X^m$) la termenul principal al polinomului g (adică $b_n X^n$):

$$(a_m X^m) : (b_n X^n) = a_m b_n^{-1} X^{m-n}.$$

Acest rezultat se scrie sub polinomul g și reprezintă primul termen al câtului.

$$\begin{array}{r|l} a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \dots + a_1 X + a_0 & b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X + b_0 \\ \hline & a_m b_n^{-1} X^{m-n} \end{array}$$

- Se înmulțește rezultatul obținut la etapa anterioară cu împărțitorul g și se scade acest produs din deîmpărțitul f (adică se adună acest produs cu semn schimbat la f) și se obține polinomul $f_1 = f - (a_m : b_n) X^{m-n} \cdot g$.

$$\begin{array}{r|l} a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \dots + a_1 X + a_0 & b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X + b_0 \\ -a_m X^m - a_m b_n^{-1} b_{n-1} X^{m-1} \dots & a_m b_n^{-1} X^{m-n} \\ \hline / \quad \underbrace{f - (a_m : b_n) X^{m-n} \cdot g}_{f_1} & \end{array}$$

Polinomul f_1 are gradul cel mult $n - 1$.

- Dacă $\text{grad}(f_1) < \text{grad}(g)$, atunci polinomul $f_1 = r$ și $c = a_m b_n^{-1} X^{m-n}$.
- Dacă $\text{grad}(f_1) \geq \text{grad}(g)$, atunci repetăm pașii cu f_1 în locul lui f , obținem al doilea termen al câtului și așa mai departe, până când obținem un polinom al cărui grad este mai mic decât gradul polinomului g . Acest polinom este r , restul împărțirii polinomului f la polinomul g .

EXAMPLE:

1. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = 6X^4 + X^3 - 3X + 5$ și $g = 2X^2 - X + 4$. Pentru a determina câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g folosim algoritmul prezentat mai sus.

A. Polinoamele sunt scrise în ordinea descrescătoare a puterilor lui X .

Scriem $3X^2$ la cât.

$$\begin{array}{r|l} 6X^4 + X^3 & -3X + 5 \mid 2X^2 - X + 4 \\ & 3X^2 \end{array}$$

B. Așezăm polinoamele f și g corespunzător algoritmului. În scrierea polinomului f între $3X^3$ și $-3X$ lăsăm spațiu liber deoarece $a_2 = 0$ (lipsește în scriere X^2).

$$\begin{array}{r|l} 6X^4 + X^3 & -3X + 5 \mid 2X^2 - X + 4 \end{array}$$

D. Înmulțim $3X^2$ cu polinomul g , iar rezultatul îl scriem cu semn schimbat sub polinomul f .

$$\begin{array}{r|l} 6X^4 + X^3 & -3X + 5 \mid 2X^2 - X + 4 \\ -6X^4 + 3X^3 - 12X^2 & 3X^2 \end{array}$$

C. Împărțim termenul dominant al polinomului f la termenul dominant al polinomului g .

$$(6X^4) : (2X^2) = (6 : 2) \cdot (X^4 : X^2) = 3X^2$$

E. Adunăm polinomul f cu $-3X^2 \cdot g$, iar rezultatul îl scriem imediat sub $-3X^2 \cdot g$.

$$\begin{array}{r|l} 6X^4 + X^3 & -3X + 5 \mid 2X^2 - X + 4 \\ -6X^4 + 3X^3 - 12X^2 & 3X^2 \\ \hline / & 4X^3 - 12X^2 - 3X + 5 \end{array}$$

F. Împărțim termenul dominant al polinomului $4X^3 - 12X^2 - 3X + 5$ la termenul dominant al polinomului g :

$$(4X^3) : (2X^2) = (4 : 2) \cdot (X^3 : X^2) = 2X.$$

Scriem $2X$ la cât.

$$\begin{array}{r|l} 6X^4 + X^3 & -3X + 5 \\ -6X^4 + 3X^3 - 12X^2 & \\ \hline & 4X^3 - 12X^2 - 3X + 5 \end{array}$$

G. Înmulțim $2X$ cu polinomul g , iar rezultatul îl scriem cu semn schimbat sub polinomul $4X^3 - 12X^2 - 3X + 5$.

$$\begin{array}{r|l} 6X^4 + X^3 & -3X + 5 \\ -6X^4 + 3X^3 - 12X^2 & \\ \hline & 4X^3 - 12X^2 - 3X + 5 \\ & -4X^3 + 2X^2 - 8X \\ \hline & 2X^2 - X + 4 \end{array}$$

H. Adunăm polinomul $4X^3 - 12X^2 - 3X + 5$ cu $-2X \cdot g$, iar rezultatul îl scriem imediat sub $-2X \cdot g$.

$$\begin{array}{r|l} 6X^4 + X^3 & -3X + 5 \\ -6X^4 + 3X^3 - 12X^2 & \\ \hline & 4X^3 - 12X^2 - 3X + 5 \\ & -4X^3 + 2X^2 - 8X \\ \hline & 2X^2 - X + 4 \end{array}$$

I. Împărțim termenul dominant al polinomului $-10X^2 - 11X + 5$ la termenul dominant al polinomului g :

$$(-10X^2) : (2X^2) = [(-10) : 2] \cdot (X^2 : X^2) = -5.$$

Scriem -5 la cât.

$$\begin{array}{r|l} 6X^4 + X^3 & -3X + 5 \\ -6X^4 + 3X^3 - 12X^2 & \\ \hline & 4X^3 - 12X^2 - 3X + 5 \\ & -4X^3 + 2X^2 - 8X \\ \hline & -10X^2 - 11X + 5 \end{array}$$

J. Înmulțim -5 cu polinomul g , iar rezultatul îl scriem cu semn schimbat sub polinomul $-10X^2 - 11X + 5$.

$$\begin{array}{r|l} 6X^4 + X^3 & -3X + 5 \\ -6X^4 + 3X^3 - 12X^2 & \\ \hline & 4X^3 - 12X^2 - 3X + 5 \\ & -4X^3 + 2X^2 - 8X \\ \hline & -10X^2 - 11X + 5 \\ & 10X^2 - 5X + 20 \\ \hline & -16X + 25 \end{array}$$

K. Adunăm polinomul $-10X^2 - 11X + 5$ cu $-5 \cdot g$, iar rezultatul îl scriem imediat sub $-5 \cdot g$.

$$\begin{array}{r|l} 6X^4 + X^3 & -3X + 5 \\ -6X^4 + 3X^3 - 12X^2 & \\ \hline & 4X^3 - 12X^2 - 3X + 5 \\ & -4X^3 + 2X^2 - 8X \\ \hline & -10X^2 - 11X + 5 \\ & 10X^2 - 5X + 20 \\ \hline & -16X + 25 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{cât } (q) \\ \text{rest } (r) \end{array}$$

Prin adunarea polinomului $-10X^2 - 11X + 5$ cu $-5 \cdot g$ am obținut polinomul $-16X + 25$, care are gradul 1, mai mic decât gradul deîmpărțitului, polinomul g . În acest moment împărțirea polinomului f la polinomul g se încheie:

- câtul este $q = 3X^2 + 2X - 5$;
- restul este $r = -16X + 25$.

2. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = 4X^3 + 6X^2 + 5$ și $g = -2X^2 - 3$. Aplicând algoritmul împărțirii a două polinoame obținem:

$$\begin{array}{r|l} 4X^3 + 6X^2 & + 5 \\ -4X^3 & -6X \\ \hline & 6X^2 - 6X + 5 \\ & -6X^2 & -9 \\ \hline & -6X - 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} q = -2X - 3 \\ r = -6X - 4 \end{array}$$

Împărțirea cu $X - a$ ($a \in \mathbb{R}$). Teorema restului. Schema lui Horner

Ne propunem să aflăm câtul și restul împărțirii unui polinom $f \in \mathbb{R}[X]$ la polinomul $g = X - a$, $a \in \mathbb{R}$, prin metode cât mai simple.

Teorema restului. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ și $a \in \mathbb{R}$. Atunci restul împărțirii polinomului f la $X - a$ este $f(a)$.

Demonstrație:

Conform teoremei împărțirii cu rest avem:

$$f = (X - a) \cdot q + r, \text{ unde } \text{grad}(r) < 1. \quad (8)$$



Dacă $\text{grad}(r) < 1$, atunci r este un polinom constant ($r \in \mathbb{R}$).

Determinăm valoarea polinomului f în a .

Conform relației (8), obținem $f(a) = (a - a) \cdot q(a) + r$, de unde deducem $r = f(a)$.

EXEMPLU:

Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 4X^3 - 12X^2 - 3X + 5$. Restul împărțirii polinomului f la polinomul $X + 1$ este $f(-1)$ (deoarece $X + 1 = X - (-1)$).

$$r = f(-1) \Leftrightarrow r = 4 \cdot (-1)^3 - 12 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 5 = -4 - 12 + 3 + 5 = -8$$

Așadar, restul împărțirii polinomului f la $X + 1$ este -8 .

OBSERVAȚIE.

Teorema restului nu face nicio precizare despre câtul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ la polinomul $X - a$.

Schema lui Horner

Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$, $a_n \neq 0$ și $g = X - a$, $a \in \mathbb{R}$. Atunci, conform teoremei împărțirii cu rest, există și sunt unice polinoamele q și r , astfel încât $f = (X - a) \cdot q + r$ și $q = b_{n-1} X^{n-1} + b_{n-2} X^{n-2} + \dots + b_1 X + b_0$.

$$f = (X - a)(b_{n-1} X^{n-1} + b_{n-2} X^{n-2} + \dots + b_1 X + b_0) + r \Leftrightarrow f = b_{n-1} X^n + b_{n-2} X^{n-1} + \dots + b_1 X^2 + b_0 X - ab_{n-1} X^{n-1} - ab_{n-2} X^{n-2} - \dots - ab_1 X - ab_0 + r \Leftrightarrow f = b_{n-1} X^n + (b_{n-2} - ab_{n-1}) X^{n-1} + (b_{n-3} - ab_{n-2}) X^{n-2} + \dots + (b_0 - ab_1) X - ab_0 + r. \quad (9)$$

Identificând coeficienții celor două polinoame din egalitatea (9), obținem:

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} && \Leftrightarrow b_{n-1} = a_n \\ a_{n-1} &= b_{n-2} - ab_{n-1} && \Leftrightarrow b_{n-2} = ab_{n-1} + a_{n-1} \\ a_{n-2} &= b_{n-3} - ab_{n-2} && \Leftrightarrow b_{n-3} = ab_{n-2} + a_{n-2} \\ &\vdots && \\ a_1 &= b_0 - ab_1 && \Leftrightarrow b_0 = ab_1 + a_1 \\ a_0 &= r - ab_0 && \Leftrightarrow r = ab_0 + a_0. \end{aligned}$$

În practică, pentru calculul restului și coeficienții câtului, organizăm calculele sub forma unui tabel, numit **schema lui Horner**:

	X^n	X^{n-1}	X^{n-2}	...	X	X^0
	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
a	$\underbrace{a_n}_{\downarrow}$	$\underbrace{ab_{n-1} + a_{n-1}}_{\downarrow}$	$\underbrace{ab_{n-2} + a_{n-2}}_{\downarrow}$	...	$\underbrace{ab_1 + a_1}_{\downarrow}$	$\underbrace{ab_0 + a_0}_{\downarrow}$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	...	b_0	r

EXEMPLE:

1. Determină câtul și restul împărțirii polinomului $f = 2X^4 - X^3 - 3X + 5$ la polinomul $X - 2$ utilizând schema lui Horner.

	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	2	-1	0	-3	5
2	2	$2 \cdot 2 + (-1) = \mathbf{3}$	$2 \cdot 3 + 0 = \mathbf{6}$	$2 \cdot 6 + (-3) = \mathbf{9}$	$2 \cdot 9 + 5 = \mathbf{23}$
	b_3	b_2	b_1	b_0	r

Am obținut $q = 2X^3 + 3X^2 + 6X + 9$, $r = 23$.

2. Determină câtul și restul împărțirii polinomului $f = 3X^4 + X^3 - 3$ la polinomul $X + 1$ utilizând schema lui Horner.

	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	3	1	0	0	-3
-1	3	$(-1) \cdot 3 + 1 = \mathbf{-2}$	$(-1) \cdot (-2) + 0 = \mathbf{2}$	$(-1) \cdot 2 + 0 = \mathbf{-2}$	$(-1) \cdot (-2) + (-3) = \mathbf{-1}$
	b_3	b_2	b_1	b_0	r

Am obținut $q = 3X^3 - 2X^2 + 2X - 2$, $r = -1$.

Dacă am înțeles cum funcționează schema lui Horner, putem completa în tabel direct rezultatele calculelor.

	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	3	1	0	0	-3
-1	3	-2	2	-2	-1
	b_3	b_2	b_1	b_0	r

Definiție. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$. Spunem că polinomul g divide polinomul f dacă există polinomul h astfel încât $f = g \cdot h$.

OBSERVAȚII.

1. Dacă polinomul g divide polinomul f , spunem că polinomul g este **divizor** al polinomului f . „Polinomul g divide polinomul f ” se notează $g \mid f$.
2. În loc de „polinomul g divide polinomul f ”, putem spune și că „polinomul f este **divizibil** cu polinomul g ” și notăm $f : g$. În acest caz spunem că polinomul f este multiplu al polinomului g .
3. Polinomul $g \neq 0$ este divizor al polinomului f dacă restul împărțirii polinomului f la polinomul g este 0.

EXEMPLE:

1. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^2 - 9$ și $g = X - 3$. Atunci $f = (X - 3)(X + 3)$, de unde rezultă că polinomul g divide polinomul f (sau polinomul f este divizibil cu polinomul g).
2. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 1$ și $g = X^2 - X + 1$. Atunci $f = (X^2 - X + 1)(X - 1)$, de unde rezultă că polinomul g divide polinomul f (sau polinomul f este divizibil cu polinomul g).
3. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - 3X^2 + 9$ și $g = X^2 + 3X + 3$. Împărțind polinomul f la polinomul g obținem câtul $q = X^2 - 3X + 3$ și restul $r = 0$. Deci $f = g \cdot q$, adică polinomul g divide polinomul f .

$$\begin{array}{r}
 X^4 \quad - 3X^2 \quad + 9 \quad | \quad X^2 + 3X + 3 \\
 -X^4 - 3X^3 - 3X^2 \quad | \quad X^2 - 3X + 3 \\
 \hline
 / - 3X^3 - 6X^2 \quad + 9 \\
 \quad 3X^3 + 9X^2 + 9X \\
 \quad \hline
 \quad / \quad 3X^2 + 9X + 9 \\
 \quad \quad - 3X^2 - 9X - 9 \\
 \quad \quad \hline
 \quad \quad / \quad / \quad /
 \end{array}$$

Proprietăți ale relației de divizibilitate

- $f \mid f$, pentru orice $f \in \mathbb{R}[X]$ (divizibilitatea polinoamelor este **reflexivă**).
- Dacă $f, g, h \in \mathbb{R}[X]$, $g \mid f$ și $f \mid h$, atunci $g \mid h$ (divizibilitatea polinoamelor este **tranzitivă**).
- Dacă $f, g, h \in \mathbb{R}[X]$, $g \mid f$ și $g \mid h$, atunci $g \mid (f \cdot u + h \cdot v)$, pentru orice $u, v \in \mathbb{R}[X]$.
- Dacă $f, g \in \mathbb{R}[X]$ și $g \mid f$ ($f \neq 0$, $g \neq 0$), atunci $\text{grad}(g) \leq \text{grad}(f)$.

Exerciții rezolvate

1. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X - 2)^{2026} + mX^2 - 3X$. Determină numărul real m pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $X - 3$ este 10.

Rezolvare:

Aplicând teorema restului pentru $a = 3$, obținem $r = f(3)$.

$$f(3) = (3 - 2)^{2026} + m \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 = 1^{2026} + 9m - 9 = 9m - 8 \Rightarrow r = 9m - 8.$$

Cum restul împărțirii polinomului f la $X - 3$ este 10, obținem $9m - 8 = 10$, de unde rezultă că $m = 2$.

2. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - 3X^2 + mX - (n + 2)$. Determină numerele reale m și n pentru care restul împărțirii polinomului f la $X^2 - X + 1$ este $2X - 3$.

Rezolvare:

Efectuăm împărțirea polinomului f la polinomul $X^2 - X + 1$, apoi egalăm polinomul obținut ca rest cu polinomul $2X - 3$.

Cum restul împărțirii polinomului f la $X^2 - X + 1$ este $(m - 4)X + (1 - n)$,

polinoamele $(m - 4)X + (1 - n)$ și $2X - 3$ sunt egale. Atunci $m - 4 = 2$ și $1 - n = -3$, de unde rezultă că $m = 6$ și $n = 4$.

$$\begin{array}{r} X^4 - 3X^2 + mX - (n + 2) \mid X^2 - X + 1 \\ -X^4 + X^3 - X^2 \mid X^2 - X + 1 \\ \hline X^3 - 4X^2 + mX - (n + 2) \\ -X^3 + X^2 - X \\ \hline X^2 - 3X^2 + (m - 1)X - (n + 2) \\ 3X^2 - 3X + 3 \\ \hline (m - 4)X + (1 - n) \end{array}$$

3. Determină polinomul $g \in \mathbb{R}[X]$, știind că prin împărțirea polinomului $f = X^4 - X^3 + 2X^2$ la g se obține câtul $q = X^2 + 1$ și restul $r = X - 1$.

Rezolvare:

Din teorema împărțirii cu rest avem $f = g \cdot q + r$ și $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$, deci $f - r = g \cdot q$, adică g este câtul împărțirii polinomului $f - r$ la q .

Împărțind $f - r = X^4 - X^3 + 2X^2 - X + 1$ la $q = X^2 + 1$, obținem $g = X^2 - X + 1$.

$$\begin{array}{r} X^4 - X^3 + 2X^2 - X + 1 \mid X^2 + 1 \\ -X^4 - X^2 \mid X^2 + 1 \\ \hline -X^3 + X^2 - X + 1 \\ X^3 + X \\ \hline X^2 + 1 \\ -X^2 - 1 \\ \hline - X \\ \end{array}$$

4. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - 2X^3 + X^2 + aX + b$. Determină numerele reale a și b pentru care restul împărțirii polinomului f la $X + 1$ este 2, iar restul împărțirii polinomului f la $X - 2$ este 4.

Rezolvare:

Din teorema restului avem:

– restul împărțirii polinomului f la $X + 1$ este $f(-1)$, de unde rezultă $f(-1) = 2$;

– restul împărțirii polinomului f la $X - 2$ este $f(2)$, de unde rezultă $f(2) = 4$.

$$\begin{cases} f(-1) = 2 \\ f(2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - a + b = 2 \\ 4 + 2a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = -2 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

5. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X^2 - 5X + 5)^{1013} + 4X - 2$ cu forma algebrică $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{2026}X^{2026}$ și $g = X^2 - 3X + 2$.

a) Arată că $g(1) = g(2)$.

b) Arată că a_0 nu poate fi pătratul unui număr natural.

c) Determină restul împărțirii polinomului f la polinomul g .



CONTEXTUALIZEZ

• Polinoamele sunt folosite la realizarea animațiilor și jocurilor video pentru a obține mișcări și forme mai naturale, pentru modelarea suprafețelor 3D, pentru calcularea traseelor, a vitezei și a schimbării direcției unui obiect. De exemplu, saltul unui personaj, traiectoria unei mașini sau mișcarea camerei într-un joc pot fi descrise prin funcții polinomiale.

• Polinoamele sunt esențiale în inteligența artificială și analiza datelor. Sistemele și algoritmi de inteligență artificială trebuie să recunoască modele și să învețe din informații. Pentru aceasta, folosesc modele matematice bazate și pe funcții polinomiale, care ajută la aproximarea și analiza datelor.

CONTEXTUALIZEZ

- Polinoamele sunt utilizate pentru realizarea predicțiilor și identificarea relațiilor dintre informații. De exemplu, acestea creează posibilitatea unui program să estimeze evoluția temperaturilor, a prețurilor sau să recunoască fețe și imagini.
- În analiza datelor, funcțiile polinomiale sunt folosite pentru trasarea liniilor de tendință și pentru interpretarea unor volume mari de informații. Astfel, concepte studiate la matematică stau la baza multor tehnologii moderne, precum asistenței virtuali, recomandările online și aplicațiile de recunoaștere vocală.
- Protejarea datelor, a parolelor și a tranzacțiilor bancare se bazează pe calcule matematice complexe. Polinoamele sunt utilizate în algoritmi avansați pentru criptarea informațiilor, astfel încât acestea să fie extrem de greu de accesat fără o cheie secretă.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} a) g(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0 \\ g(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(1) = g(2)$$

$$b) a_0 = f(0) \Rightarrow a_0 = (0^2 - 5 \cdot 0 + 5)^{1013} + 4 \cdot 0 - 2 \Leftrightarrow a_0 = 5^{1013} - 2$$

Știm că ultima cifră a pătratului unui număr natural nu poate fi 2, 3, 7 sau 8.

Ultima cifră a numărului 5^{1013} este 5, deci ultima cifră a numărului $a_0 = 5^{1013} - 2$ este 3, de unde rezultă că a_0 nu poate fi pătratul unui număr natural.

c) Conform teoremei împărțirii cu rest pentru polinoame cu coeficienți reali, există și sunt unice polinoamele $c, r \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $f = g \cdot q + r$ și $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$.

Din $\text{grad}(r) < \text{grad}(g) = 2$, obținem $r = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Deci $f = g \cdot q + aX + b$. (10)

Calculăm valoarea polinomului f în 1:

$$f(1) = (1^2 - 5 \cdot 1 + 5)^{1013} + 4 \cdot 1 - 2 = 3; \quad (11)$$

$$\text{Conform (10) avem } f(1) = g(1) \cdot q(1) + a \cdot 1 + b = a + b; \quad (12)$$

$$\text{Din (11) și (12) obținem } a + b = 3. \quad (13)$$

Procedăm analog pentru a calcula valoarea polinomului f în 2 și obținem $2a + b = 5$. (14)

$$\text{Din (13) și (14) obținem } a = 2 \text{ și } b = 1, \text{ deci } r = 2X + 1.$$

6. Determină numerele reale m și n pentru care polinomul $f = X^4 + X^2 + mX + n$ se divide cu polinomul $g = (X + 1)^2$.

Rezolvare:

Aplicăm schema lui Horner de două ori, impunând condiția ca resturile celor două împărțiri să fie 0.

	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	1	0	1	m	n
-1	1	-1	2	$m - 2$	$-m + n + 2 = r_1$
-1	1	-2	4	$m - 6 = r_2$	

Din $r_1 = r_2 = 0$, obținem $m = 6$ și $n = 4$.

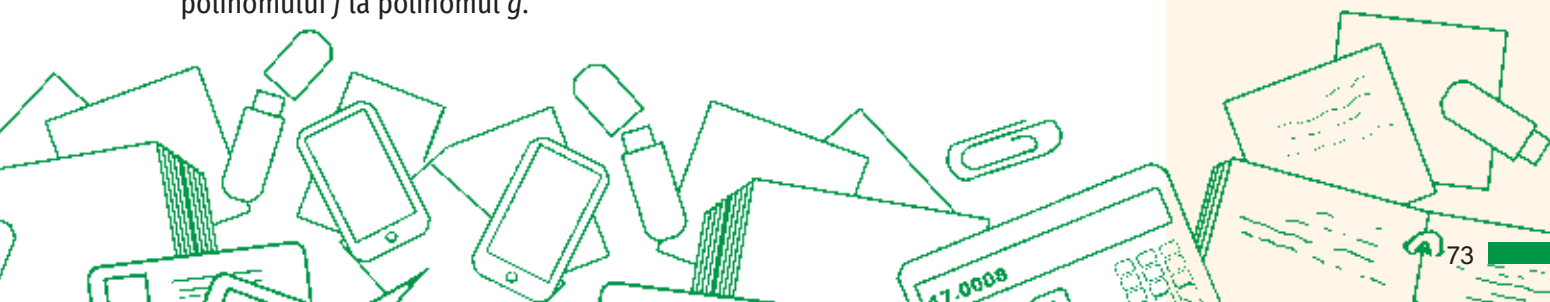
Aplic

- Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$. Determină câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
 - $f = -5X^2 - X - 1$ și $g = 3X^3$;
 - $f = X - 1$ și $g = \sqrt{2}X^2 + X - 2$;
 - $f = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 - X - 1$ și $g = X^3$;
 - $f = X^5 + X^4 - X - 1$ și $g = X^3 - X$;
 - $f = X^4 - 2X^2 - 1$ și $g = X^2 + \sqrt{2}X - 1$;
 - $f = X^{20} - 1$ și $g = X^{10} + 1$;
 - $f = X^9 + 1$ și $g = X + 1$.
- Determină restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
 - $f = X^5 - X^4 + X^3 - X^2 - X - 1$ și $g = X + 1$;
 - $f = X^4 - X^2 - X - 1$ și $g = X + 2$;
 - $f = 2X^4 - X^2 - 1$ și $g = X + \sqrt{2}$;
 - $f = X^5 + X^3 + X - 2\sqrt{3}$ și $g = X + \sqrt{3}$;
 - $f = 8X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 1$ și $g = X + \frac{1}{2}$;
 - $f = 8X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 1$ și $g = 2X + 1$;
 - $f = 9X^3 + 6X^2 + X + 3$ și $g = 3X + 1$.

3. Folosind schema lui Horner, determină câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
 - a) $f = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 - X - 1$ și $g = X - 1$;
 - b) $f = X^5 + 2X^2 + X + 9$ și $g = X + 2$;
 - c) $f = X^7 - 1$ și $g = X - 1$;
 - d) $f = 2X^3 + 4X^2 - X - 1$ și $g = X + \frac{1}{2}$;
 - e) $f = X^5 + X^3 - X - \sqrt{3}$ și $g = X - \sqrt{3}$.
4. Stabilește dacă polinomul f este divizibil cu polinomul g .
 - a) $f = X^{55} - X^{45} + X^{33} - X^{22} - X - 1$ și $g = X + 1$;
 - b) $f = X^4 - X^2 - X - 3$ și $g = X + 2$;
 - c) $f = 2X^3 + X^2 + 1$ și $g = X^2 - 2$;
 - d) $f = X^4 - 1$ și $g = X^2 - 1$;
 - e) $f = -2X^4 + X^2 + 4X + 10$ și $g = X - 2$;
 - f) $f = 3X^4 + 2X^2 - 6X + 10$ și $g = X^2 - 2X + 2$.
5. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + 2X^2 + X + a$. Determină restul împărțirii polinomului f la polinomul $X + 2$, știind că restul împărțirii polinomului f la $X - 2$ este 3.
6. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^4 + 4X^3 - 2X^2 + nX + m$. Determină restul împărțirii polinomului f la X , știind că resturile împărțirii polinomului f la polinoamele $X + 2$ și $X - 1$ sunt egale cu 3.
7. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^4 + 4X^3 - mX^2 + nX + p$. Determină numerele reale m , n și p pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $(X + 2)^3$.
8. Determină valorile numărului natural p pentru care polinomul $f = X^p - pX + p - 5$ se divide cu polinomul $g = X + 1$.
9. Determină numerele reale n și p pentru care polinomul $f = 2X^4 + X^3 - 5X^2 + nX + p$ este divizibil cu polinomul $(X + 1)^2$.
10. Determină numerele reale a și b pentru care polinomul $f = X^3 - 5X^2 + aX + b$ este divizibil cu polinomul $X^2 + X - 1$.
11. Determină câtul și restul împărțirii polinomului $f = X^4 + 3X^2 + aX + b$ la polinomul $g = X^3 - X + 1$, știind că polinomul f este divizibil cu polinomul $X^2 - 2X + 2$.
12. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X^2 - X - 1)^{1014} + X^2 + 3X + 1$ cu forma algebrică $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{2028}X^{2028}$ și $g = X^2 - X - 2$.
 - a) Arată că $g(-1) = g(2)$.
 - b) Arată că $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2025} + a_{2027} = 3$.
 - c) Determină restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
13. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X - 1)^{2027} + 2X - 3$ cu forma algebrică $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{2027}X^{2027}$ și $g = X^2 - 1$. Determină restul împărțirii polinomului f la polinomul g .

ȘTIAI CĂ...?

Schema lui Horner este o metodă algoritmică rapidă pentru a împărți polinoame și pentru a calcula valoarea lor. Interesant este că metoda era cunoscută de chinezi cu secole înainte, dar matematicianul englez William George Horner a fost cel care a popularizat-o în Occident.





3. Rădăcini reale ale polinoamelor; teorema lui Bézout

Descopăr

Fie polinomul $f = X^3 - 2X^2 - X + 2$.

- Calculează $f(1)$.
- Determină câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X - 1$.
- Determină soluțiile ecuației $\bar{g}(\alpha) = 0$, unde $\bar{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reprezintă funcția polinomială asociată polinomului g , iar g este câtul împărțirii polinomului f la polinomul $X - 1$.
- Calculează $f(x_1)$ și $f(x_2)$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $\bar{g}(\alpha) = 0$.

Învăț

Definiție. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$. Numărul real α pentru care $f(\alpha) = 0$ se numește rădăcină a polinomului f .

OBSERVAȚIE.

Rădăcinile unui polinom f în nedeterminata X se notează $x_1, x_2, \dots$.

EXEMPLE:

- Numărul real -1 este rădăcină a polinomului $f = X^4 + X^3 - 2X^2 + 4X + 6$, deoarece $f(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 6 = 0$.
- Polinomul $f = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ are rădăcina $-\frac{b}{a}$ deoarece $f\left(-\frac{b}{a}\right) = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0$. Știm că $-\frac{b}{a}$ este soluție a ecuației de gradul I $ax + b = 0$ ($a \neq 0$).
- Polinomul nul $f = 0$ are ca rădăcină orice număr real ($f(\alpha) = 0$, pentru orice număr real α).

Teorema 1 (Teorema lui Bézout). Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. α este rădăcină a polinomului f dacă și numai dacă $X - \alpha$ divide f .

Demonstrație:

Din teorema împărțirii cu rest avem $f = (X - \alpha)q + r$, unde $q, r \in \mathbb{R}[X]$ și $\text{grad}(r) < 1$ (deci $r \in \mathbb{R}$).

α este rădăcină a polinomului $f \Leftrightarrow f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow (X - \alpha)$ divide f .

EXEMPLE:

- Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - X^2 - X - 2$.
 $f(2) = 2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 0$, deci 2 este rădăcină a polinomului f . Atunci $(X - 2) \mid f$.
- Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $(X + 1) \mid f$. Atunci -1 este rădăcină a polinomului f .

Consecințe ale teoremei lui Bézout

- Dacă $a_1, a_2, \dots, a_k$ sunt k rădăcini reale distincte ale polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, atunci $(X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_k)$ divide f .
- Dacă f este un polinom nenul de gradul n , cu coeficienți reali, atunci polinomul f are cel mult n rădăcini reale.



OBSERVAȚIE.

Singurul polinom cu coeficienți reali care are mai multe rădăcini decât gradul său este polinomul nul.

Teorema 2. Fie $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$ un polinom cu coeficienți întregi ($a_0 \neq 0, a_n \neq 0, n \geq 1$) și $\alpha = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, (|p|, |q|) = 1$) o rădăcină a polinomului f . Atunci:

i) $|p|$ divide $|a_0|$;

ii) $|q|$ divide $|a_n|$.

Demonstrație:

$$i) \alpha = \frac{p}{q} \text{ este rădăcină a polinomului } f \Rightarrow f(\alpha) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 \frac{p}{q} + a_2 \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \dots + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n = 0. \quad (1)$$

$$\text{Înmulțim relația (1) cu } q^n \text{ obținem: } a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + a_2 p^2 q^{n-2} + \dots + a_{n-1} p^{n-1} q + a_n p^n = 0. \quad (2)$$

Din relația (2) obținem $p(-a_1 q^{n-1} - a_2 p q^{n-2} - \dots - a_{n-1} p^{n-2} q - a_n p^{n-1}) = a_0 q^n$, de unde rezultă $|p| \mid |a_0 q^n|$.

$$\left. \begin{array}{l} |p| \mid |a_0 q^n| \\ (|p|, |q|) = 1 \Rightarrow (|p|, |q^n|) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow |p| \mid |a_0|$$

ii) Din relația (2) obținem $q(-a_0 q^{n-1} - a_1 p q^{n-2} - a_2 p^2 q^{n-3} - \dots - a_{n-1} p^{n-1}) = a_n p^n$ de unde rezultă $|q| \mid |a_n p^n|$.

$$\left. \begin{array}{l} |q| \mid |a_n p^n| \\ (|q|, |p|) = 1 \Rightarrow (|q|, |p^n|) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow |q| \mid |a_n|.$$

Consecințe:

Fie $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$ un polinom cu coeficienți întregi ($a_0 \neq 0, a_n \neq 0$).

- Rădăcinile întregi ale polinomului f , dacă există, sunt de forma $\pm \alpha$, unde α aparține mulțimii divizorilor naturali ai numărului $|a_0|$.
- Dacă $a_n = \pm 1$, atunci rădăcinile raționale ale polinomului f sunt numere întregi și sunt de forma $\pm \alpha$, unde α aparține mulțimii divizorilor naturali ai numărului $|a_0|$.
- Rădăcinile raționale ale polinomului f , dacă există, sunt de forma $\pm \frac{\alpha}{\beta}$, unde α aparține mulțimii divizorilor naturali ai numărului $|a_0|$, iar β aparține mulțimii divizorilor naturali ai numărului $|a_n|$.

OBSERVAȚII.

1. Pentru a determina rădăcinile întregi ale unui polinom cu coeficienți întregi

$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$ ($a_0 \neq 0, a_n \neq 0$) procedăm astfel:

- determinăm divizorii naturali ai numărului $|a_0|$;
- verificăm care dintre aceștia sau dintre opușii acestora sunt rădăcini ale polinomului.

2. Pentru a determina rădăcinile raționale ale unui polinom cu coeficienți întregi

$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$ ($a_0 \neq 0, a_n \neq 0$) procedăm astfel:

- determinăm divizorii naturali ai numerelor $|a_0|$ și $|a_n|$;
- determinăm toate numerele raționale de forma $\pm \frac{p}{q}$, unde $p, q \in \mathbb{N}, p \mid |a_0|, q \mid |a_n|$ și $\frac{p}{q}$ este fracție ireductibilă;
- verificăm care dintre numerele raționale determinate la punctul anterior sunt rădăcini ale polinomului f .

EXEMPLE:

1. Pentru determinarea rădăcinilor întregi ale polinomului $f = X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$, determinăm divizorii numărului $|-2|$. Aceștia sunt 1 și 2. Rădăcinile întregi ale polinomului f se află printre numerele $-2, -1, 1$ și 2 .

$$f(-2) = (-2)^4 + (-2)^3 - (-2)^2 + (-2) - 2 = 16 - 8 - 4 - 2 - 2 = 0$$

$$f(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - (-1)^2 + (-1) - 2 = 1 - 1 - 1 - 1 - 2 = -4$$

$$f(1) = 1^4 + 1^3 - 1^2 + 1 - 2 = 1 + 1 - 1 + 1 - 2 = 0$$

$$f(2) = 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2 - 2 = 16 + 8 - 4 + 2 - 2 = 20.$$

Rădăcinile întregi ale polinomului f sunt -2 și 1 .

2. Pentru determinarea rădăcinilor raționale ale polinomului $f = 2X^4 + X^3 + X^2 + X - 1$, procedăm astfel:

- Determinăm divizorii numărului 1.

- Determinăm divizorii numărului 2.

- Determinăm toate numerele raționale de forma $\pm \frac{p}{q}$, unde $p \in \{1\}$ și $q \in \{1, 2\}$. Acestea sunt $-1, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}$.

- Verificăm care dintre numerele raționale determinate la pasul anterior sunt rădăcini ale polinomului f .

$$f(-1) = 2(-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) - 1 = 2 - 1 + 1 - 1 - 1 = 0;$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4};$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = 0;$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1 - 1 = 2 + 1 + 1 + 1 - 1 = 4;$$

Rădăcinile raționale ale polinomului f sunt -1 și $\frac{1}{2}$.

Exerciții rezolvate

1. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$. Determină numerele reale a și b pentru care $x_1 = -1$ și $x_2 = 2$ sunt rădăcini ale polinomului f .

Rezolvare:

$$x_1 = -1 \text{ este rădăcină a polinomului } f \Leftrightarrow f(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + a \cdot (-1) + b = 0 \Leftrightarrow -a + b = 3 \quad (3).$$

$$x_2 = 2 \text{ e rădăcină a polinomului } f \Leftrightarrow f(2) = 0 \Leftrightarrow 2^3 - 2 \cdot 2^2 + a \cdot 2 + b = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0 \quad (4).$$

Din (3) și (4) obținem $a = -1$ și $b = 2$.

2. Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - X^3 - mX^2 + 2X + m - 1$. Determină numărul real m pentru care $(X + \sqrt{2}) \mid f$.

Rezolvare:

$$(X + \sqrt{2}) \mid f \xLeftrightarrow{\text{(teorema lui Bézout)}} f(-\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-\sqrt{2})^4 - (-\sqrt{2})^3 - m(-\sqrt{2})^2 + 2 \cdot (-\sqrt{2}) + m - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{2} - 2m - 2\sqrt{2} + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$



3. Determină valorile numărului întreg a pentru care polinomul $f = X^3 - aX^2 + 2X - 2$ are rădăcini numere întregi.

Rezolvare:

Dacă $a \in \mathbb{Z}$, atunci polinomul f are coeficienți numere întregi și rădăcinile întregi ale polinomului f sunt de forma $\pm\alpha$, unde $\alpha \mid |-2|$. Așadar, rădăcinile întregi ale polinomului f pot fi $-2, -1, 1, 2$.

$$\begin{aligned} \bullet -2 \text{ este rădăcină a polinomului } f &\Leftrightarrow f(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2)^3 - a \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -8 - 4a - 4 - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{7}{2} \notin \mathbb{Z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet -1 \text{ este rădăcină a polinomului } f &\Leftrightarrow f(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^3 - a \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -1 - a - 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -5 \in \mathbb{Z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet 1 \text{ este rădăcină a polinomului } f &\Leftrightarrow f(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 - a \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - a + 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \in \mathbb{Z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet 2 \text{ este rădăcină a polinomului } f &\Leftrightarrow f(2) = 0 \Leftrightarrow 2^3 - a \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8 - 4a + 4 - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Așadar, $a \in \{-5, 1\}$.

4. Determină rădăcinile reale ale polinomului $f = X^3 + X^2 - 3X - 2$.

Rezolvare:

Determinăm rădăcinile raționale ale polinomului f :

$$f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 2 = -8 + 4 + 6 - 2 = 0, \text{ deci } x_1 = -2 \text{ este rădăcină a polinomului } f;$$

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 2 = -1 + 1 + 3 - 2 = 1 \neq 0, \text{ deci } -1 \text{ nu este rădăcină a polinomului } f.$$

$$f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = 1 + 1 - 3 - 2 = -3 \neq 0, \text{ deci } 1 \text{ nu este rădăcină a polinomului } f.$$

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 2 = 8 + 4 - 6 - 2 = 4 \neq 0, \text{ deci } 2 \text{ nu este rădăcină a polinomului } f.$$

Polinomul f are o singură rădăcină rațională $x_1 = -2$. Determinăm eventualele rădăcini reale, care nu sunt raționale, ale polinomului f .

$$x_1 = -2 \text{ este rădăcină a polinomului } f \Leftrightarrow (X + 2) \mid f. \quad \text{(teorema lui Bézout)}$$

Aplicăm schema lui Horner pentru a afla câtul împărțirii polinomului f la $X + 2$.

	X^3	X^2	X	X^0
	1	1	-3	-2
-2	1	-1	-1	0
	b_2	b_1	b_0	r

Câtul împărțirii polinomului f la $X + 2$ este $q = X^2 - X - 1$, deci $f = (X + 2)(X^2 - X - 1)$.

Dacă $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este rădăcină a polinomului f , atunci $f(\alpha) = 0$.

$$f(\alpha) = 0, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Leftrightarrow (\alpha + 2)(\alpha^2 - \alpha - 1) = 0, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Rezolvând ecuația $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$, obținem soluțiile $\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ și $\alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

În concluzie, polinomul f are rădăcinile $x_1 = -2, x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ și $x_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.



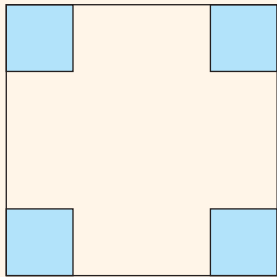


Figura 1

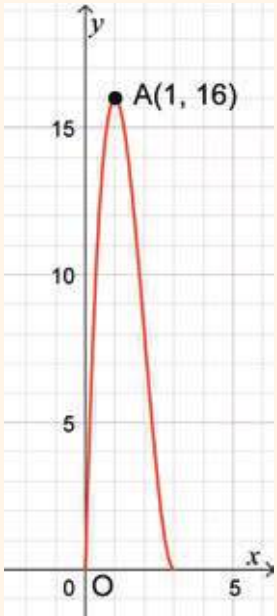


Figura 2

5. O bucată de tablă pătratică are lungimea laturii egală cu 6 dm. Din fiecare colț se decupează un pătrat cu lungimea laturii egală cu x dm (figura 1). Din bucata rămasă, prin îndoire adecvată, se obține o cutie în formă de prismă patrulateră regulată.

- Exprimă în funcție de x volumul cutiei obținute prin îndoire.
- Determină forma algebrică a polinomului în nedeterminata X care reprezintă formula de calcul a volumului cutiei obținute prin îndoire.
- Folosind una dintre aplicațiile *Desmos* sau *GeoGebra*, reprezintă grafic funcția care exprimă dependența dintre volumul cutiei și lungimea muchiei acesteia.
- Determină cel mai mare volum pe care îl poate avea cutia. Câți litri de apă încap în cutie atunci când aceasta are volumul maxim?

Rezolvare:

a) Observăm că $x \in (0, 3)$. Cutia are forma unei prisme patrulateră regulate, cu muchia bazei de lungime $6 - 2x$ și înălțimea x . Atunci volumul V al cutiei este $V = (6 - 2x)^2 \cdot x$.

$$b) V = (6 - 2x)^2 \cdot x \Leftrightarrow V = (36 - 24x + 4x^2) \cdot x \Leftrightarrow V = 36x - 24x^2 + 4x^3$$

Așadar, forma algebrică a polinomului este $f = 36X - 24X^2 + 4X^3$.

c) Funcția care exprimă dependența dintre volumul cutiei și lungimea muchiei acesteia este $f: (0, 3) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$. Reprezentarea geometrică a graficului funcției f este redată în figura 2.

d) Conform reprezentării grafice a funcției f , volumul maxim al cutiei poate fi 16 dm^3 , deci, atunci când volumul cutiei este maxim, în cutie încap 16 litri de apă.

Aplic

1. Verifică dacă:

- $-\frac{1}{2}$ este rădăcină a polinomului $f = 2X^3 + X^2 - X + 1$;
- $\sqrt{2}$ este rădăcină a polinomului $f = X^4 - X^2 + \sqrt{2}X - 4$;
- -1 este rădăcină a polinomului $f = (X + 2)^{2026} - X^{1001} + X^2 + X - 2$;
- 2 este rădăcină a polinomului $f = (X - 3)^{2n+1} + (X - 1)^n + X^2 - X - 2, n \in \mathbb{N}^*$.

2. Determină numărul real m pentru care:

- -2 este rădăcină a polinomului $f \in \mathbb{R}[X], f = X^3 + mX^2 - 3X + 6$;
- $\sqrt{3}$ este rădăcină a polinomului $f \in \mathbb{R}[X], f = X^4 + X^3 + mX - 9$;
- -3 este rădăcină a polinomului $f \in \mathbb{R}[X], f = (X + 2)^{2026} - (X + 4)^{1001} + X^2 + mX - 2$;
- $1 - \sqrt{2}$ este rădăcină a polinomului $f \in \mathbb{R}[X], f = X^3 + X^2 - 3X + m$.

3. Determină numerele reale m și n , știind că:

- $x_1 = 2$ și $x_2 = -1$ sunt rădăcini ale polinomului $f \in \mathbb{R}[X], f = mX^2 + nX - 2$;
- $x_1 = \sqrt{2}$ și $x_2 = 0$ sunt rădăcini ale polinomului $f \in \mathbb{R}[X], f = X^3 + mX^2 - 2X + n - 1$;
- $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ și $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ sunt rădăcini ale polinomului $f \in \mathbb{R}[X], f = X^3 - X^2 + mX + n$.

4. Arată că $x_1 = -1$ este rădăcină a polinomului

$$f \in \mathbb{R}[X], f = aX^5 + bX^4 + cX^3 + cX^2 + bX + a, \text{ pentru orice } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

5. Arată că, dacă $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, este rădăcină a polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = aX^4 + bX^3 + cX^2 + bX + a$ ($a \neq 0$), atunci și $\frac{1}{\alpha}$ este rădăcină a polinomului f .
6. Determină numărul real m pentru care polinomul $X - 2$ divide polinomul $X^3 + mX^2 - 2X - 3m + 1$.
7. Determină numărul real a pentru care polinomul $X^3 + 2X^2 - 2X - a + 1$ se divide polinomul $X - \sqrt{2}$.
8. Determină restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + 2X^2 - 2X + 2n - 3$ la polinomul $g = X - 3$, știind că polinomul f are rădăcina $x_1 = -1$.
9. Determină numărul real n pentru care polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + 2X^2 - 2X + 2n - 3$ este divizibil cu polinomul $X + \frac{1}{2}$.
10. Determină restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + aX^2 - (a + 1)X + 4$ la polinomul $X + 3$, știind că polinomul f se divide cu polinomul $X - 2$.
11. Determină restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + X^3 - (a + 1)X + 4$ la polinomul $X + 4$, știind că polinomul f se divide cu polinomul $X + 2$.
12. Determină restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X^3 - 4X + 1)^{2026} + X^2 + aX - 3$ la polinomul $g = X^2 - 2X$, știind că polinomul f se divide cu polinomul $X + 2$.
13. Fie $f, g, h \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X^3 - X - 1)^{2026} + aX^2 + bX - 3$, $g = X^3 - X$ și $h = X^2 - 1$.
 - a) Scrie polinoamele g și h ca un produs de două polinoame de gradul I.
 - b) Determină restul împărțirii polinomului f la polinomul g , știind că polinomul f se divide cu polinomul $h = X^2 - 1$.
14. Determină restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X^3 - X - 1)^{2026} - aX^2 - 2X - b$, la polinomul $g = X^2 - X$, știind că polinomul f se divide cu polinoamele $X + 1$ și X .
15. Determină rădăcinile întregi ale polinoamelor:

a) $f = X^4 - 5X^2 + 4$;	d) $f = 2X^3 + 5X^2 + 5X + 3$;
b) $f = 2X^4 + 5X^3 + 4X^2 + 5X + 2$;	e) $f = X^3 + 4X^2 - 3X + 10$;
c) $f = X^3 - 4X^2 + 4X - 3$;	f) $f = X^4 + 4X^3 - X - 4$.
16. Determină rădăcinile raționale ale polinoamelor:

a) $f = 2X^3 - X^2 + 2X - 1$;	d) $f = 2X^4 - 3X^2 + 1$;
b) $f = 4X^3 + 4X^2 - X - 1$;	e) $f = 2X^3 + X^2 - 13X + 6$;
c) $f = 2X^3 + 3X^2 - 2X - 3$;	f) $f = 6X^3 - 11X^2 + 6X - 1$.
17. Determină rădăcinile reale ale polinoamelor:

a) $f = X^3 - 5X - 2$;	e) $f = 2X^3 - 3X^2 - 12X - 5$;
b) $f = X^4 - 4X^2 - 3$;	f) $f = X^3 - 8$;
c) $f = X^3 - X^2 - 7X - 5$;	g) $f = X^3 + 2X^2 + X + 2$.
d) $f = X^3 - 6X^2 + 7X + 2$;	
18. Determină valorile numărului întreg a pentru care polinomul $f = X^3 + X^2 + aX - 2$ are rădăcini numere întregi.
19. Determină valorile numărului întreg a pentru care polinomul $f = X^3 + X^2 + aX - 3$ are rădăcini numere întregi.
20. Determină valorile numărului întreg n pentru care polinomul $f = 3X^3 + nX^2 + (n + 1)X - 2$ are rădăcini numere raționale.

LUCRAȚI ÎN PERECHI!

1. Determinați numărul real m pentru care 3 este rădăcină a polinomului $f = (X - 2)^{2026} - (X - 4)^{1001} + X^2 + mX - 2$.
2. Determinați numărul real m , pentru care $X - 3$ divide polinomul $f = X^3 + mX^2 - 2X - 3m + 1$.
3. Determinați numerele întregi a pentru care polinomul $f = X^3 + (a - 1)X^2 + 2aX - 2$ are rădăcini numere întregi.
4. Determinați numerele întregi $m \in [-10, 10]$ pentru care polinomul $f = X^3 + X^2 + 2X - m$ are rădăcini numere întregi.

INDICAȚIE

Pentru a reprezenta graficul în *GeoGebra*, deschide aplicația și intră în secțiunea *Calculator de grafice*. În bara de introducere din partea stângă a ecranului, scrie funcția astfel (pentru simplificare, considerăm $c = 1$):
 $y = c(25 + 24n + 24n^2 - n^3)$.

21. Polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_n$ împărțit prin $X - 1$, X , $X + 1$, dă resturile 10, 2, respectiv 0.
- Determină valoarea termenului liber a_0 .
 - Calculează suma coeficienților de rang par ai polinomului f .
 - Determină restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X(X - 1)(X + 1)$.
22. Fie polinomul $f_n = 1 + \frac{X}{1} + \frac{X(X+1)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{X(X+1)\dots(X+n-2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)} + \frac{X(X+1)\dots(X+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, cu forma algebrică $f_n = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$.
- Calculează suma coeficienților polinomului f_n .
 - Demonstrează că suma coeficienților de rang par ai polinomului f_n este $\frac{n+1}{2}$.
 - Scrie forma algebrică a polinomului f_2 .
 - Demonstrează, folosind metoda inducției matematice, că $f_n = \frac{(X+1)(X+2)\dots(X+n)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Determină suma rădăcinilor polinomului f_{100} .
23. Un aisberg format prin desprinderea unei porțiuni din calota glaciară a Antarcticii plutește în derivă prin ocean. După n zile, acesta are volumul $V(n) = c(25 + 24n + 24n^2 - n^3)$, unde c este o constantă reală.
- După câte zile se va topi complet ghețarul?
 - Folosind una dintre aplicațiile *Desmos* sau *GeoGebra*, realizează reprezentarea geometrică a graficului funcției care exprimă volumul ghețarului în funcție de n . Documentează-te și apoi explică fenomenul.
24. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un dreptunghi cu perimetrul egal cu 24 dm.
- Exprimă volumul cilindrului în funcția de raza bazei acestuia.
 - Determină forma algebrică a polinomului în nedeterminata R , care reprezintă formula de calcul pentru volumul cilindrului.
 - Folosind una dintre aplicațiile *Desmos* sau *GeoGebra*, realizează reprezentarea geometrică a graficului funcției care exprimă volumul cilindrului în funcție de raza bazei acestuia.
 - Folosind reprezentarea geometrică de la punctul b), determină valoarea razei pentru care volumul cilindrului este maxim.
25. O grindă de beton are secțiunea transversală un dreptunghi cu lățimea $l = (x + 2)$ dm ($0 < x < 10$) și înălțimea $h = (x + 1)$ dm. Lungimea grinzii este $L = (10 - x)$ dm.
- Exprimă volumul grinzii în funcție de x .
 - Scrie forma algebrică a polinomului în nedeterminata X , care reprezintă formula de calcul pentru volumul grinzii.
 - Folosind una dintre aplicațiile *Desmos* sau *GeoGebra*, realizează reprezentarea geometrică a graficului funcției care exprimă volumul grinzii.
 - Folosind reprezentarea geometrică de la punctul c), precizează dacă volumul grinzii este mai mic decât 225 dm^3 , pentru orice $x \in (0, 10)$.

Exerciții recapitulative

1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.

A. Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X - 2)^3 + (X - 2)^2 + (X - 2) + 1$ cu forma algebrică $f = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$. Atunci $a_2 + a_1$ este egal cu:

a) 0; b) 2; c) 4; d) -8.

B. O rădăcină a polinomului $f = X^3 + 2X^2 + X + 2$ este:

a) 0; b) 2; c) -2; d) -1.

C. Polinomul $f = X^4 - 3X^2 + 10X - 24$ este divizibil cu polinomul:

a) $X + 3$; b) $X - 3$; c) $X + 6$; d) $X + 2$.

D. Restul împărțirii polinomului $f = 2X^4 + 3X^3 + 8X + 24$ la polinomul $X + 2$ este:

a) 16; b) 8; c) 0; d) 96.

E. Dacă polinomul $f = X^4 - 3X^2 + mX - 6$ este divizibil cu $X + 1$, atunci restul împărțirii polinomului f la $X - 2$ este:

a) 16; b) -18; c) 0; d) 14.

F. Suma rădăcinilor raționale ale polinomului $f = X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2$ este:

a) -3; b) 3; c) -1; d) -2.
2. Scrie sub formă algebrică polinomul f .

a) $f = (2X + 1)^3 - 1$; b) $f = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)(X^4 + 1) - 1$.
3. Determină în funcție numărul real m gradul polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$:
 $f = (m^2 - 4)X^5 + (m^2 - m - 2)X^4 - (m - 2)X^3 - 9X - 2$.
4. Determină suma coeficienților polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$:

a) $f = (2X^3 - 3X^2 - 3X + 3)^{2027} + 1$; b) $f = (X^3 - mX^2 + mX - 2)^{2027} + 1$.
5. Determină numărul real m pentru care suma coeficienților de rang impar ai polinomului $f = (2X^3 - 3X^2 - 3X + 3)^{2027} + mX^3 - 1$ este egală cu 10.
6. Fie f un polinom cu coeficienți întregi care ia valoarea 1 în 4 numere întregi distincte. Demonstrează că $f(p) \neq 6$, pentru orice număr întreg p .
7. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$. Determină câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g .

a) $f = -5X^3 - X - 1$ și $g = X^2 - 2$; b) $f = X^4 - X^3 + 1$ și $g = X^2 - 1$.
8. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + 2X^2 + X + a$. Determină restul împărțirii polinomului f la polinomul $X + 2$, știind că restul împărțirii polinomului f la $X + 1$ este 3.
9. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^4 + 4X^3 - 2X^2 + nX + m$. Determină restul împărțirii polinomului f la $X^2 + X - 1$, știind că restul împărțirii polinomului f la $(X + 2)^2$ este $X - 3$.
10. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^4 + 4X^3 - mX^2 + nX + p$. Determină numerele reale m , n și p pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $(X - 1)^3$.
11. Determină rădăcinile reale ale polinomului f .

a) $f = X^3 - X^2 - 3X + 2$; c) $f = X^4 - 5X^3 + 5X^2 + 5X - 6$; e) $f = X^3 - 3X^2 - 2X + 2$;
 b) $f = X^4 - 4X^2 + 3$; d) $f = 3X^3 + 2X^2 - 3X - 2$; f) $f = X^3 - 3X^2 - 2X + 4$.
12. Determină restul împărțirii polinomului $f = (X^2 - X - 1)^{2026} - 2X^2 - aX - b$ la polinomul $g = X^2 - 1$, știind că polinomul f se divide cu $X - 2$ și X .

Timp de lucru: 45 de minute

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I

30 de puncte

30 de puncte	1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.
(5 p.)	A. Suma coeficienților polinomului $f = (X^3 - 3X + 1)^{10} - 2X^5 + 3$ este egală cu: a) 0; b) 1; c) 3; d) 2.
(5 p.)	B. Restul împărțirii polinomului $f = X^4 - X^3 + 2X^2 - 3$ la $X^3 - X^2 - 3$ este egal cu: a) X ; b) $2X^2 + 3X - 3$; c) $4X^2 - 3$; d) 0.
(5 p.)	C. Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = (m^2 - 9)X^5 + (m^2 - 2m - 3)X^4 - (2m - 6)X^3 - 9X - 2$. Pentru $m = 3$, gradul polinomului f este: a) 1; b) 4; c) 3; d) 2.
(5 p.)	D. Dacă -2 și -1 sunt rădăcini ale polinomului $f = X^3 - 2X^2 + mX - n$, atunci suma coeficienților polinomului f este egală cu: a) -4 ; b) -26 ; c) 1; d) -24 .
(5 p.)	E. Suma rădăcinilor întregi ale polinomului $X^4 - X^3 - 5X^2 - X - 6$ este egală cu: a) -6 ; b) -5 ; c) 1; d) 4.
(5 p.)	F. Dacă polinomul $f = 2X^3 + 3X^2 - n$ se divide cu $X + 3$, atunci: a) $n = 54$; b) $n = -27$; c) $n = 81$; d) 5.

Subiectul al II-lea

60 de puncte

Scrie rezolvările complete.

60 de puncte	1. Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X - 2)^2(X^2 + 2)$ și $g = X^2 - 3$.
(10 p.)	a) Scrie sub formă algebrică polinomul f .
(10 p.)	b) Determină câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
	2. Resturile împărțirii polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_n$, la $X - 1$ și $X + 1$ sunt 10 și, respectiv, -8.
(10 p.)	a) Determină suma coeficienților polinomului f .
(10 p.)	b) Calculează suma coeficienților de rang par ai polinomului f .
(10 p.)	c) Determină restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - 1$.
(10 p.)	3. Determină numărul real a pentru care polinomul $X^3 + 2X^2 - 2X - a + 1$ se divide cu polinomul $X + \sqrt{2}$.

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din această unitate.

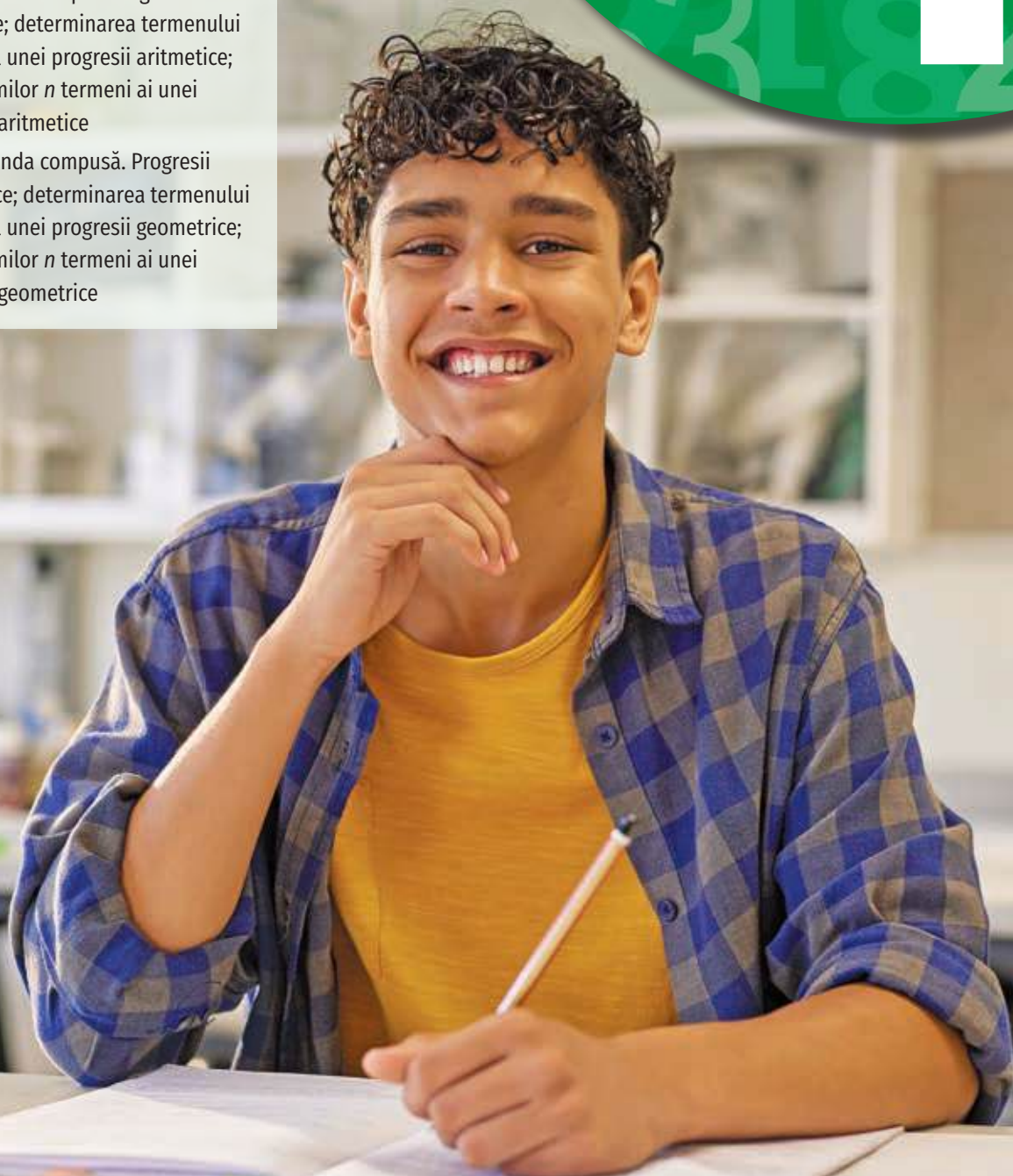
LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	5 foarte bine	4 bine	3 mediu	2 slab	1 foarte slab
Mi-a fost ușor să rezolv exercițiile.					
Am înțeles criteriile de rezolvare.					
Mi-am amintit conținuturile învățate.					

4

Progresii aritmetice și progresii geometrice

► 1. Dobânda simplă. Progresii aritmetice; determinarea termenului general al unei progresii aritmetice; suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

► 2. Dobânda compusă. Progresii geometrice; determinarea termenului general al unei progresii geometrice; suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice





1. Dobânda simplă. Progresii aritmetice; determinarea termenului general al unei progresii aritmetice; suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

Descopăr



Darius depune la bancă, într-un cont de economii, suma de 15 000 de lei, pe termen de 5 ani. Banca îi plătește lui Darius, pentru fiecare an încheiat, 5% din suma depusă.

- Cum se numește suma pe care o primește Darius de la bancă?
- Ce reprezintă procentul de 5% pe care banca îl aplică la suma depusă?
- Ce sumă va avea Darius în cont după fiecare an din cei cinci?
- Cu cât crește suma din cont în fiecare an?
- Determină suma pe care o va avea Darius în cont la finalul celor 5 ani, fără a calcula suma pe care o va avea după fiecare an din cei cinci.
- Scrive o formulă prin care poți determina suma de bani pe care o va avea Darius în cont la finalul anului n , unde $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Învăț

Dobânda simplă

Atunci când împrumutăm o sumă de bani S de la o bancă pentru o anumită perioadă de timp, trebuie să achităm suma S și o altă sumă D , care reprezintă un cost suplimentar, fiind necesară pentru a genera profit băncii și pentru a acoperi riscurile pe care aceasta și le asumă.

Dacă depunem o sumă de bani S într-un cont bancar pe o anumită perioadă de timp, la sfârșitul perioadei vom avea în cont suma S plus încă o sumă D , care reprezintă un câștig suplimentar acordat de bancă, deoarece banca a folosit economiile noastre.

În ambele cazuri menționate mai sus, suma D reprezintă dobânda.

Dobânda este suma de bani pe care beneficiarul unui capital o plătește proprietarului acestuia pentru dreptul de a-i folosi banii o anumită perioadă de timp.

Din perspectiva unui credit, dobânda este plătită de debitor (client) către creditor (bancă).

Din perspectiva unui depozit, dobânda este plătită de debitor (bancă) către creditor (deponent).

Dobânda simplă (nominală) este dobânda calculată asupra sumei depuse pe toată perioada depunerii (dobânzile anterioare nu se adaugă la capital).

Dobânda depinde de perioada de timp în care suma a fost folosită, quantumul sumei depuse și procentul care se aplică.

$D = \frac{p}{100} \cdot S \cdot n$ reprezintă dobânda obținută pentru suma S , cu rata dobânzii $p\%$, în n ani.

OBSERVAȚII.

- Rata dobânzii este raportul procentual între dobândă și valoarea creditului (capitalul împrumutat).

2. În cazul dobânzii simple, dobânda se calculează întotdeauna asupra sumei inițiale (numită capital principal), nu asupra sumei acumulate.

EXEMPLE:

1. Radu depune la bancă suma de 40 000 de lei în regim de dobândă simplă, cu rata dobânzii de 4,8% pe an. Determină suma pe care o va avea Radu în cont la termenul scadent, dacă acesta este unul, doi, respectiv trei ani. Ce observi?

Rezolvare:

Notăm suma depusă cu S_0 și cu S_i suma pe care o va avea Radu în cont după i ani. Atunci $S_0 = 40\,000$ și:

$$S_1 = 40\,000 + \frac{4,8}{100} \cdot 40\,000 \cdot 1 = 40\,000 + 1\,920 = 41\,920 \text{ lei};$$

$$S_2 = 40\,000 + \frac{4,8}{100} \cdot 40\,000 \cdot 2 = 40\,000 + 3\,840 = 43\,840 \text{ lei};$$

$$S_3 = 40\,000 + \frac{4,8}{100} \cdot 40\,000 \cdot 3 = 40\,000 + 5\,760 = 45\,760 \text{ lei}.$$

Observăm că $S_2 - S_1 = 1\,920$ lei, $S_3 - S_2 = 1\,920$ lei, deci creșterea soldului de la un an la anul următor se face cu aceeași sumă (1 920 de lei), pentru orice an.

2. Corina are un depozit bancar cu soldul inițial în valoare de 11 000 de lei, pe o perioadă de trei luni, în regim de dobândă simplă, cu o rată anuală a dobânzii de 5,2%. Ce sumă va avea în cont Corina la sfârșitul perioadei?

Rezolvare:

Calculăm dobânda aferentă celor trei luni, pentru suma de 11 000 de lei cu rata dobânzii de 5,2% pe an:

$$D = \frac{5,2}{100} \cdot 11\,000 \cdot \frac{3}{12} \Rightarrow D = 143 \text{ lei}.$$

La sfârșitul perioadei, Corina va avea în cont $11\,000 + 143 = 11\,143$ lei.

3. Melania a depus într-un cont bancar suma de 52 000 de lei în regim de dobândă simplă, pe o perioadă de 4 ani. La sfârșitul perioadei, ea are în cont suma de 64 896 de lei. Care este rata dobânzii?

Rezolvare:

Calculăm dobânda aferentă celor 4 ani: $D = 64\,896 - 52\,000 = 12\,896$.

Folosind formula de calcul a dobânzii, obținem:

$$12\,896 = \frac{p}{100} \cdot 52\,000 \cdot 4 \Leftrightarrow 12\,896 = 2\,080 \cdot p \Leftrightarrow p = 6,2.$$

Rata dobânzii a fost de 6,2%.

Șiruri

În mod obișnuit, prin șir înțelegem o infinitate de numere (distincte sau nu) scrise unul după altul.

EXEMPLE:

1. 1, 2, 3, 4, 5, ... (șirul numerelor naturale nenule);
2. 1, 4, 9, 16, ... (șirul pătratelor numerelor naturale nenule);



OBSERVAȚII.



1. Șirul nu este o mulțime de numere.
2. Într-un șir, fiecare element are un loc bine stabilit.

În general, un șir se scrie $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, iar $a_1, a_2, a_3, \dots$ se numesc termenii șirului. În locul literei a se poate folosi orice altă literă.

Indicele arată poziția sau rangul unui termen în șir; astfel, a_1 este primul termen, a_2 este al doilea termen, **a_n este al n -lea termen sau termenul de rang n .**

De exemplu: $1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$

1 4 9 16 25

Prin precizarea rangului unui termen cu ajutorul indicelui acestuia se stabilește o corespondență între mulțimea numerelor naturale nenule și mulțimea termenilor șirului. Această corespondență este dată de funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, unde $f(n) = a_n$.

Definiția 1. Se numește șir de elemente ale mulțimii nevide X o funcție $f: \mathbb{N}^* \rightarrow X$.

Astfel, putem spune că **un șir de numere reale este o funcție $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$.**

Cu alte cuvinte, un șir de numere reale reprezintă o succesiune de numere reale $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ realizată după o anumită regulă, fiecare număr ocupând un loc bine determinat.

Acesta se mai notează $(a_n)_n$ sau (a_n) .

Progresii aritmetice

• Definierea progresiei aritmetice

Definiție. Se numește progresie aritmetică un șir de numere reale în care fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din cel precedent prin adunarea aceluiași număr, numit rația progresiei aritmetice.

OBSERVAȚII.

1. Șirul $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ este progresie aritmetică dacă și numai dacă $a_{k+1} = a_k + r$, pentru orice număr natural nenul k , unde numărul r este rația progresiei aritmetice.
2. Șirul $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ este progresie aritmetică dacă și numai dacă $a_{k+1} - a_k = r$, pentru orice număr natural nenul k , unde numărul r este rația progresiei aritmetice.
3. Pentru a pune în evidență faptul că șirul $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ este progresie aritmetică scriem $\div a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.
4. Progresia aritmetică $(a_n)_n$ este complet determinată dacă se cunosc primul termen a_1 și rația r .

EXEMPLE:

1. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $a_1 = 12$ și $r = -\frac{1}{2}$. Atunci:

$$a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_2 = 12 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{23}{2};$$

$$a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 = \frac{23}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{22}{2} = 11;$$

$$a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 = 11 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{2}.$$

2. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $a_2 = 5$ și $a_3 = 11$. Atunci:

$$a_3 - a_2 = r \Rightarrow r = 11 - 5 \Rightarrow r = 6.$$

3. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $a_2 = 7$ și $a_4 = 15$. Atunci:

$$\left. \begin{array}{l} a_4 = a_3 + r = (a_2 + r) + r = a_2 + r + r = a_2 + 2r \\ a_4 = 15, a_2 = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 15 = 7 + 2r \Rightarrow r = 4.$$

• **Proprietățile progresiei aritmetice**

Teorema 1. Un șir de numere reale este progresie aritmetică dacă și numai dacă orice termen al său, începând cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini lui.

Altfel spus, șirul $(a_n)_n$ este progresie aritmetică dacă și numai dacă $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$.

Demonstrație: Șirul $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ este progresie aritmetică dacă și numai dacă $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$. (1)

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \Leftrightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ pentru orice număr natural } n, n \geq 2. (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că șirul $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ este progresie aritmetică dacă și numai dacă $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$.

OBSERVAȚII.

1. Proprietatea din teorema 1 justifică denumirea de progresie aritmetică.

2. Spunem că **numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt în progresie aritmetică dacă ele sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.**

EXEMPLU:

Să determinăm numărul real x pentru care numerele $4x - 5, 3x + 3, 2x^2 - 1$ sunt în progresie aritmetică.

$$\begin{aligned} \text{Numerele } 4x - 5, 3x + 3, 2x^2 - 1 \text{ sunt în progresie aritmetică} &\Leftrightarrow 3x + 3 = \frac{4x - 5 + 2x^2 - 1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6x + 6 = 2x^2 + 4x - 6 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 12 = 0 \mid : 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 3\}. \end{aligned}$$

• **Formula termenului general al unei progresii aritmetice**

Dacă într-o progresie aritmetică se cunosc primul termen și rația, se poate găsi o formulă care permite determinarea oricărui termen al progresiei în funcție de primul termen și de rație.

Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu rația r . Atunci, din definiția progresiei aritmetice, avem:

$$a_2 = a_1 + r;$$

$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r;$$

$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r;$$

$$a_5 = a_4 + r = (a_1 + 3r) + r = a_1 + 4r \text{ ș.a.m.d.}$$

Teorema 2. În orice progresie aritmetică $(a_n)_n$ cu rația r avem $a_n = a_1 + (n - 1)r$, pentru orice număr natural n .

Demonstrație:

Demonstrăm prin metoda inducției matematice că $a_n = a_1 + (n - 1)r$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $P(n): a_n = a_1 + (n - 1)r, n \in \mathbb{N}^*$.

– Verificăm faptul că propoziția $P(1)$ este adevărată:

$$P(1): a_1 = a_1 + (1 - 1)r \Rightarrow P(1) \text{ este adevărată.}$$

– Demonstrăm $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

$$P(k): a_k = a_1 + (k - 1)r, k \in \mathbb{N}^*$$

$$P(k + 1): a_{k+1} = a_1 + [(k + 1) - 1]r, k \in \mathbb{N}^*$$



Deci $P(k+1): a_{k+1} = a_1 + kr, k \in \mathbb{N}^*$.

$$a_{k+1} = a_k + r = a_1 + (k-1)r + r = a_1 + kr - r + r = a_1 + kr, (\forall) k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow P(k+1) \text{ este adevărată.}$$

Ambele etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sunt verificate. Așadar, propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n .

EXEMPLE:

1. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $a_1 = 5$ și rația $r = 3$. Atunci:

$$a_{41} = a_1 + (41-1)r \Rightarrow a_{41} = 5 + (41-1) \cdot 3 = 5 + 40 \cdot 3 = 125.$$

2. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $a_1 = 200$ și rația $r = -5$. Să determinăm rangul termenului care este egal cu 15.

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 15 = 200 + (n-1) \cdot (-5) \Leftrightarrow -185 = (n-1) \cdot (-5) \Leftrightarrow n-1 = 37 \Leftrightarrow n = 38.$$

Așadar, rangul termenului care este egal cu 15 este 38.

• Formula sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$. Notăm $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

Ne propunem să determinăm suma primilor opt termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$ cu $a_1 = 3$ și $r = 5$.

Prin calcul obținem: $a_1 = 3, a_2 = 8, a_3 = 13, a_4 = 18, a_5 = 23, a_6 = 28, a_7 = 33, a_8 = 38$.

Scriem suma acestor termeni de două ori: pe primul rând scriem termenii sumei în ordinea în care apar în sumă, iar pe al doilea rând îi scriem în ordine inversă. Obținem:

$$S_8 = 3 + 8 + 13 + 18 + 23 + 28 + 33 + 38$$

$$S_8 = 38 + 33 + 28 + 23 + 18 + 13 + 8 + 3$$

$$S_8 + S_8 = 41 + 41 + 41 + 41 + 41 + 41 + 41 + 41 \Leftrightarrow 2S_8 = 41 \cdot 8 \Leftrightarrow S_8 = \frac{41 \cdot 8}{2} \Leftrightarrow S_8 = 164.$$

Observăm că $a_1 + a_8 = a_2 + a_7 = a_3 + a_6 = a_4 + a_5$.

Plecând de la această observație se obține următorul rezultat:

Teorema 3. Dacă numerele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sunt în progresie aritmetică, atunci:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n, \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$$

Demonstrație:

Fie r rația progresiei aritmetice $a_1, a_2, \dots$. Atunci:

$$a_k = a_1 + (k-1)r, \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n; (1)$$

$$a_{n-k+1} = a_1 + (n-k+1-1)r = a_1 + (n-k)r, \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n. (2)$$

$$\text{Din (1) și (2) rezultă } a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)r + a_1 + (n-k)r = 2a_1 + (n-1)r, \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n. (3)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)r = 2a_1 + (n-1)r, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*. (4)$$

Din relațiile (3) și (4) obținem: $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$, pentru orice $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$.

Folosind această teoremă, vom determina formula pentru suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Folosind faptul că $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$ (conform teoremei 3), obținem:

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n), \text{ de unde rezultă } S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă ținem cont de relația (2), obținem: $S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)r] \cdot n}{2}, n \in \mathbb{N}^*.$

Teorema 4. Suma primilor n ($n \in \mathbb{N}^*$) termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$ este dată de formula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

EXEMPLE:

1. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $a_1 = 6$ și $a_2 = 13$. Să determinăm suma primilor 30 termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$.

Determinăm rația progresiei aritmetice $(a_n)_n$: $r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 13 - 6 = 7$.

Calculăm valoarea termenului a_{30} : $a_{30} = a_1 + (30 - 1)r \Rightarrow a_{30} = 6 + 29 \cdot 7 = 209$.

Aplicând formula pentru calculul sumei primilor n termeni obținem:

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2} = \frac{(6 + 209) \cdot 30}{2} = 3\,225.$$

2. Robert dorește să cumpere o pereche de căști care costă 390 de lei. El economisește în prima zi 5 lei, iar în fiecare dintre următoarele zile economisește cu 3 lei mai mult decât suma pe care a economisit-o în ziua anterioară. Să determinăm numărul de zile în care Robert reușește să economisească suma de bani necesară pentru achiziționarea căștilor.

Sumele de bani economisite de Robert zilnic sunt termenii unei progresii aritmetice $(a_n)_n$ cu $a_1 = 5$ și $r = 3$.

Dacă notăm cu n numărul de zile necesare pentru a economisi 390 de lei, atunci $S_n = 390$.

Aplicând formula pentru calculul sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

$\left(S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)r] \cdot n}{2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \right)$, obținem:

$$\frac{[2a_1 + (n-1)r] \cdot n}{2} = 390 \Leftrightarrow \frac{[2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 3] \cdot n}{2} = 390 \Leftrightarrow \frac{(10 + 3n - 3) \cdot n}{2} = 390 \Leftrightarrow \frac{(3n + 7) \cdot n}{2} = 390 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3n + 7) \cdot n = 780 \Leftrightarrow 3n^2 + 7n - 780 = 0$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-780) = 49 + 9\,360 = 9\,409$$

$$n_1 = \frac{-7 + \sqrt{9409}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 + 97}{6} = \frac{90}{6} = 15 \in \mathbb{N}$$

$$n_2 = \frac{-7 - \sqrt{9409}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 - 97}{6} = \frac{-104}{6} = -\frac{52}{3} \notin \mathbb{N}$$

Robert economisește suma de bani necesară achiziționării căștilor în 15 zile.



CONTEXTUALIZEZ

Dobânda simplă este utilizată frecvent în:

- împrumuturi pe termen scurt (mai puțin de un an);
- credite de consum sau credite bancare cu dobândă fixă anuală;
- calcule de rentabilitate pentru depozite bancare simple;
- tranzacții comerciale și calcule de actualizare a valorii banilor.

LUCRAȚI ÎN PERECHI!

Analizați modul în care schimbarea unui element (primul termen, rația sau numărul de termeni) modifică valorile unei progresii aritmetice.

Exerciții rezolvate



1. O societate comercială achiziționează un echipament tehnologic cu valoarea de intrare de 19 200 de lei. Durata de utilizare stabilită este de 8 ani.
- Calculează cota anuală de amortizare și valoarea amortizării lunare.
 - Identifică progresia aritmetică asociată activității descrise în enunț.
 - Care este valoarea contabilă netă (valoarea rămasă) a utilajului în al șaselea an de utilizare?
 - Construiește o diagramă în care să se observe valoarea contabilă netă pentru fiecare an.

Rezolvare:

a) Amortizarea liniară presupune repartizarea uniformă a valorii de intrare a unui produs (activ) pe parcursul duratei sale de utilizare.

Cota anuală de amortizare (Ca) se calculează după formula $Ca = \frac{100}{T} \%$, unde T este durata de utilizare stabilită. În cazul de față, cota de amortizare este $Ca = \frac{100}{8} \%$, adică $Ca = 12,5\%$. Valoarea amortizării anuale este 12,5% din valoarea de intrare, adică $\frac{12,5}{100} \cdot 19\,200 = 2\,400$ lei. Valoarea amortizării lunare este $\frac{1}{12}$ din valoarea amortizării anuale, adică $\frac{1}{12} \cdot 2\,400 = 200$ lei.

b) Modelăm acest proces prin progresia aritmetică $(a_n)_n$, unde a_n reprezintă valoarea contabilă (netă) a produsului în anul n de utilizare, iar $r = -2\,400$. În acest caz, a_1 reprezintă valoarea contabilă (netă) a produsului în primul an de utilizare, deci $a_1 = 19\,200$.

Atunci $a_n = 19\,200 + (n - 1)(-2\,400)$, $n \in \{1, 2, \dots, 8\}$.

c) $a_6 = 19\,200 - 2\,400 \cdot 5 \Rightarrow a_5 = 7\,200$.

d) Pentru construirea diagramei, avem nevoie de următorul tabel de date:

anul	1	2	3	4	5	6	7	8
valoarea	19 200	16 800	14 400	12 000	9 600	7 200	4 800	2 400

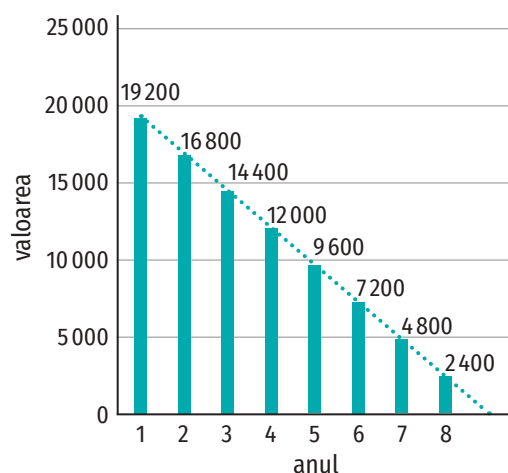


Figura 1

În figura 1 este reprezentată diagrama asociată datelor din tabel. Observăm că descreșterea este liniară.

2. Determină primul termen și rația progresiei aritmetice $(c_n)_n$ cu $c_5 = 23$ și $c_{13} = 7$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \begin{cases} c_5 = c_1 + 4r \\ c_{13} = c_1 + 12r \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 23 = c_1 + 4r \\ 7 = c_1 + 12r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 23 - 4r \\ c_1 = 7 - 12r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 23 - 4r \\ 23 - 4r = 7 - 12r \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 23 - 4r \\ 8r = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 23 - 4r \\ r = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 23 - 4 \cdot (-2) \\ r = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 31 \\ r = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

3. Demonstrează că șirul cu termenul general $a_n = 4n - 3$, $n \in \mathbb{N}^*$, este progresie aritmetică.

Rezolvare:

$$a_n = 4n - 3 \Rightarrow a_{n+1} = 4(n+1) - 3 \Rightarrow a_{n+1} = 4n + 1$$

$$a_{n+1} - a_n = 4n + 1 - (4n - 3) = 4n + 1 - 4n + 3 = 4$$

Cum $a_{n+1} - a_n = \text{constant}$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$, șirul $(a_n)_n$ este progresie aritmetică.

4. Suma primilor n ($n \in \mathbb{N}^*$) termeni ai unui șir $(a_n)_n$ este $S_n = \frac{3n(n-1)}{2}$.

a) Arată că șirul $(a_n)_n$ este progresie aritmetică.

b) Calculează $a_7 - a_2$.

Rezolvare:

$$a) S_n = \frac{3n(n-1)}{2} \Rightarrow S_{n+1} = \frac{3(n+1)[(n+1)-1]}{2} \Leftrightarrow S_{n+1} = \frac{3n(n+1)}{2} \quad (1)$$

$$\text{Deoarece } S_{n+1} = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}_{S_n} + a_{n+1} \Leftrightarrow a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \Leftrightarrow$$

$$a_{n+1} = \frac{3n(n+1)}{2} - \frac{3n(n-1)}{2} \Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{3n}{2} [(n+1) - (n-1)] \Leftrightarrow a_{n+1} = 3n, (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

$$a_{n+1} = 3n \Rightarrow a_n = a_{(n-1)+1} = 3(n-1) \Rightarrow a_n = 3(n-1), (\forall)n \in \mathbb{N}^*$$

Șirul $(a_n)_n$ este progresie aritmetică dacă și numai dacă diferența a doi termeni consecutivi este constantă. Calculăm diferența a doi termeni consecutivi:

$$a_{n+1} - a_n = 3n - 3(n-1) = 3, (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezultă că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică.

$$b) a_7 = 3 \cdot (7-1) = 18; a_2 = 3 \cdot (2-1) = 3 \Rightarrow a_7 - a_2 = 15$$

5. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $1 + 5 + 9 + 13 + \dots + x = 435$.

Rezolvare:

Observăm că termenii sumei din membrul stâng sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice $(a_n)_n$, unde $a_1 = 1$, $r = 4$, $a_n = x$ și $S_n = 1 + 5 + 9 + 13 + \dots + x$. (1)

Exprimând termenul general a_n în funcție de primul termen și rație, obținem:

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 3, (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{(1 + 4n - 3)n}{2} = \frac{4n^2 - 2n}{2} = 2n^2 - n \quad (2)$$

Înlocuind în ecuația inițială relațiile (1) și (2), obținem ecuația $2n^2 - n = 435$, care are soluțiile $n_1 = 15$ și $n_2 = -\frac{29}{2}$. Cum n e număr natural nenul, obținem $n = 15$, de unde rezultă că $a_{15} = x$.

$$a_n = 4n - 3, (\forall)n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_{15} = 4 \cdot 15 - 3 \Rightarrow a_{15} = 57$$

Așadar, $x = 57$.

PORTOFOLIU

Andrei dorește să își cumpere un laptop în valoare de 5 000 RON.

În acest moment, el are o sumă inițială de 1 200 RON și își propune să economisească o sumă fixă de bani la sfârșitul fiecărei luni.

Determină după câte luni va reuși Andrei să își cumpere laptopul și analizează impactul pe care îl are modificarea sumei economisite lunar asupra timpului de așteptare, comparând următoarele două scenarii:

- Scenariul A: Andrei economisește câte 300 RON pe lună.

- Scenariul B: Andrei își reduce din cheltuieli și reușește să economisească câte 500 RON pe lună.



ȘTIAI CĂ...?

Carl Friedrich Gauss

(1777-1855) a fost unul dintre cei mai mari oameni de știință germani.

Legenda spune că într-o zi, la școală, Gauss a făcut o șotie. Pentru acest lucru, a fost pedepsit să stea la colț, cu genunchii pe grăunțe, până aduna în minte numerele de la 1 la 100. Gauss a spus imediat rezultatul: 5 050. Întrebat cum a făcut calculele atât de repede, Gauss a răspuns:

„Am grupat termenii astfel:

$$\begin{array}{r} 1 + 100 = 101 \\ 2 + 99 = 101 \\ 3 + 98 = 101 \\ \hline 50 + 51 = 101 \end{array}$$

În total avem 101 de 50 de ori, adică 5 050”.

De fapt, elevul Gauss observase că numerele din sumă au proprietatea că suma termenilor aflați la distanțe egale de capetele șirului este aceeași.

Aplic

- Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu rația r și S_n suma primilor n termeni ai acesteia. Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.
 - Dacă $a_{10} = 45$ și $a_9 = 41$, atunci $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - Dacă $a_1 = 45$ și $r = -6$, atunci $a_6 = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - Dacă $a_1 = 4$ și $r = 9$, atunci $a_{10} = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - Dacă $a_4 = 12$ și $a_8 = 36$, atunci $r = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - Dacă $a_1 = 11$, $r = -0,5$ și $a_n = 1$, atunci $n = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - Dacă $a_1 = 2$, $r = 3$ și $S_n = 155$, atunci $n = \underline{\hspace{2cm}}$.
 - Dacă $S_n = 2n(n+1)$, atunci $r = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.
 - În progresia aritmetică $(a_n)_n$ avem $a_1 = -25$ și $r = 6$. Atunci:
 - $a_6 = 6$;
 - $a_6 = -55$;
 - $a_6 = 5$;
 - $a_6 = 9$.
 - În progresia aritmetică $(a_n)_n$ avem $a_1 = 30$ și $r = -3$. Atunci:
 - $a_6 = 6$;
 - $a_{10} = 6$;
 - $a_9 = 6$;
 - $a_8 = 6$.
 - În progresia aritmetică $(c_n)_n$ avem $c_7 + c_{11} = 11$. Atunci:
 - $c_1 + c_{17} = 22$;
 - $c_1 + c_{17} = 18$;
 - $c_1 + c_{17} = 16$;
 - $c_1 + c_{17} = 11$.
 - În progresia aritmetică $(d_n)_n$ avem $d_3 + d_4 + d_5 = 33$. Atunci:
 - $d_4 = 11$;
 - $d_4 = 22$;
 - $d_4 = 12$;
 - $d_4 = 14$.
 - Suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$ este $S_n = n(3n - 1)$. Atunci:
 - $a_n = n + 1, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$;
 - $a_n = 3n - 1, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$;
 - $a_n = 6n - 4, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$;
 - $a_n = 2n, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$.
- Determină primii cinci termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$, știind că:
 - $a_1 = 22$ și $r = -4$;
 - $a_1 = 10$ și $r = -\frac{4}{5}$;
 - $a_1 = 4$ și $a_2 - a_1 = -0,5$;
 - $a_4 = 1$ și $a_5 = -1$;
 - $a_1 = -7$ și $a_3 - a_2 = 4$;
 - $a_1 = -5$ și $a_6 = 5$;
 - $a_1 + a_2 = 4$ și $a_2 - a_1 = 2$;
 - $a_1 = -3$ și $a_{n+1} = a_n - 3$.
- Determină primii doi termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$, dacă:
 - $a_1, a_2, 10, 8, 6, \dots$;
 - $a_1, a_2, 5, \frac{16}{3}, \frac{17}{3}, \dots$;
 - $a_1, a_2, \sqrt{12}, \sqrt{27}, \sqrt{48}, \dots$.
- Determină primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_n$:
 - $a_{22} = 15$ și $r = -6$;
 - $a_{10} = 15$ și $a_{10} - a_9 = 4$;
 - $a_{51} = 15$ și $a_{12} - a_8 = 8$.
- Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ și S_n suma primilor n termeni ai acesteia. Determină formula termenului general al progresiei aritmetice $(a_n)_n$, știind că:
 - $a_1 = 7$ și $r = -2$;
 - $a_1 + a_2 = 7$ și $a_2 = 5$;
 - $a_4 - a_3 = \frac{1}{4}$ și $a_2 = 2$;
 - $a_{10} + a_{12} = 70$ și $a_3 - a_2 = 3$;
 - $a_{n+3} = 5n + 9, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$;
 - $a_{2n-3} = 8n - 15, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$;
 - $S_5 = 7$ și $a_1 = 7$;
 - $S_n = n^2, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$;
 - $S_{2n-1} = 4n^2 - 1, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

7. Determină primul termen și rația progresiei aritmetice $(a_n)_n$, știind că:
- $a_n = 4n - 5, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$;
 - $a_{18} = 15$ și $a_8 = -5$;
 - $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ și $a_4 + a_8 = 46$;
 - $a_2 + a_7 = 0$ și $a_3 - a_5 = 4$;
 - $a_3 + a_4 + a_5 = 33$ și $a_1 + a_7 + a_{10} = 45$;
 - $S_4 = 36$ și $S_{10} = 30$, unde S_n este suma primilor n termeni ai progresiei $(a_n)_n$;
 - $S_6 = 33$ și $a_4 + a_7 = 23$, unde S_n este suma primilor n termeni ai progresiei $(a_n)_n$.
8. Demonstrează că șirul $(a_n)_n$ este progresie aritmetică. Determină primul termen și rația.
- $a_n = 7n - 5, n \in \mathbb{N}^*$;
 - $a_n = 10 - 5n, n \in \mathbb{N}^*$;
 - $a_n = 4n - 7, n \in \mathbb{N}^*$.
9. Determină valorile numărului real x pentru care:
- 3, 1, $2x + 7$ sunt în progresie aritmetică;
 - $2x - 3$, $x + 1$, $x + 7$ sunt în progresie aritmetică;
 - $x + 1$, 4, $2x$ sunt în progresie aritmetică;
 - $x^2 - 3$, $x + 1$, $x + 3$ sunt în progresie aritmetică;
 - $x^2 - x - 1$, $x^2 - x + 1$, $x^2 + x + 1$ sunt în progresie aritmetică;
 - $x^2 - 7$, $2 - x^2$, $1 + x - x^2$ sunt în progresie aritmetică.
10. Calculează:
- $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 51$;
 - $2 + 7 + 12 + 17 + \dots + 102$;
 - $42 + 37 + 32 + 27 + \dots + (-23)$;
 - $7 + 10 + 13 + 16 + \dots + 100$;
 - $1 + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + \dots + 30$;
 - $100 + 97 + 94 + \dots + 1$.
11. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:
- $3 + 9 + 15 + 21 + \dots + x = 432$;
 - $(-15) + (-12) + (-9) + (-6) + \dots + x = 18$;
 - $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + x = 121$;
 - $7 + 10 + 13 + 16 + \dots + x = 205$.
12. Cât a fost capitalul inițial al unei operațiuni bancare dacă, după plasarea acestuia în regim de dobândă simplă pe o perioadă de 9 luni, cu rata dobânzii de 6%, s-a obținut un capital de 1 254 de lei?
13. O persoană depune la bancă 3 200 000 de lei în regim de dobândă simplă. După trei ani, în contul persoanei sunt 3 699 200 de lei. Care este rata dobânzii?
14. Un client depune la bancă suma de 80 000 de lei pe o durată de 9 luni, cu rata dobânzii de 3,6%, în regim de dobândă simplă.
- Ce sumă va avea clientul în cont la termenul scadent?
 - Cât ar trebui să dureze plasamentul, astfel încât clientul să aibă în cont 83 600 de lei la termenul scadent?

CONTEXTUALIZEZ

Progresiile aritmetice sunt modele matematice esențiale pentru descrierea fenomenelor cu variații constante. Acestea sunt utilizate în diverse domenii pentru predicții și analize.

• Economie și finanțe:

- dobânda simplă;
- amortizarea liniară, deprecierea activelor (de exemplu, utilaje, vehicule) cu o sumă fixă în fiecare an;
- anuități*, plata constantă a ratelor sau a contribuțiilor la fonduri de pensii, putând fi calculate folosind suma termenilor unei progresii.

• Construcții:

- aranjarea locurilor în stadioane sau amfiteatre, unde fiecare rând are cu un număr fix de scaune mai mult decât precedentul;
- treptele unei scări, construite astfel încât fiecare treaptă să aibă aceeași înălțime.

*anuitate = sumă de bani (incluzând o parte din capital și dobânda corespunzătoare) care se plătește periodic (de obicei anual) spre a rambursa un capital sau o datorie.



CONTEXTUALIZEZ

Progresiile aritmetice pot fi utilizate și în:

- **Antrenament**

- **sportiv și fitness:**

Sportivii folosesc adesea secvențe aritmetice pentru a-și structura programele de antrenament. De exemplu, creșterea numărului de repetări sau a greutății ridicate cu o cantitate fixă în fiecare săptămână urmează o progresie aritmetică, ajutând la îmbunătățirea treptată a condiției fizice și la prevenirea accidentărilor.

- **Medicină:**



administrarea unui tratament progresiv pentru adaptarea organismului la un medicament nou: introducerea tratamentului se face gradual – în prima zi se administrează o doză care conține o cantitate minimă de substanță activă, apoi se adaugă în fiecare zi aceeași cantitate de substanță activă până se ajunge la doza standard.

15. O sală de spectacole are 18 rânduri de scaune. Pe fiecare rând, începând cu al doilea, sunt cu două locuri mai multe decât pe rândul anterior. Pe rândul 10 sunt 33 de locuri.

a) Câte locuri are sala?

b) Biletele de pe rândurile 1 – 10 sunt de categoria I, biletele de pe următoarele cinci rânduri sunt de categoria a II-a, iar restul sunt de categoria a III-a. Un bilet de categoria I are prețul 200 de lei, un bilet de categoria a II-a costă 160 de lei, iar prețul unui bilet de categoria a III-a reprezintă 60% din prețul unui bilet de categoria I. Ce sumă se încasează la un spectacol unde s-au vândut toate biletele?

c) Înainte de începerea spectacolului, persoanele care au bilete se prezintă la intrare astfel: în primul minut vine un spectator, în al doilea minut vin trei spectatori, în al treilea minut vin cinci spectatori și așa mai departe. În câte minute se va umple sala?

16. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu termeni pozitivi, cu rația $r = 3$ și $a_1 a_2 a_3 a_4 = 880$. Determină primul termen al progresiei $(a_n)_n$.

17. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu termeni pozitivi, cu rația $r = 3$ și $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_9 a_{10}} = \frac{9}{28}$. Determină primul termen al progresiei $(a_n)_n$.

18. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu termeni pozitivi, cu $a_2 + a_4 = 14$ și $a_1 a_5 = 33$. Determină primul termen și rația progresiei $(a_n)_n$.

19. Demonstrează că următoarele numere nu pot fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice:

a) $2, \sqrt{6}, 2\sqrt{2}$; b) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{n+1}, n \in \mathbb{N}$; c) $\sqrt{n-2}, \sqrt{n}, \sqrt{n+2}, n \in \mathbb{N}, n > 1$.

20. Demonstrează că, dacă numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$ sunt în progresie aritmetică.

21. Demonstrează că numerele a^2, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă numerele $(b+c)^{-1}, (a+c)^{-1}, (a+b)^{-1}$ sunt în progresie aritmetică.

22. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu termeni strict pozitivi și rația r ($r \in \mathbb{R}, r > 0$). Demonstrează că:

a) $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}, n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_3 a_5} + \dots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{2n+1}}, n \in \mathbb{N}^*$;

c) $\frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \frac{1}{a_2 a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}} \right), n \in \mathbb{N}^*$;

d) $\frac{a_1 + a_2}{a_1^2 a_2^2} + \frac{a_2 + a_3}{a_2^2 a_3^2} + \dots + \frac{a_n + a_{n+1}}{a_n^2 a_{n+1}^2} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_{n+1}^2} \right), n \in \mathbb{N}^*$;

e) $a_1 + a_{1+k} + a_{1+2k} + \dots + a_{1+(n-1)k} = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)kr], n, k \in \mathbb{N}^*$;

f) $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_1}}{r}, n \in \mathbb{N}^*$.

2. Dobânda compusă. Progresii geometrice; determinarea termenului general al unei progresii geometrice; suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice

Descopăr



Maria depune la bancă, într-un cont de economii, suma de 15 000 de lei, pe o perioadă de 4 ani, cu o rată a dobânzii de 8% pe an. Pentru calculul dobânzii din al doilea an se ia în considerare nu numai suma inițială, ci și dobânda generată de aceasta în primul an. Pentru calculul dobânzii din al treilea an se ia în considerare suma inițială și dobânda generată în anii anteriori. Procedăm analog pentru a calcula dobânda în fiecare an. Notăm cu S_i soldul (suma pe care Maria o are în cont) la sfârșitul anului i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

- Care va fi valoarea dobânzii în fiecare an?
- Ce sumă va avea Maria în cont după fiecare din cei patru ani?
- Compară rapoartele $\frac{S_{i+1}}{S_i}$, pentru $i \in \{1, 2, 3\}$. Ce observi?
- Exprimă S_{i+1} în funcție de S_i , $i \in \{1, 2, 3\}$.



Învăț



Dobânda compusă

Știm din lecția anterioară că, atunci când se depune/împrumută o sumă de bani (numită capital inițial), cel care se folosește de acest capital trebuie să achite o sumă numită dobândă.

Dobânda calculată atât asupra capitalului inițial, cât și asupra dobânzii acumulate anterior se numește **dobândă compusă**. Aceasta rezultă din reinvestirea sau capitalizarea dobânzii care altfel ar fi fost încasată sau plătită.

În continuare ne propunem să determinăm dobânda compusă, generată de o sumă S în n ani, cu o rată anuală a dobânzii de $r\%$. În acest sens, analizăm în ce sumă se transformă în timp de n ani un capital S , dacă se știe că acesta generează dobândă compusă cu o rată a dobânzii de $r\%$ pe an.

Notăm cu S suma (capitalul) inițială, cu S_i suma (capitalul) existentă la sfârșitul anului și cu D_i dobânda încasată la sfârșitul anului i (aferentă anului i).

Avem:

$$\bullet D_1 = r\% \text{ din } S \Leftrightarrow D_1 = \frac{r}{100} \cdot S;$$

$$S_1 = S + D_1 = S + \frac{r}{100} \cdot S \Leftrightarrow S_1 = S \left(1 + \frac{r}{100}\right);$$

$$\bullet D_2 = r\% \text{ din } S_1 \Leftrightarrow D_2 = \frac{r}{100} \cdot S_1 \Leftrightarrow D_2 = \frac{r}{100} \cdot S \left(1 + \frac{r}{100}\right);$$

$$S_2 = S_1 + D_2 \Leftrightarrow S_2 = S \left(1 + \frac{r}{100}\right) + \frac{r}{100} \cdot S \left(1 + \frac{r}{100}\right) \Leftrightarrow S_2 = S \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2;$$

$$\begin{aligned} \bullet D_3 &= r\% \text{ din } S_2 \Leftrightarrow D_3 = \frac{r}{100} \cdot S_2 \Leftrightarrow D_3 = \frac{r}{100} \cdot S \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2; \\ S_3 &= S_2 + D_3 \Leftrightarrow S_3 = S \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 + \frac{r}{100} \cdot S \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 \Leftrightarrow S_3 = S \left(1 + \frac{r}{100}\right)^3; \end{aligned}$$

Din calculele anterioare deducem:

$$S_n = S \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n, n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

Demonstrăm prin inducție matematică formula (1).

$$\text{Fie } P(n): S_n = S \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*.$$

- Verificăm dacă propoziția $P(1)$ este adevărată:

$$P(1): S_1 = S \left(1 + \frac{r}{100}\right)^1$$

$$S_1 = S + D_1 = S + \frac{r}{100} \cdot S \Leftrightarrow S_1 = S \left(1 + \frac{r}{100}\right) \Rightarrow P(1) \text{ este adevărată.}$$

- Demonstrăm $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

$$P(k): S_k = S \left(1 + \frac{r}{100}\right)^k, k \in \mathbb{N}^*$$

$$P(k+1): S_{k+1} = S \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{k+1}, k \in \mathbb{N}^*$$

$$D_{k+1} = r\% \text{ din } S_k \Leftrightarrow D_{k+1} = \frac{r}{100} \cdot S_k \Leftrightarrow D_{k+1} = \frac{r}{100} \cdot S \left(1 + \frac{r}{100}\right)^k \quad (2)$$

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + D_{k+1} \Rightarrow S_{k+1} = S \left(1 + \frac{r}{100}\right)^k + \frac{r}{100} \cdot S \left(1 + \frac{r}{100}\right)^k \Rightarrow S_{k+1} = S \left(1 + \frac{r}{100}\right)^k \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_{k+1} = S \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

Ambele etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sunt verificate, prin urmare propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n .

OBSERVAȚIE.

$$S_n = S_{n-1} \left(1 + \frac{r}{100}\right), \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2.$$

Dacă notăm cu D_T dobânda totală după n ani, atunci:

$$D_T = D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_n \Leftrightarrow D_T = \frac{r}{100} \cdot S + \frac{r}{100} \cdot S_1 + \frac{r}{100} \cdot S_2 + \dots + \frac{r}{100} \cdot S_{n-1} \Leftrightarrow$$

$$D_T = \frac{r}{100} (S + S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1}) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} D_T = \frac{r}{100} \left[S + S \left(1 + \frac{r}{100}\right) + \dots + S \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-1} \right] \Leftrightarrow$$

$$D_T = \frac{r}{100} \cdot S \left[1 + \left(1 + \frac{r}{100}\right) + \dots + \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-1} \right]. \quad (3)$$

$$\text{Arătăm că } 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \text{ pentru orice număr real } x \neq 1. \quad (4)$$

Notăm $\alpha = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$ (i). Atunci $\alpha x = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ (ii).

Scăzând (i) din (ii) obținem:

$$\alpha x - \alpha = x^n - 1 \Rightarrow \alpha(x - 1) = x^n - 1 \Rightarrow \alpha = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

$$\text{Deci } 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \text{ pentru orice număr real } x \neq 1.$$



Aplicăm identitatea (4) pentru a calcula D_T și obținem:

$$1 + \left(1 + \frac{r}{100}\right) + \dots + \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-1} = \frac{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1}{1 + \frac{r}{100} - 1} \Leftrightarrow$$

$$1 + \left(1 + \frac{r}{100}\right) + \dots + \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-1} = \frac{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1}{\frac{r}{100}} \cdot (5)$$

Înlocuind relația (5) în relația (3), obținem $D_T = S \left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1 \right]$.

Pentru a calcula dobânda compusă pentru un capital inițial S , pe o perioadă de n ani, cu o rată a dobânzii de $r\%$ pe an, folosim formula $D_T = S \left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1 \right]$. (6)

EXEMPLE:

1. Ilie depune la bancă suma de 20 000 de lei, în regim de dobândă compusă, pe o perioadă de 4 ani, cu o rată a dobânzii de 5% pe an. Ce sumă va avea Ilie în cont la sfârșitul celor 4 ani?

Rezolvare:

Pentru calculul sumei totale folosim formula (1), unde $S = 20\,000$, $n = 4$ și $r = 5$.

$$S_4 = 20\,000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^4 \Leftrightarrow S_4 = 20\,000 \left(1 + \frac{1}{20}\right)^4 \Leftrightarrow S_4 = 20\,000 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_4 = 20\,000 \cdot \frac{194\,481}{160\,000} \Leftrightarrow S_4 = \frac{194\,481}{8} \Leftrightarrow S_4 = 24\,310,125.$$

Ilie va avea în cont, la sfârșitul celor 4 ani, suma de 24 310,125 lei.

2. Se constituie un depozit bancar de 100 000 de lei, în regim de dobândă compusă, pe o perioadă de 3 ani, cu o rată a dobânzii de 6% pe an. Ce dobândă se obține la termenul scadent?

Rezolvare:

Pentru calculul dobânzii totale folosim formula (6), unde $S = 100\,000$, $n = 3$ și $r = 6$.

$$D_T = 100\,000 \cdot \left[\left(1 + \frac{6}{100}\right)^3 - 1 \right] \Leftrightarrow D_T = 100\,000 \cdot \left[\left(1 + \frac{3}{50}\right)^3 - 1 \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D_T = 100\,000 \cdot \left[\left(\frac{53}{50}\right)^3 - 1 \right] \Leftrightarrow D_T = 100\,000 \cdot \frac{23\,877}{125\,000} \Leftrightarrow D_T = 19\,101,6.$$

La termenul scadent se obține dobânda totală de 19 101,60 lei.

3. Sorin depune la bancă suma de 300 000 lei, pe o perioadă de 5 ani, cu o rată a dobânzii de 10% pe an.

a) Ce dobândă primește Sorin în fiecare an, dacă plasamentul bancar este în regim dobândă simplă? Care este dobânda totală?

b) Ce dobândă primește în fiecare an, dacă plasamentul bancar este în regim dobândă compusă? Realizează o diagramă cu coloane prin care evidențiezi dobânda primită în fiecare an. Care este dobânda totală?

Rezolvare:

a) Dacă plasamentul bancar este în regim dobândă simplă, dobânda anuală este $\frac{10}{100} \cdot 300\,000 = 30\,000$ lei, iar dobânda totală este $5 \cdot 30\,000 = 150\,000$ lei.

b) Dacă plasamentul bancar este în regim dobândă compusă, atunci:

$D_k = \frac{r}{100} \cdot S \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{k-1}$, unde D_k este dobânda pentru anul k , $S = 300\,000$, $r = 10$. Pentru a realiza diagrama care reprezintă dobânda, elaborăm mai întâi următorul tabel:

Anul	1	2	3	4	5
Dobânda anuală (lei)	30 000	33 000	36 300	39 930	43 923

Diagrama din figura 1 reprezintă dobânda compusă pentru fiecare an.

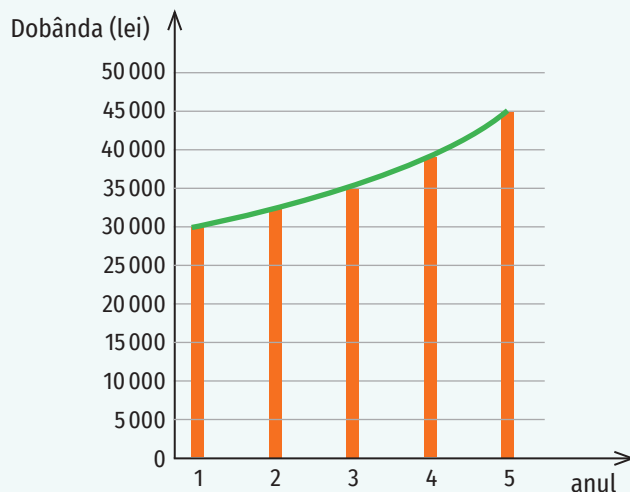


Figura 1

Dobânda totală este:

$$D_T = 300\,000 \left[\left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 - 1 \right] \Leftrightarrow D_T = 300\,000(1,1^5 - 1) \Leftrightarrow D_T = 300\,000 \cdot 0,61051 \Leftrightarrow D_T = 183\,153.$$

Progresii geometrice

• Definirea progresiei geometrice

Definiție. Se numește progresie geometrică un șir de numere în care fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din precedentul prin înmulțirea cu același număr, numit rația progresiei geometrice.

OBSERVAȚII.

1. Șirul $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ este progresie geometrică dacă și numai dacă $b_{k+1} = b_k \cdot q$, pentru orice număr natural nenul k , unde numărul q este rația progresiei geometrice.

2. Șirul $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, cu termeni nenuli, este progresie geometrică dacă și numai dacă $\frac{b_{k+1}}{b_k} = q$, pentru orice număr natural nenul k , unde numărul q este rația progresiei geometrice.

3. Pentru a pune în evidență faptul că șirul $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ este progresie geometrică scriem $\div b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$.

4. Progresia geometrică $(b_n)_n$ este complet determinată dacă se cunosc primul termen b_1 și rația q .

EXEMPLE:

1. Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu $b_1 = 24$ și $q = -\frac{1}{2}$. Atunci:

$$b_2 = b_1 \cdot q \Rightarrow b_2 = 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -12;$$

$$b_4 = b_3 \cdot q \Rightarrow b_4 = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3.$$

$$b_3 = b_2 \cdot q \Rightarrow b_3 = (-12) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 6;$$

2. Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu $b_3 = 45$ și $b_4 = 135$. Să determinăm primul termen și rația progresiei.

$$(b_n)_n \text{ este progresie geometrică. } \Rightarrow q = \frac{b_4}{b_3} \Rightarrow q = \frac{135}{45} \Rightarrow q = 3.$$

Cum $b_{k+1} = b_k \cdot q$, pentru orice număr natural nenul k , obținem:

$$b_3 = b_2 \cdot q \Rightarrow 45 = b_2 \cdot 3 \Rightarrow b_2 = 15;$$

$$b_2 = b_1 \cdot q \Rightarrow 15 = b_1 \cdot 3 \Rightarrow b_1 = 5.$$

Așadar, primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_n$ este 5, iar rația este 3.

• Proprietățile progresiei geometrice

Teorema 1. Un șir de numere reale pozitive este progresie geometrică dacă și numai dacă orice termen al său, începând cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini lui.

Altfel spus, șirul de numere pozitive $(b_n)_n$ este progresie geometrică dacă și numai dacă $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$.

Demonstrație:

Șirul cu termeni pozitivi $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ este progresie geometrică dacă și numai dacă $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n}{b_{n-1}}$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$. (1)

Cum $b_n > 0, (\forall)n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n}{b_{n-1}} \Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} \Leftrightarrow b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că șirul cu termeni pozitivi $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ este progresie geometrică dacă și numai dacă $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$.

OBSERVAȚIE.

Proprietatea din teorema 1 justifică denumirea de progresie geometrică.

Teorema 2. Șirul cu termeni nenuli $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ este progresie geometrică dacă și numai dacă $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$.

Într-adevăr, șirul cu termenii nenuli $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ este progresie geometrică dacă și numai dacă $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n}{b_{n-1}}$, pentru orice număr natural $n, n \geq 2$.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n}{b_{n-1}} \Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \text{ pentru orice număr natural } n, n \geq 2.$$

OBSERVAȚIE.

Spunem că numerele $b_1, b_2, \dots, b_n$ sunt în progresie geometrică dacă acestea sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

Atunci, conform teoremei 2, numerele x, y, z sunt în progresie geometrică dacă și numai dacă $y^2 = x \cdot z$.

EXEMPLE:

1. Să determinăm numărul real x pentru care numerele $x - 2, 6, x + 7$ sunt în progresie geometrică.

$$\begin{aligned} \text{Numerele } x - 2, 6, x + 7 \text{ sunt în progresie geometrică. } &\Leftrightarrow 6^2 = (x - 2)(x + 7) \Leftrightarrow 36 = x^2 + 5x - 14 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + 5x - 50 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-10, 5\} \end{aligned}$$

2. Numerele $x - 1, x, x + 2$ sunt în progresie geometrică. Să determinăm rația acestei progresii.

Numerele $x - 1, x, x + 2$ sunt în progresie geometrică. $\Leftrightarrow x^2 = (x - 1)(x + 2) \Leftrightarrow x^2 = x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Dacă $x = 2$, atunci numerele în progresie geometrică sunt 1, 2, 4. Rația unei progresii geometrice reprezintă raportul a doi termeni consecutivi, deci rația este 2.

• **Exprimarea termenului general al unei progresii geometrice în funcție de primul termen și de rație**

Dacă într-o progresie geometrică $(b_n)_n$ știm primul termen b_1 și rația q , putem deduce o formulă prin care să exprimăm orice termen în funcție de primul termen și de rație.

Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu rația q . Atunci, din definiția progresiei geometrice, avem:

$$b_2 = b_1 \cdot q;$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2;$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3;$$

$$b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 \cdot q^3) \cdot q = b_1 \cdot q^4 \text{ ș.a.m.d.}$$

Teorema 3. În orice progresie geometrică $(b_n)_n$ cu rația q ($q \neq 0$), avem $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, pentru orice număr natural nenul n .

Demonstrație:

Demonstrăm prin metoda inducției matematice că $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $P(n): b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$.

– Verificăm dacă propoziția $P(1)$ este adevărată:

$$P(1): b_1 = b_1 \cdot q^{1-1} \Rightarrow P(1) \text{ este adevărată.}$$

– Demonstrăm $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

$$P(k): b_k = b_1 \cdot q^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*$$

$$P(k+1): b_{k+1} = b_1 \cdot q^{(k+1)-1}, k \in \mathbb{N}^*$$

Deci $P(k+1): b_{k+1} = b_1 \cdot q^k, k \in \mathbb{N}^*$.

$$b_{k+1} = b_k \cdot q = (b_1 \cdot q^{k-1}) \cdot q = b_1 \cdot q^{(k-1)+1} = b_1 \cdot q^k \Rightarrow P(k+1) \text{ este adevărată.}$$

Ambele etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sunt verificate. Prin urmare, propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n .

EXEMPLU:

Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu $b_1 = 15 \cdot 3^{10}$ și rația $q = -\frac{1}{3}$. Să determinăm termenul b_{10} .

$$(b_n)_n \text{ este progresie geometrică.} \Rightarrow b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow b_{10} = b_1 \cdot q^{10-1} \Rightarrow$$

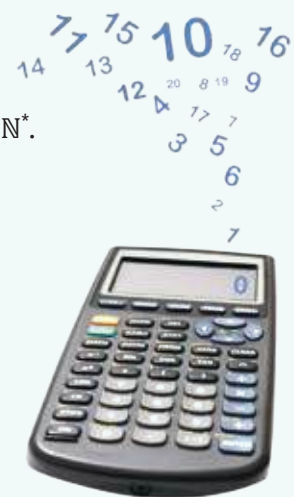
$$b_{10} = 15 \cdot 3^{10} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^9 = 15 \cdot 3^{10} \cdot \left(-\frac{1}{3^9}\right) = -15 \cdot 3^{10-9} = -45. \text{ Așadar, } b_{10} = -45.$$

Teorema 4. Fie numerele $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) în progresie geometrică. Atunci $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n$, pentru orice număr natural $k, k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Demonstrație:

i) $q \neq 0$

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \text{ sunt în progresie geometrică} \Rightarrow b_k = b_1 \cdot q^{k-1}, k \in \{1, 2, \dots, n\}. (1)$$



Atunci: $b_{n-k+1} = b_1 \cdot q^{(n-k+1)-1} \Leftrightarrow b_{n-k+1} = b_1 \cdot q^{n-k}$ (2) și $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. (3)

Din (1) și (2) obținem:

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = (b_1 \cdot q^{k-1}) \cdot (b_1 \cdot q^{n-k}) = b_1^2 \cdot q^{n-1}. \quad (4)$$

Calculând $b_1 \cdot b_n$ obținem: $b_1 \cdot b_n = b_1 \cdot (b_1 \cdot q^{n-1}) = b_1^2 \cdot q^{n-1}$. (5)

Din (4) și (5) rezultă că $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

ii) $q = 0 \Rightarrow b_n = 0$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2 \Rightarrow b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n$, $(\forall)k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$.

• **Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice**

Teorema 5. Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu rația q . Dacă notăm cu $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$, atunci:

$$S_n = \begin{cases} b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, & \text{dacă } q \neq 1 \\ n \cdot b_1, & \text{dacă } q = 1 \end{cases}$$

Demonstrație:

1. Dacă $q \neq 1$, atunci $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1}$. (1)

Înmulțind relația (1) cu q , obținem: $S_n \cdot q = b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \dots + b_1 q^n$. (2)

Scăzând membru cu membru egalitatea (1) din egalitatea (2), obținem:

$$S_n \cdot q - S_n = b_1 \cdot q^n - b_1 \Rightarrow S_n(q - 1) = b_1(q^n - 1).$$

Deoarece $q \neq 1$, obținem $S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

2. Dacă $q = 1$, atunci $b_k = b_1 \cdot 1^{k-1} = b_1$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, de unde rezultă:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = b_1 + b_1 + b_1 + \dots + b_1 = n \cdot b_1.$$

EXEMPLE:

1. Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu $b_1 = 3$ și $b_2 = -6$. Să determinăm suma primilor 10 termeni ai progresiei.

Determinăm rația progresiei geometrice: $q = \frac{b_2}{b_1} \Rightarrow q = \frac{-6}{3} = -2$ ($q \neq 1$).

Cum $q \neq 1$, aplicăm formula $S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ pentru $n = 10$ și obținem:

$$S_{10} = b_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 3 \cdot \frac{(-2)^{10} - 1}{-2 - 1} = 3 \cdot \frac{1024 - 1}{-3} = -1\,023.$$

2. Să se calculeze suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{128}$.

Numerele $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{128}$ sunt termeni consecutivi ai progresiei geometrice $(b_n)_n$ cu $b_1 = 1$ și $q = \frac{1}{2}$.

Observăm că suma se poate scrie $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^7$, deci $b_8 = \frac{1}{128}$.

Aplicând formula $S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ pentru $n = 8$, obținem:

$$S_8 = b_1 \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} \Rightarrow S_8 = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 \cdot \frac{\frac{1}{2^8} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = \frac{1 - 256}{-1} = \frac{255}{128}. \text{ Deci, } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{128} = \frac{255}{128}.$$

CONTEXTUALIZEZ

Progresiile geometrice sunt modele matematice fundamentale pentru descrierea fenomenelor în care variația (creșterea sau scăderea) se realizează prin multiplicarea cu un factor constant. Acestea sunt esențiale pentru înțelegerea proceselor cu evoluție rapidă.

• **Economie și finanțe:**– **Dobânda compusă:**

Reprezintă cel mai comun exemplu, în care suma acumulată crește exponențial, deoarece dobânda se aplică și asupra dobânzilor acumulate anterior.

– **Inflația:**

Creșterea prețurilor bunurilor și serviciilor cu un anumit procent anual este modelată printr-o progresie geometrică.

– **Investiții bursiere:**

Calculul valorii viitoare a portofoliilor care au o rată de creștere medie constantă se modelează printr-o progresie geometrică.

Exerciții rezolvate

1. Demonstrează că șirul $(b_n)_n$ cu termenul general $b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este progresie geometrică.

Rezolvare:

$$b_n = 4 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow b_{n+1} = 4 \cdot 3^{(n+1)-1} \Rightarrow b_{n+1} = 4 \cdot 3^n$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4 \cdot 3^n}{4 \cdot 3^{n-1}} = \frac{3^n}{3^{n-1}} = 3, (\forall)n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \text{Șirul cu termenul general } b_n = 4 \cdot 3^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*, \text{ este progresie geometrică.}$$

2. Demonstrează că șirul $(y_n)_n$, care are suma primilor n termeni $S_n = 3(2^n - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, este progresie geometrică, apoi determină primul termen și rația acestei progresii geometrice.

Rezolvare:

$$S_n = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n \Rightarrow S_{n+1} = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n+1} \Rightarrow y_{n+1} = S_{n+1} - S_n \quad (1)$$

$$\text{Deoarece } S_n = 3(2^n - 1) \Rightarrow S_{n+1} = 3(2^{n+1} - 1), \text{ atunci, conform (1),}$$

$$y_{n+1} = 3(2^{n+1} - 1) - 3(2^n - 1), \text{ de unde rezultă } y_{n+1} = 3 \cdot 2^n.$$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{3 \cdot 2^n}{3 \cdot 2^{n-1}} = 2, (\forall)n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \text{Șirul } (y_n)_n \text{ este progresie geometrică.}$$

$$\text{Din formula termenului general } y_n = 3 \cdot 2^{n-1}, (\forall)n \in \mathbb{N}^*, \text{ pentru } n = 1 \text{ obținem } y_1 = 3.$$

$$\text{Rația progresiei geometrice } (y_n)_n \text{ este } q = \frac{y_{n+1}}{y_n} = 2.$$

3. O minge de baschet cade de la o înălțime de 5,12 m. La fiecare contact cu podeaua din sală, mingea pierde energie, ridicându-se la 75% din înălțimea anterioară.

a) Identifică progresia geometrică asociată fenomenului descris în enunț.

b) De la ce înălțime (exprimată în cm) coboară mingea înainte de a atinge podeaua a cincea oară?

c) Realizează o diagramă cu coloane în care să illustrezi înălțimea la care urcă mingea după fiecare contact cu podeaua.

d) Determină distanța totală parcursă de minge din momentul în care este lăsată să cadă până la al patrulea contact cu podeaua.

Rezolvare:  

a) Exprimăm înălțimea de la care cade mingea în centimetri: 5,12 m = 512 cm.

$$\text{Știm că } 75\% \text{ din } x = \frac{75}{100} \cdot x = \frac{3}{4} \cdot x.$$

Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu primul termen $b_1 = 512$ și rația $q = \frac{3}{4}$, unde b_n reprezintă înălțimea de la care coboară mingea înainte de a atinge solul de n ori.

$$b) b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, (\forall)n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow b_5 = 512 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5-1} \Rightarrow b_5 = 2^9 \cdot \frac{3^4}{(2^2)^4} = 2 \cdot 3^4 = 162$$

Înainte de a atinge solul a cincea oară, mingea coboară de la înălțimea de 162 cm.

c) Realizăm tabelul cu valorile primilor termeni:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
b_n	512	384	288	216	162	121,5	91,125	68,34375

Diagrama care ilustrează înălțimea la care urcă mingea după fiecare contact cu podeaua este reprezentată în figura 2.

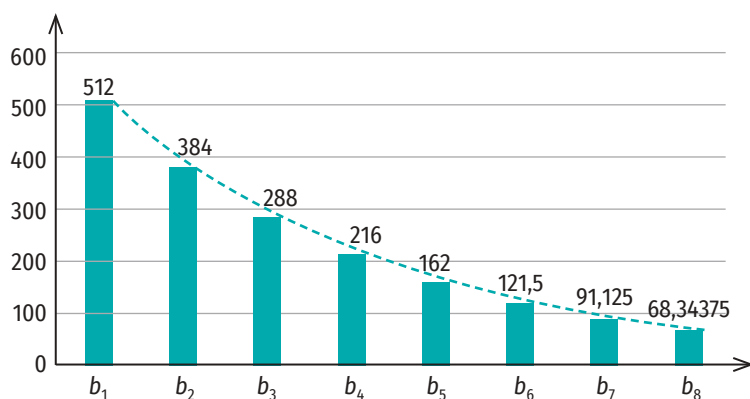


Figura 2

d) Notăm cu L distanța totală parcursă de minge din momentul în care este lăsată să cadă până la al patrulea contact cu podeaua.

$$L = b_1 + 2b_2 + 2b_3 + 2b_4 = 2S_4 - b_1 \quad (1)$$

$$S_4 = b_1 \cdot \frac{q^4 - 1}{q - 1} \Rightarrow S_4 = 512 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^4 - 1}{\frac{3}{4} - 1} \Rightarrow S_4 = 2^9 \cdot \frac{(2^2)^4 - 1}{\frac{3}{4} - 1} \Rightarrow S_4 = 2^9 \cdot \frac{3^4 - 2^8}{2^8} \cdot \frac{4}{3 - 4} \Rightarrow$$

$$S_4 = 8 \cdot \frac{81 - 256}{-1} \Rightarrow S_4 = 8 \cdot 175 \Rightarrow S_4 = 1\,400 \quad (2)$$

Înlocuind (2) în (1), obținem $L = 2 \cdot 1\,400 - 512 = 2\,800 - 512 = 2\,288$.

Deci $L = 2\,288 \text{ cm} = 22,88 \text{ m}$.

4. Într-o comunitate izolată, apare un virus gripal nou. În prima zi (generația 1), există două persoane infectate. Medicii observă că fiecare persoană bolnavă transmite virusul altor trei persoane sănătoase, în fiecare etapă de transmitere (o etapă durează 3 zile). Persoanele care au fost infectate nu pot fi reinfectate.

- Determină progresia geometrică prin care se modelează răspândirea virusului.
- Câte persoane noi vor fi infectate în a cincea etapă de transmitere?
- Care este numărul total de persoane care au fost infectate după cinci etape?

Rezolvare:

a) Fie $(b_n)_n$ progresia geometrică prin care se modelează răspândirea virusului în comunitate. Atunci $b_1 = 2$. Deoarece fiecare bolnav infectează alte trei persoane, numărul de cazuri noi se triplează la fiecare etapă. Prin urmare, rația progresiei geometrice este $q = 3$.

b) Numărul cazurilor noi în a cincea etapă reprezintă termenul b_5 al progresiei geometrice $(b_n)_n$.

Folosind formula termenului general $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, pentru $n = 5$, obținem $b_5 = b_1 \cdot q^{5-1}$, de unde rezultă $b_5 = 2 \cdot 3^{5-1} = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$.

Așadar, în a cincea etapă de transmitere au fost infectate 162 de persoane.

c) Pentru a afla câți oameni s-au îmbolnăvit în total, calculăm suma primilor 5 termeni ai progresiei geometrice, folosind formula $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, pentru $n = 5$:

$$S_5 = 2 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} \Rightarrow S_5 = 2 \cdot \frac{243 - 1}{2} \Rightarrow S_5 = 242.$$

Așadar, numărul total de persoane care au fost infectate după 5 etape este 242.

CONTEXTUALIZEZ

Progresiile geometrice pot fi utilizate și în:

• Biologie și medicină:

– **Diviziunea celulară:** Multiplicarea celulelor (de la una la două, apoi la patru, opt etc.) urmează o progresie geometrică având rația 2.

– **Răspândirea epidemiilor:** În fazele inițiale, numărul persoanelor infectate poate crește geometric, fiecare bolnav transmitând virusul, în medie, unui număr constant de persoane.

– **Timpul de înjumătățire a medicamentelor:** Procesul prin care concentrația unei substanțe în sânge scade la jumătate, la intervale regulate de timp.

• Tehnologie și fizică:

– **Legea lui Moore:** În industria microprocesoarelor, capacitatea de calcul a computerelor s-a dublat la aproximativ fiecare doi ani, formând o progresie geometrică.

– **Radioactivitatea:** Dezintegrarea atomilor unui element radioactiv în timp urmează o progresie geometrică.

PORTOFOLIU

Identifică și analizează situații din viața reală în care progresiile geometrice apar în domenii diferite de cele exemplificate.

Pentru fiecare domeniu:

- descrie o situație reală în care o mărime variază în timp;
- explică de ce această variație poate fi modelată printr-o progresie geometrică.

LUCRAȚI ÎN PERECHI!

Analizați modul în care schimbarea unui element (primul termen, rația sau numărul de termeni) modifică valorile unei progresii geometrice.

5. Calculează suma $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024}$.

Rezolvare:

Numerele $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{1024}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, cu primul termen egal cu 1 și rația egală cu $-\frac{1}{2}$. Fie $(b_n)_n$ această progresie. Atunci, $b_1 = 1, q = -\frac{1}{2}, b_{11} = \frac{1}{1024}$, deoarece:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Folosind formula $S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$, pentru $n = 11, b_1 = 1$ și $q = -\frac{1}{2}$, obținem:

$$S_{11} = 1 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{11} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow S_{11} = \frac{-\frac{1}{2^{11}} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow S_{11} = \frac{2^{11} + 1}{2^{11}} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow S_{11} = \frac{2^{11} + 1}{3 \cdot 2^{10}} \Rightarrow S_{11} = \frac{2049}{3072}.$$

Așadar, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024} = \frac{2049}{3072}$.

6. Fie $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ și $a \neq b$. Se consideră progresia geometrică $(y_n)_n$ cu $y_1 = a$ și rația $q = \frac{b}{a}$.

a) Calculează suma primilor n termeni ai progresiei geometrice $(y_n)_n$.

b) Demonstrează că $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$, pentru orice numere reale a și $b, a \neq 0$ și $a \neq b, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Rezolvare:

a) Pentru orice progresie geometrică $(b_n)_n$ cu rația $q \neq 1$, avem $S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Aplicând formula pentru progresia geometrică $(y_n)_n$ cu $y_1 = a$ și rația $q = \frac{b}{a}$, obținem:

$$S_n = a \cdot \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^n - 1}{\frac{b}{a} - 1} = a \cdot \frac{\frac{b^n - a^n}{a^n}}{\frac{b - a}{a}} = a \cdot \frac{a^n - b^n}{a^n} \cdot \frac{a}{a - b} = \frac{a^n - b^n}{a^{n-2}(a - b)}.$$

Așadar, $S_n = \frac{a^n - b^n}{a^{n-2}(a - b)} \cdot (1)$

b) Cum $(y_n)_n$ este progresie geometrică, avem $y_n = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} = \frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Atunci:

$$S_n = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n = a + b + \frac{b^2}{a} + \dots + \frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}. (2)$$

Din (1) și (2) obținem:

$$\frac{a^n - b^n}{a^{n-2}(a - b)} = a + b + \frac{b^2}{a} + \dots + \frac{b^{n-1}}{a^{n-2}} \mid \cdot a^{n-2} \Rightarrow$$

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1} \mid \cdot (a - b) \Rightarrow$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}), n \in \mathbb{N}, n \geq 2. (3)$$

OBSERVAȚIE.

Egalitatea (3) este valabilă și în cazul în care $a = b$ sau $a = 0$ sau $b = 0$, demonstrația fiind evidentă.

Aplic

1. Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu rația q și S_n suma primilor n termeni ai acesteia. Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate. 

- a) Dacă $b_2 = 12$ și $b_3 = 32$, atunci $b_1 = \underline{\hspace{2cm}}$.
 b) Dacă $b_1 = 162$ și $q = -\frac{1}{3}$, atunci $b_6 = \underline{\hspace{2cm}}$.
 c) Dacă $b_1 = 4$ și $q = -1$, atunci $b_{100} = \underline{\hspace{2cm}}$.
 d) Dacă $b_4 = 5$ și $b_7 = 40$, atunci $q = \underline{\hspace{2cm}}$.
 e) Dacă $b_1 = 243$, $q = 0,3$ și $b_n = 1$, atunci $n = \underline{\hspace{2cm}}$.
 f) Dacă $b_1 = 4$, $q = -3$ și $S_n = 244$, atunci $n = \underline{\hspace{2cm}}$.
 g) Dacă $b_n = \frac{1}{4} \cdot 3^{n-1}$, atunci $q = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

A. În progresia geometrică $(b_n)_n$ avem $b_1 = -3$ și $q = -2$. Atunci:

- a) $b_6 = -192$; b) $b_6 = -13$; c) $b_6 = -96$; d) $b_6 = 96$.

B. În progresia geometrică $(b_n)_n$ avem $b_1 = \frac{9}{16}$ și $b_2 = \frac{3}{8}$. Atunci:

- a) $b_3 = \frac{3}{4}$; b) $b_4 = \frac{1}{6}$; c) $b_4 = \frac{1}{8}$; d) $b_3 = \frac{9}{8}$.

C. În progresia geometrică $(c_n)_n$ avem $c_2 c_{11} = 11$. Atunci:

- a) $c_1 + c_{12} = 11$; b) $c_1 c_{12} = 11$; c) $c_5 c_7 = 11$; d) $c_6^2 = 11$.

D. În progresia geometrică $(d_n)_n$ avem $d_3 = 7$. Atunci:

- a) $d_2 d_4 = 7$; b) $d_2 d_4 = \sqrt{7}$; c) $d_2 d_4 = 49$; d) $d_2 + d_4 = 14$.

E. Suma primilor n termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_n$ este $S_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$. Atunci:

- a) $b_2 = 2$; b) $b_2 = \frac{3}{2}$; c) $b_2 = \frac{3}{4}$; d) $b_2 = \frac{9}{4}$.

3. Determină primii cinci termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)_n$:

- a) $b_1 = 2$ și $q = -3$; e) $b_1 = 5^5$ și $b_6 = 1$;
 b) $b_1 = 648$ și $q = \frac{1}{2}$; f) $b_1 + b_2 = \frac{3}{125}$ și $b_2 - b_1 = \frac{2}{125}$;
 c) $b_1 = 4$ și $b_2 - b_1 = 8$; g) $b_1 = -3$ și $b_{n+1} = -3b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
 d) $b_1 = 777$ și $\frac{b_3}{b_2} = 0,1$;

4. Arată că șirul $(a_n)_n$ este progresie geometrică. Determină primul termen și rația acesteia.

- a) $a_n = 4 \cdot 3^{n-2}$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$; b) $a_n = \frac{5}{2^{n-1}}$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

5. a) Determină numărul real x pentru care numerele 1, 3, $2x + 7$ sunt în progresie geometrică.

b) Determină numărul real x pentru care numerele 1, 4, $2x$ sunt în progresie geometrică.

c) Determină numărul real x pentru care numerele $x - 2$, $x - 1$, $x + 1$ sunt în progresie geometrică.

d) Determină numărul real x pentru care numerele $2x - 3$, 3, $4x + 1$ sunt în progresie geometrică.

PROVOCARE!

Stabilește dacă șirurile de mai jos sunt progresii. În caz afirmativ, precizează tipul progresiei și rația:

- a) 3, -3, 3, -3, 3, -3 ...;
 b) -5, 3, 11, 19, ...;
 c) 111, 100, 90, 81, 72, ...;
 d) 256, -128, 64, -32, 16, ...;
 e) 101, 105, 99, 93, ...;
 f) 1, 22, 333, 4444, ...;
 g) 3, -6, 12, -24, 48, ...;
 h) $a - 4$, $2a - 3$, $3a - 2$, $4a - 1$, ... ($a \in \mathbb{R}$);
 i) $12 - 8\sqrt{2}$, $11 - 7\sqrt{2}$, $10 - 6\sqrt{2}$, $9 - 5\sqrt{2}$, ...;
 j) $1 - \sqrt{2}$, $3 - 2\sqrt{2}$, $7 - 5\sqrt{2}$, $17 - 12\sqrt{2}$, ...



ȘTIAI CĂ...?

Pentru a oferi servicii atractive, băncile propun propun clienților constituirea unor depozite depozite prin care dobânda se adaugă la cont lunar, trimestrial, semestrial sau anual. Capitalizarea se poate face mai devreme. Acest fapt este stipulat în contract.

EXERSEAZĂ!

Maria dorește să plaseze suma inițială de 20 000 RON într-un depozit bancar, cu dobândă compusă, pentru o perioadă de 5 ani. Calculează valoarea finală a economiilor Mariei după cei 5 ani și analizează impactul pe care îl are alegerea unei rate a dobânzii mai avantajoase asupra câștigului final, comparând următoarele două scenarii reale din piață:

- Scenariul A: O bancă comercială oferă o dobândă compusă de 5,5% pe an.
- Scenariul B: Maria alege o ofertă promoțională care prin care primește o dobândă compusă de 7% pe an.

6. Determină valorile numărului real x pentru care următoarele numere sunt în progresie geometrică:

a) $1, 3, 2x + 7$; c) $2x - 3, 3, 4x + 1$; e) $x^2 - \sqrt{3}, \sqrt{2}x, x^2 + \sqrt{3}$;
b) $x - 2, x - 1, x + 1$; d) $5 - x^2, x, x^2$; f) $\frac{2}{2x+1}, 1, \frac{2x+1}{x+1}$.

7. Determină suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, știind că suma primilor doi termeni este egală cu 9, iar diferența dintre al doilea termen și primul termen este egală cu 3.

8. Calculează:

a) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{10}$;
b) $1 - 2 + 4 - 8 + \dots + 1\,024$;
c) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots - \frac{1}{3^9}$;
d) $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left((\sqrt{2})^2 + \frac{1}{(\sqrt{2})^2}\right)^2 + \left((\sqrt{2})^3 + \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\right)^2 + \dots + \left((\sqrt{2})^n + \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\right)^2$;
e) $9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{9999999\dots 9}_{\text{de } 2\,026 \text{ de ori } 9}$.

9. Rezolvă ecuațiile în mulțimea numerelor reale:

a) $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{11} = 0$; c) $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 = 0$;
b) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^9 = 0$; d) $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{32} = 0$.

10. Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu rația q ($q \neq \pm 1$).

a) Demonstrează că $(b_k^{-1} + b_{k+1}^{-1})^{-1} = \frac{1}{q+1} b_{k+1}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

- b) Demonstrează că:

i) $(1^{-1} + 2^{-1})^{-1} + (2^{-1} + 2^{-2})^{-1} + (2^{-2} + 2^{-3})^{-1} + \dots + (2^{-99} + 2^{-100})^{-1} = \frac{2(2^{100} - 1)}{3}$;

ii) $\frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}} + \dots + \frac{1}{\frac{1}{2^{44}\sqrt{2}} + \frac{1}{2^{45}}} = \sqrt{2}(2^{45} - 1)$.

11. Determină primul termen și rația progresiei geometrice $(b_n)_n$ știind că:

a) $b_2 + b_1 = 8$ și $b_2 - b_1 = 4$;
b) $b_1 + b_2 + b_3 = 3$ și $b_2 + b_3 + b_4 = -6$;
c) $b_5 - b_4 = 48$ și $b_4 - b_2 = 36$;
d) $\frac{b_1}{b_3} = 0,25$ și $S_8 = 225$, unde S_n reprezintă suma primilor n termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_n$;
e) $b_2 - b_4 + b_5 = 22$ și $b_1 - b_3 + b_4 = -11$.

12. Fie șirurile $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$, unde $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 2}$ și $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determină a_1 , a_2 și a_3 .
b) Arată că $b_2^2 = b_1 b_3$.
c) Demonstrează că șirul $(b_n)_n$ este progresie geometrică.
d) Demonstrează că $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n \leq 0,75$, pentru orice număr natural nenul n .

- ## POT MAI MULT

Se va ține cont că
dobânda acumulată
se impozitează cu
10% anual.

INDICATIE*:

Pentru calcul poți folosi aplicația *Calculator* de pe telefonul mobil, tabletă sau computer. Aproximează suma la numere întregi.



Studiu de caz

Jocul de șah a apărut în Gupta (pe teritoriul actual al Indiei), în jurul secolului VI d.H., unde se numea „chaturanga” (cuvânt sanscrit care desemna o formațiune de luptă), referindu-se la cele patru ramuri ale armatei indiene: elefanți, cavalerie, care de luptă și infanterie. Din India, jocul a ajuns în Imperiul Sasanid (Persia), unde a fost numit „chatrang”, apoi „shatranj”.

Legenda spune că inventatorul i-a prezentat regelui Imperiului Sasanid jocul de șah. Regele a fost deosebit de încântat de acest joc și a vrut să-l răsplătească pe inventator din plin. Modest, el a refuzat inițial răsplata, dar apoi, la insistențele regelui, a cerut o răsplată aparent neînsemnată: boabe de grâu după următoarea regulă – un bob pentru primul pătrat al tablei de șah, două boabe pentru al doilea, patru pentru al treilea, opt pentru al patrulea și așa mai departe. Regele a considerat că solicitarea era neînsemnată, însă în scurt timp a realizat că inventatorul cerea, de fapt, o răsplată surprinzător de mare.

Pentru a afla dacă ar fi fost posibil ca regele să onoreze plata și alte curiozități, vei parcurge următoarele etape:

Etapa 1 – Progresia geometrică

1. Identifică progresia geometrică prin care poate fi modelată situația descrisă în enunț.
2. Determină suma primilor 64 de termeni ai progresiei (numărul de boabe de grâu cerute de inventator).

Etapa 2 – Inteligența artificială în acțiune

3. Folosind IA (inteligența artificială), determină numărul mediu de boabe de grâu dintr-un kilogram de grâu la culturile din prezent, la culturile de acum 100 de ani, respectiv la culturile din secolul al VII-lea d.H.
4. Transformă numărul boabelor de grâu aflate la punctul 2 în tone (ținând cont de numărul mediu de boabe dintr-un kilogram în secolul al VII-lea d.H.).

Etapa 3 – Istorie sau legendă?

5. Documentează-te privind granițele Imperiului Sasanid din acea perioadă, apoi identifică statele actuale aflate pe teritoriul fostului imperiu.
6. Folosind resurse digitale (enciclopedii online, hărți sau IA), caută care este producția anuală de grâu ce se recoltează astăzi în fiecare stat identificat la punctul 5.

Etapa 4 – Analiza rezultatelor

7. Folosind IA, află de câte ori a crescut producția mondială de grâu față de cea din anii 1900, respectiv față de cea din anii 600 d.H.
8. Ținând cont de punctul 7, estimează care era producția anuală de grâu a Imperiului Sasanid.
9. Află în câți ani l-ar fi putut răsplăti regele pe inventator.

Observație: Când regele a aflat că întreaga recoltă a lumii, strânsă timp de sute de ani, nu ar fi fost de ajuns pentru a umple tabla, a înțeles că inventatorul era un maestru al minții. Această legendă a rămas peste veacuri drept „problema boabelor de grâu”, simbol al creșterii exponențiale.



Exerciții recapitulative

- Un pacient aflat în recuperare medicală trebuie să meargă în prima zi 500 de pași. Medicul îi recomandă să crească distanța cu 150 de pași în fiecare zi. Pacientul este considerat recuperat atunci când ajunge să parcurgă 5 000 de pași zilnic. După câte zile se recuperează pacientul?
- Pavel a depus la bancă suma de 20 000 €, în regim de dobândă compusă pe o perioadă de 5 ani, cu o rată a dobânzii de 8% pe an. Ce sumă va încasa la sfârșitul perioadei?
- Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $a_1 = 5$ și $a_3 = 17$.
 - Determină termenii a_2 , a_4 și a_{25} .
 - Verifică dacă numărul 533 este termen al progresiei aritmetice $(a_n)_n$.
 - Calculează suma primilor 25 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$.
- Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu $b_1 = 5$ și $b_4 = -40$.
 - Determină termenii b_2 , b_3 și b_5 .
 - Calculează suma primilor 10 termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_n$.
- Demonstrează că șirul cu termenul general $x_n = 4 - 3n$, $n \in \mathbb{N}^*$, este progresie aritmetică. Determină primul termen și rația acestei progresii.
- Demonstrează că șirul cu termenul general $y_n = 3 \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, este progresie geometrică. Determină primul termen și rația acestei progresii.
- Determină formula termenului general al progresiei aritmetice $(a_n)_n$ cu $a_7 - a_5 = 6$ și $a_5 = 8$.
- Determină formula termenului general al progresiei geometrice $(b_n)_n$ cu $\frac{b_4}{b_1} = 8$ și $b_2 = 6$.
- Determină numărul real x pentru care numerele $2x - 7$, 4 , $2x + 3$ sunt în progresie aritmetică.
- Determină numărul real x pentru care numerele $x - 8$, $x - 4$, $x + 8$ sunt în progresie geometrică.
- Calculează sumele:
 - $29 + 26 + 23 + \dots + 5$;
 - $1 - 2 + 4 - 8 + \dots + 256$.
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:
 - $1 + 5 + 9 + 13 + \dots + x = 496$;
 - $1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + x = 612$.
- Numerele reale a , b și c sunt în progresie aritmetică, iar numerele a , $b - 1$ și c sunt în progresie geometrică. Determină numerele a , b și c , știind că suma lor este 15.
- Numerele reale x , y și z sunt în progresie geometrică, iar numerele $x - 1$, $y + 1$ și z sunt în progresie aritmetică. Determină suma pătratelor numerelor x , y și z , știind că produsul lor este 216.
- Arată că, pentru orice număr real x , numerele $x + 1$, $x + 2$ și $x + 3$ nu pot fi în progresie geometrică.
- Determină primul termen și rația progresiei aritmetice $(a_n)_n$.
 - $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = -2 \\ a_4 = 18 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_2 = 5 \\ S_5 = 5 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_5 - a_1 = 2 \\ a_3 = 3 \end{cases}$
- Determină primul termen și rația progresiei geometrice $(b_n)_n$.
 - $\begin{cases} b_1 + b_2 = 8 \\ 3b_1 = b_2 \end{cases}$
 - $\begin{cases} S_3 = -3 \\ b_1 = -1 \end{cases}$
 - $\begin{cases} \frac{b_4}{b_1} = \frac{1}{8} \\ b_2 - b_3 = 2 \end{cases}$
- Calculează suma primilor 25 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$ știind că $a_7 + a_{14} + a_{18} = 99$.
- Câte submulțimi cu 500 de elemente în progresie aritmetică are mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 1\,000\}$?
- Câte submulțimi cu 8 elemente în progresie geometrică are mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 1\,000\}$?

Timp de lucru: 45 de minute

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I

30 de puncte

30 de puncte	1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.
(10 p.)	A. Fie $(x_n)_n$ un șir cu termenul general $x_n = \frac{n^2 + 1}{n + 2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Numărul natural 2 este termenul de rang k al șirului $(x_n)_n$. Atunci: a) $k = -1$; b) $k = 2$; c) $k = 3$; d) $k = 4$.
(10 p.)	B. Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu rația q , $b_5 = 48$ și $b_2 = 6$. Atunci $b_1 + q$ este egal cu: a) 6; b) 9; c) 8; d) 5.
(10 p.)	C. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $S_5 = 15$ (S_n reprezintă suma primilor n termeni). Atunci a_3 este egal cu: a) 5; b) 2; c) -1; d) 3.

Subiectul al II-lea

60 de puncte

Scrie rezolvările complete.

60 de puncte	1. Laurențiu depune la bancă suma de 12 000 de lei în regim de dobândă simplă, pe o perioadă de 9 luni, cu rata anuală a dobânzii de 6%. Care este valoarea capitalului la sfârșitul celor 9 luni?
(10 p.)	2. Determină numărul real nenul x pentru care numerele 1, $x + 1$ și $2x^2 + 1$ sunt în progresie geometrică.
(15 p.)	3. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu termeni raționali, care are rația $r = 2$ și $a_1 a_2 a_3 a_4 = -15$. Determină primul termen al progresiei $(a_n)_n$.
(15 p.)	4. Fie progresia geometrică $(b_n)_n$ cu $b_1 + b_2 + b_3 = 9$ și $b_3 - b_1 = 9$.
(10 p.)	a) Determină primul termen și rația progresiei $(b_n)_n$.
(10 p.)	b) Determină numărul natural nenul n pentru care $S_n = 1 - 2^{10}$.

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din această unitate.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	5 foarte bine	4 bine	3 mediu	2 slab	1 foarte slab
Mi-a fost ușor să rezolv exercițiile.					
Am înțeles criteriile de rezolvare.					
Mi-am amintit conținuturile învățate.					

Geometrie analitică

- ▶ 1. Reper cartezian în plan; coordonatele carteziene ale unui punct din plan, distanța dintre două puncte în plan, coordonatele mijlocului unui segment
- ▶ 2. Panta unei drepte (ca raport)
- ▶ 3. Ecuația dreptei care trece printr-un punct dat și are panta dată, ecuația dreptei care trece prin două puncte; intersecțiile dreptei cu axele de coordonate
- ▶ 4. Pozițiile relative ale unei drepte față de axele de coordonate; pozițiile relative a două drepte
- ▶ 5. Ecuația cercului



1. Reper cartezian în plan; coordonatele carteziene ale unui punct din plan, distanța dintre două puncte în plan, coordonatele mijlocului unui segment

Îmi amintesc

Elevii vor lucra în perechi.

Pe harta unui parc a fost trasat un reper cartezian xOy , în care au fost marcate punctele A, B, C, D, E, F, G, H, I, J și K corespunzătoare unor obiective din teren (figura 1). Unei unități de măsură din reperul cartezian xOy îi corespunde în teren o distanță de 24 de metri.

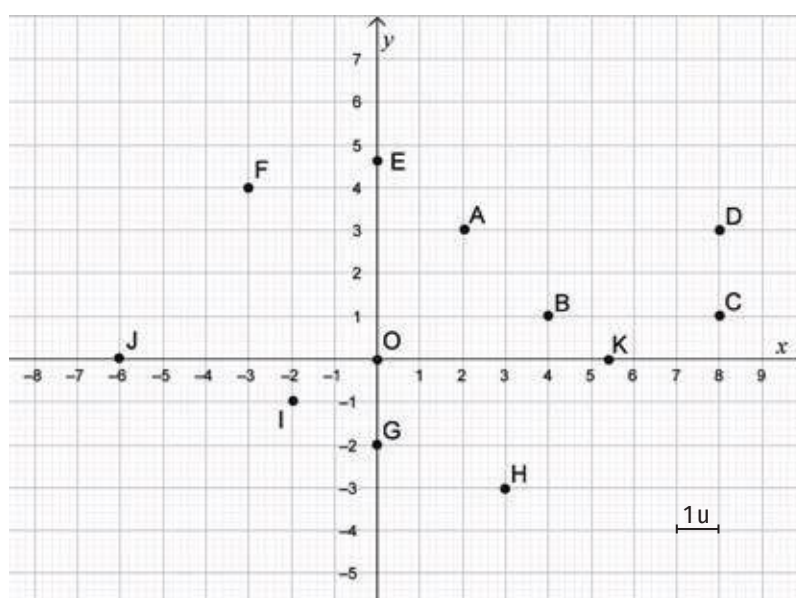


Figura 1

- Scrie în caiet coordonatele punctelor care aparțin axei Ox .
- Identifică punctele care aparțin axei Oy și scrie în caiet coordonatele acestora.
- Câte dintre punctele reprezentate se află în cadranul I? Scrie coordonatele acestora.
- Scrie coordonatele punctelor F, H și I.
- Scrie coordonatele a două puncte care au aceeași abscisă.
- Scrie coordonatele a două puncte care au aceeași ordonată.
- Precizează natura patrulaterului ABCD.
- Determină suprafața terenului delimitat de patrulaterul ABCD.
- Determină lungimea gardului ce împrejmuiește terenul delimitat de patrulaterul ABCD.
- Florin se află în punctul J, iar Jean se află în punctul F. Ei decid să se întâlnească exact la jumătatea drumului. Care sunt coordonatele punctului de întâlnire? Câți metri a parcurs fiecare?
- Reprezintă în reperul cartezian xOy punctele $M(-3, 5)$, $N(6, 4; 0)$, $P(2, -5)$, $Q(-1, -3)$ și $R(8, -4)$.

Învăț

Definiție. Se numește reper cartezian în plan (sistem de axe ortogonale în plan sau sistem de coordonate în plan) o pereche ordonată de două axe perpendiculare care au aceeași origine (figura 2). Acesta se notează xOy .

Originea comună a celor două axe se numește **originea reperului cartezian** sau **originea sistemului de axe** și se notează, de regulă, cu O .

Axa orizontală se notează cu Ox și se numește **axa absciselor**. Sensul de parcurgere este de la stânga la dreapta.

Axa verticală se notează cu Oy și se numește **axa ordonatelor**. Sensul de parcurgere este de jos în sus.

Pe cele două axe Ox și Oy ale reperului cartezian xOy se folosește aceeași unitate de măsură.

Folosind un reper cartezian în plan, oricărei perechi de numere (a, b) care aparține produsului cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ îi asociem un unic punct din plan, și reciproc, oricărui punct din plan îi corespunde o unică pereche de numere (a, b) , care aparține produsului cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ și care reprezintă coordonatele punctului M . Scriem $M(a, b)$ și citim „punctul M de coordonate a și b ” (figura 3). Coordonatele punctului M se mai notează x_M , respectiv y_M , caz în care scriem $M(x_M, y_M)$.

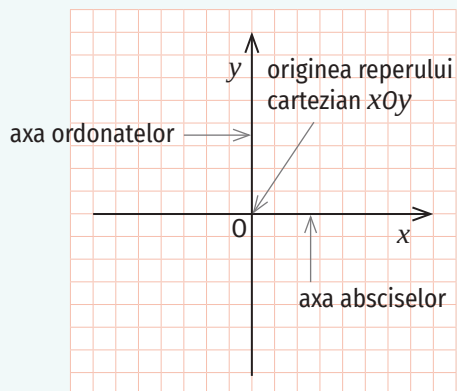


Figura 2

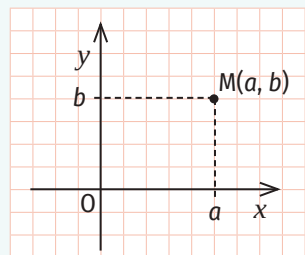


Figura 3

OBSERVAȚII.

1. Reperul cartezian xOy împarte planul în patru părți numite **cadrane** (figura 4).
2. Punctele care se află pe axa Ox au ordonata 0.
3. Punctele care se află pe axa Oy au abscisa 0.

Teorema 1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$. Distanța dintre punctele A și B este

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Demonstrație:

Dacă C este punctul de intersecție a paralelei prin punctul A la axa Ox cu paralela prin punctul B la axa Oy , atunci $C(x_B, y_A)$ (figura 5).

$$\left. \begin{array}{l} Ox \perp Oy \\ AC \parallel Ox \\ BC \parallel Oy \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp BC \Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$$

Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle ACB$ ($\angle C = 90^\circ$) și obținem:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2. (1)$$

$$AC = |x_B - x_A| \Rightarrow AC^2 = |x_B - x_A|^2 = (x_B - x_A)^2 (2)$$

$$BC = |y_B - y_A| \Rightarrow BC^2 = |y_B - y_A|^2 = (y_B - y_A)^2 (3)$$

Din (1), (2) și (3) rezultă $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$, deci

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

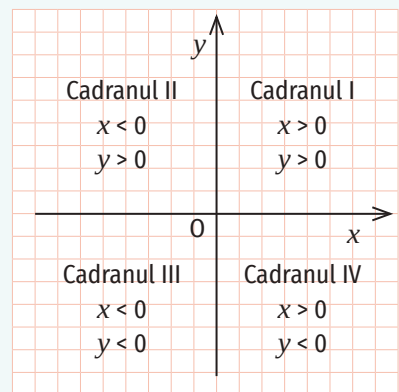


Figura 4

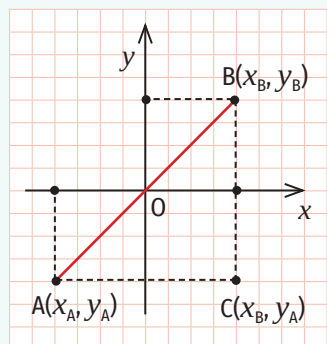


Figura 5

EXEMPLU:

În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-2, 3)$ și $N(2, 0)$. Distanța dintre punctele M și N este:

$$MN = \sqrt{[2 - (-2)]^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

Teorema 2. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ și $M(x_M, y_M)$. Punctul M este mijlocul segmentului AB dacă și numai dacă $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ și $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Demonstrație:

Presupunem că punctul $M(x_M, y_M)$ este mijlocul segmentului AB . Fie $A_1(x_A, 0)$, $B_1(x_B, 0)$ și $M_1(x_M, 0)$ proiecțiile punctelor A , B și M pe axa Ox (figura 6). Atunci, $AA_1 \perp Ox$, $BB_1 \perp Ox$ și $MM_1 \perp Ox$, de unde rezultă $AA_1 \parallel BB_1 \parallel MM_1$.

Dreptele paralele AA_1 , BB_1 și MM_1 determină pe secanta AB segmente congruente AM și MB . Conform teoremei paralelelor echidistante, acestea determină și pe secanta A_1B_1 segmente congruente A_1M_1 și M_1B_1 , deci M_1 este mijlocul segmentului A_1B_1 .

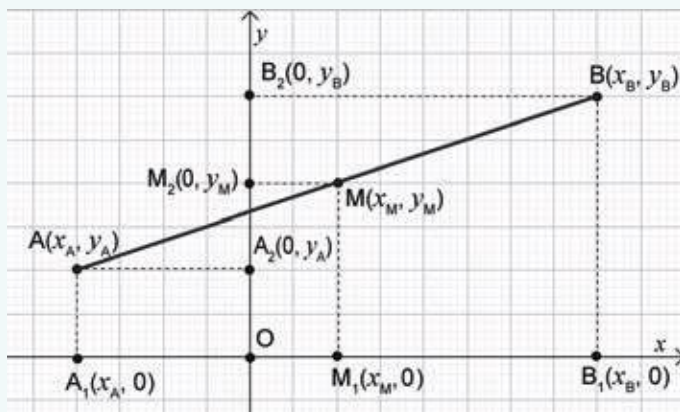


Figura 6

Știm din clasele anterioare că, dacă două puncte $E(x_E)$ și $F(x_F)$ aparțin axei numerelor reale, atunci punctul N , mijlocul segmentului EF , are coordonata $x_N = \frac{x_E + x_F}{2}$. De aici rezultă că $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$. (1)

Analog, dacă $A_2(0, y_A)$, $B_2(0, y_B)$, $M_2(0, y_M)$ sunt proiecțiile punctelor A , B și M pe axa Oy , atunci punctul M_2 este mijlocul segmentului A_2B_2 , deci $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$. (2)

Așadar, dacă punctul M este mijlocul segmentului AB , atunci conform (1) și (2), avem:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ și } y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Reciproc, considerăm punctele $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ și $M(x_M, y_M)$, unde $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ și $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Calculăm lungimile segmentelor AB , AM și MB :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_A + x_B}{2} - x_A\right)^2 + \left(\frac{y_A + y_B}{2} - y_A\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_B - x_A}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_B - y_A}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \frac{1}{2} AB; \quad (4) \end{aligned}$$

Analog,

$$\begin{aligned} MB &= \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2} = \sqrt{\left(x_B - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(y_B - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_B - x_A}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_B - y_A}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \frac{1}{2} AB. \quad (5) \end{aligned}$$

Din (3), (4) și (5) obținem $AM = MB$ și $AM + MB = AB$, de unde rezultă că punctul M este mijlocul segmentului AB .

EXEMPLU:

În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(-1, 5)$ și $Q(-3, -7)$. Coordonatele mijlocului segmentului PQ sunt $\left(\frac{-1 + (-3)}{2}, \frac{5 + (-7)}{2}\right)$, adică $(-2, -1)$.

Exercițiu rezolvat



În reperul cartezian xOy din figura 7 sunt reprezentate punctele A, B, C, F și G.

- Determină coordonatele punctelor A, B, C, F și G.
- Determină coordonatele punctului D, astfel încât patrulaterul ABCD să fie paralelogram.
- Demonstrează că triunghiul ABF este dreptunghic isoscel.
- Determină coordonatele punctului P care aparține axei Ox , astfel încât distanțele de la punctul P la capetele segmentului BG să fie egale.
- Determină coordonatele punctului R care aparține axei Oy , astfel încât triunghiul RBG să fie isoscel cu baza BG.

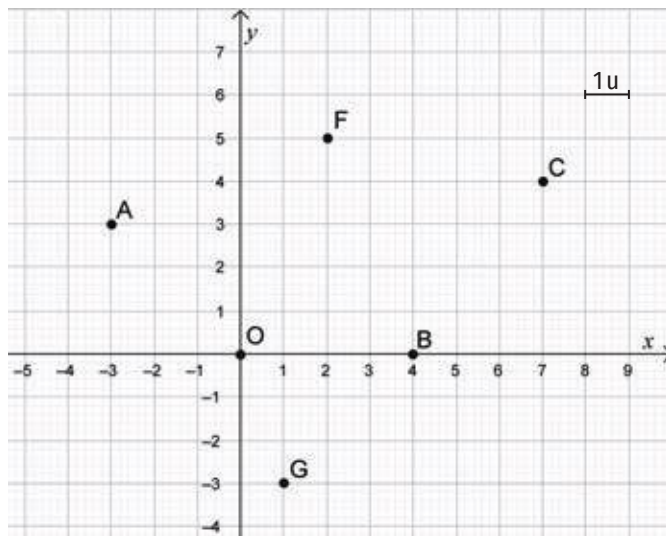


Figura 7

Rezolvare:

a) Pentru a determina abscisa punctului A, trasăm perpendiculara din punctul A pe axa Ox și obținem $x_A = -3$. Pentru a determina ordonata punctului A, trasăm perpendiculara din punctul A pe axa Oy și obținem $y_A = 3$. Așadar, am obținut $A(-3, 3)$. Procedând analog, obținem $B(4, 0)$, $C(7, 4)$, $F(2, 5)$ și $G(1, -3)$.

b) Fie $\{M\} = AC \cap BD$. Cum patrulaterul ABCD e paralelogram, punctul M este mijlocul segmentelor AC și BD.

$$\text{Punctul M este mijlocul segmentului AC.} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{-3 + 7}{2} \\ y_M = \frac{3 + 4}{2} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow M\left(2, \frac{7}{2}\right). \quad (6)$$

$$\text{Punctul M este mijlocul segmentului BD} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \end{cases} \xRightarrow{(6)} \begin{cases} 2 = \frac{4 + x_D}{2} \\ \frac{7}{2} = \frac{0 + y_D}{2} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 7 \end{cases}. \text{ Așadar, coordonatele punctului D sunt } (0, 7).$$

c) Calculăm lungimile laturilor triunghiului ABF.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{[4 - (-3)]^2 + (0 - 3)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{58} \quad (7)$$

$$AF = \sqrt{(x_F - x_A)^2 + (y_F - y_A)^2} \Rightarrow AF = \sqrt{[2 - (-3)]^2 + (5 - 3)^2} \Rightarrow AF = \sqrt{29} \quad (8)$$

OBSERVAȚIE



Reprezentarea punctelor în reperul cartezian xOy se poate face cu ajutorul anumitor instrumente digitale, disponibile online, cum ar fi *GeoGebra* sau *Desmos*.

LUCRAȚI ÎN PERECHI

Unul dintre cei doi elevi va reprezenta două puncte în reperul cartezian xOy , iar celălalt va determina coordonatele acelor puncte cu instrumentul digital *GeoGebra*. Apoi se schimbă rolurile.

Pentru aceasta, procedați astfel:

- deschideți aplicația *GeoGebra* (Classic 5 sau 6);
- găsiți bara de introducere a datelor;
- scrieți coordonatele punctelor, fără ca elevul celălalt să le vadă; pentru a introduce coordonatele punctului $A(2, 3)$, tastați „A = (2, 3)” și apăsați tasta „Enter”.

$$BF = \sqrt{(x_F - x_B)^2 + (y_F - y_B)^2} \Rightarrow BF = \sqrt{(2 - 4)^2 + (5 - 0)^2} \Rightarrow BF = \sqrt{29} \quad (9)$$

Din (8) și (9) obținem $AF = BF$, deci triunghiul ABF este isoscel (10).

Din (7), (8) și (9) obținem $AB^2 = (\sqrt{58})^2 = 58$, $AF^2 = (\sqrt{29})^2 = 29$ și $BF^2 = (\sqrt{29})^2 = 29$, de unde rezultă $AB^2 = AF^2 + BF^2$ și, de aici, conform reciprocei teoremei lui Pitagora, obținem că triunghiul ABF este dreptunghic (11).

Din (10) și (11) rezultă că triunghiul ABF este dreptunghic isoscel.

d) $P \in Ox \Rightarrow P(x, 0), x \in \mathbb{R}$

Cum distanțele de la punctul P la capetele segmentului BG sunt egale, obținem:

$$PB = PG \Rightarrow PB^2 = PG^2 \Rightarrow (x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2 = (x_G - x_P)^2 + (y_G - y_P)^2 \Rightarrow$$

$$(4 - x)^2 + (0 - 0)^2 = (1 - x)^2 + (-3 - 0)^2 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2x + 10 \Rightarrow -6x = -6 \Rightarrow x = 1.$$

Am obținut $P(1, 0)$.

e) $R \in Oy \Rightarrow R(0, y), y \in \mathbb{R}$

Triunghiul RBG isoscel cu baza BG. $\Leftrightarrow RB = RG \Leftrightarrow RB^2 = RG^2$

$$RB^2 = RG^2 \Leftrightarrow (x_B - x_R)^2 + (y_B - y_R)^2 = (x_G - x_R)^2 + (y_G - y_R)^2 \Leftrightarrow (4 - 0)^2 + (0 - y)^2 = (1 - 0)^2 + (-3 - y)^2 \Leftrightarrow y^2 + 16 = y^2 + 6y + 10 \Leftrightarrow 16 = 6y + 10 \Leftrightarrow y = 1$$

Am obținut $R(0, 1)$.

Aplică

PROVOCARE

Rezolvă exercițiul 1 folosind una dintre aplicațiile GeoGebra sau Desmos.

- În reperul cartezian xOy se consideră punctele A și B. Determină coordonatele mijlocului segmentului AB.
 - $A(1, -2), B(-3, 6)$;
 - $A(2, -5), B(-8, 3)$;
 - $A(-3, -4), B(-1, -6)$.
- În reperul cartezian xOy se consideră punctele A și B. Determină distanța de la punctul A la punctul B.
 - $A(1, 2), B(-3, 4)$;
 - $A(-2, 4), B(-8, 10)$;
 - $A(3, -1), B(-1, -4)$.
- În reperul cartezian xOy se consideră punctele M și N. Determină lungimea segmentului MN.
 - $M(-2, 5), N(4, -3)$;
 - $M(0, 4), N(-3, 0)$;
 - $M(-3, -1), N(-4, -2)$.
- În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B și C. Demonstrează că triunghiul ABC este isoscel.
 - $A(-1, 4), B(-5, -2), C(5, 0)$;
 - $A(2, 3), B(-6, 1), C(4, -5)$.
- În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B și C. Determină perimetrul triunghiului ABC. 
 - $A(7, 1), B(5, 1), C(5, 5)$;
 - $A(2, -1), B(3, 3), C(3, 2)$.
- În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B și C. Demonstrează că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.
 - $A(-2, -1), B(-5, -2), C(-1, -4)$;
 - $A(1, -2), B(-4, -4), C(3, -7)$.
- În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B și C. Determină coordonatele simetricului punctului A față de punctul B.
 - $A(1, 3), B(-2, 7)$;
 - $A(0, -5), B(-1, 3)$;
 - $A(-3, 0), B(-1, -7)$.

8. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2, 2)$, $B(-1, 5)$, $C(5, 6)$, $D(4, 3)$, $E(2, -2)$, $F(-2, -5)$, $G(-5, -1)$ și $H(-3, 4)$.

- Reprezintă punctele A, B, C, D, E, F, G și H în reperul cartezian xOy .
- Determină coordonatele simetricului punctului A față de punctul O .
- Determină natura patrulaterului $ABCD$.
- Determină coordonatele proiecției punctului D pe axa Ox .
- Determină coordonatele proiecției punctului B pe axa Oy .
- Determină natura triunghiului GEF .
- Determină coordonatele punctului egal depărtat de punctele G, E și F .
- Determină coordonatele proiecției punctului E pe dreapta AG .

9. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4, 2)$, $B(1, 3)$, $C(3, 6)$, $D(4, -2)$ și $E(-2, -4)$.

- Determină distanța de la punctul A la punctul B .
- Determină coordonatele mijlocului segmentului CD .
- Determină coordonatele simetricului punctului A față de punctul B .
- Determină coordonatele punctului F pentru care patrulaterul $ABCF$ este paralelogram.
- Demonstrează că triunghiul AED este dreptunghic.
- Determină coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC .
- Determină numărul real m pentru care triunghiul BCM este isoscel cu baza BC , unde $M(5, m)$.
- Determină lungimea proiecției segmentului ED pe axa Ox .
- Determină lungimea proiecției segmentului AC pe axa Oy .

10. În reperul cartezian xOy din figura 8 sunt reprezentate punctele $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ și J .

Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.

A. Coordonatele punctului A sunt:

- $(-12, 3)$; b) $(12, 4)$; c) $(-12, 4)$; d) $(4, -12)$.

B. Punctele situate în cadranul II sunt:

- A, B și C ; c) A, B , și H ;
- A, B, C, H și O ; d) A și B .

C. Coordonatele punctului H sunt:

- $(0, -8)$; b) $(-8, 0)$; c) $(-8, -8)$; d) $(-8, 8)$.

D. Lungimea segmentului AB este egală cu:

- $10\sqrt{2}$; b) $14,14$; c) $5\sqrt{2}$; d) $2\sqrt{10}$.

E. Triunghiul ABC este:

- echilateral; c) dreptunghic;
- isoscel; d) oarecare.

EXERSEAZĂ!

În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B și C .

- $A(-2, 1)$, $B(2, 3)$, $C(1, -2)$;
- $A(-4, 0)$, $B(2, 1)$, $C(0, -1)$;
- $A(-3, 1)$, $B(1, 4)$, $C(3, -1)$.

i) Reprezintă punctele A, B și C în reperul cartezian xOy cu ajutorul aplicației *GeoGebra*.

ii) Construiește triunghiului ABC , observă unghiurile acestuia și precizează dacă triunghiul este ascuțitunghic, dreptunghic sau obtuzunghic.

Indicație. În *GeoGebra*, pentru a trasa dreapta AB , mai întâi reprezintă punctele, apoi scrii comanda *Line (A,B)*.

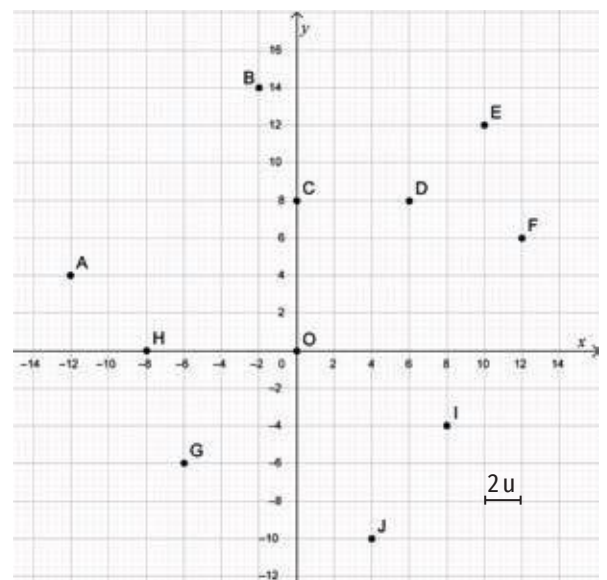


Figura 8

F. Coordonatele mijlocului segmentului DF sunt:

- a) (0, 0); b) (9, 6,5); c) (9, 7); d) (8, 7).

G. Coordonatele simetricului punctului D față de punctul E sunt:

- a) (2, 4); b) (14, 16); c) (0, 10); d) (8, 10).

H. Dacă patrulaterul DEFM este paralelogram, atunci coordonatele punctului M sunt:

- a) (4, 14); b) (16, 10); c) (9,7); d) (8, 2).

I. Coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC sunt:

- a) (-7, 10); b) (-6, 9,5); c) (-4, 10); d) (-7, 9).

J. Dacă N este simetricul punctului B față de punctul C, atunci coordonatele simetricului punctului B față de punctul N sunt:

- a) 6, -10); b) (0, 3); c) (4, -4); d) (-6, 20).

11. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 6)$ și $B(7, 2)$.

- Calculează lungimea segmentului AB.
- Determină coordonatele mijlocului segmentului AB.
- Determină coordonatele proiecției punctului A pe axa Ox .
- Determină coordonatele proiecției punctului B pe axa Oy .
- Fie $C(x, 2x)$, $x \in \mathbb{R}$. Determină numărul real x , pentru care triunghiul CAB este dreptunghic în C.
- Determină coordonatele punctului M de pe axa Ox , pentru care triunghiul MAB este dreptunghic.
- Determină coordonatele simetricului mijlocului segmentului AB față de punctul A.
- Determină coordonatele simetricului punctului B față de axa Ox .

12. În figura 9 este reprezentată schița unui teren agricol realizată în reperul cartezian xOy . Unei unități de măsură din reperul cartezian xOy îi corespunde în teren o distanță de 100 de metri. Terenul este delimitat de triunghiul ABC și este împărțit de drumul DE în două loturi. Primul lot este delimitat de triunghiul AED și este cultivat cu grâu, iar al doilea lot este delimitat de patrulaterul BCED și este cultivat cu porumb.

- Determină coordonatele punctelor A, B, C, D și E.
- Determină lungimea drumului DE.

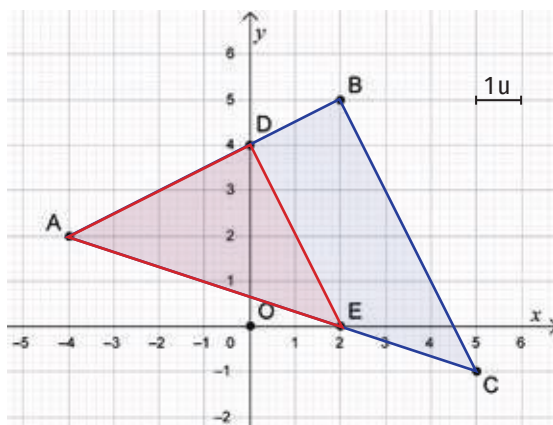


Figura 9

- c) Determină natura triunghiurilor ABC și ADE.
- d) Proprietarul amplasează un foisor pentru supravegherea terenului, egal depărtat de vârfurile triunghiului ce delimitează întregul teren. Determină coordonatele punctului unde trebuie amplasat foisorul.
- e) Media producției de grâu a fost 5 200 kg la hectar. Câte tone de grâu au fost recoltate?
- f) Media producției de porumb a fost 6 400 kg la hectar. Câte tone de porumb au fost recoltate?

13. Pe harta unui camping a fost trasat un reper cartezian xOy (figura 10). Unei unități de măsură din reperul cartezian xOy îi corespunde în teren o distanță de 5 metri. În camping există patru căsuțe, reprezentate pe hartă prin punctele C_1 , C_2 , C_3 și C_4 , unite între ele prin aleile C_1C_2 , C_2C_3 , C_3C_4 și C_4C_1 . Proprietarul campingului modernizează locația, construind un foisor F care este egal depărtat de cele patru căsuțe. Pentru a asigura iluminarea în timpul nopții, acesta montează câte un felinar pe mijlocul fiecăreia dintre alei astfel: F_1 este mijlocul segmentului C_1C_2 , F_2 este mijlocul segmentului C_2C_3 , F_3 este mijlocul segmentului C_3C_4 și F_4 este mijlocul segmentului C_4C_1 . În punctul O este amplasată sursa de alimentare cu electricitate a campingului.

- a) Determină coordonatele punctelor C_1 , C_2 , C_3 și C_4 .
- b) Determină coordonatele punctelor F_1 , F_2 , F_3 și F_4 . Reprezintă aceste puncte în reperul cartezian xOy .
- c) Determină lungimile aleilor.
- d) Arată că aleile C_1C_4 și C_3C_4 sunt perpendiculare. Determină unghiul format de aleile C_1C_2 și C_2C_3 .
- e) Determină coordonatele punctului care reprezintă foisorul.
- f) Care dintre punctele C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , F_1 , F_2 , F_3 și F_4 este cel mai apropiat de sursa de electricitate?

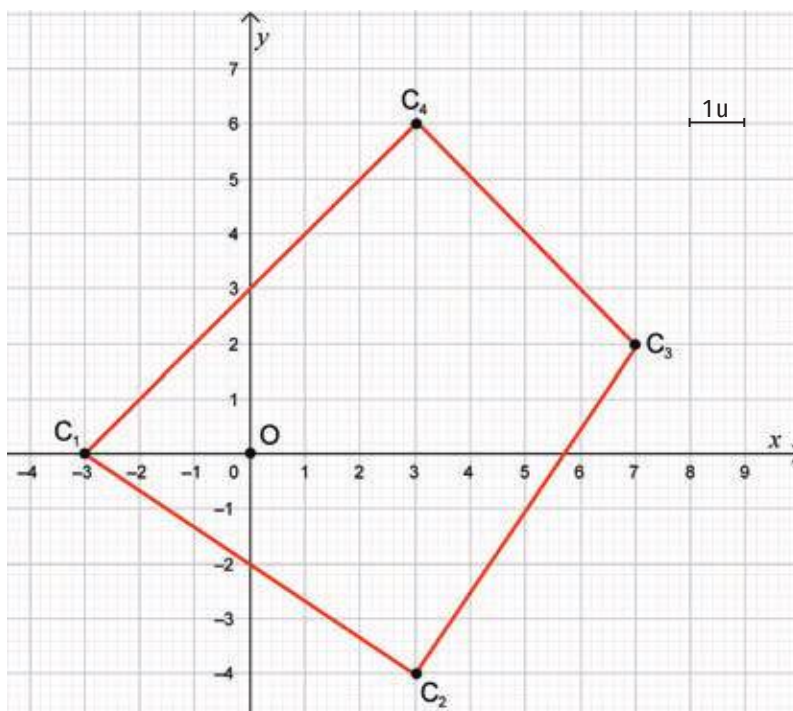


Figura 10

EXERSEAZĂ!

1. O stradă principală este dreaptă și traversează un oraș pe direcția nord-sud. Două clădiri sunt situate simetric față de această stradă. Un inginer proiectant realizează o schiță a zonei și alege un reper cartezian astfel încât strada să fie axa Oy . Pe această schiță, una dintre cele două clădiri se află în punctul $A(4, 2)$. Care sunt coordonatele punctului în care se află cealaltă clădire?

2. Într-o rezervație naturală, pozițiile a trei cuiburi aparținând aceleiași specii de păsări sunt cartografiate într-un sistem de coordonate cartezian xOy . Acestea sunt localizate în punctele $A(-2, -1)$, $B(4, -3)$ și $C(5, 0)$. Echipa de cercetare dorește să amplaseze un post de observare într-un punct situat la distanță egală față de cele trei cuiburi.

- a) Calculează distanțele dintre cele trei cuiburi.
- b) Determină coordonatele punctului în care trebuie instalat postul de observare.

2. Panta unei drepte (ca raport)

Descopăr



1. Un arhitect dorește să construiască două rampe pentru skateboarding, de dificultăți diferite. El desenează schițele acestora pe computer, folosind reperul cartezian xOy . Rampa A pornește din punctul $O(0, 0)$ și conține punctul $M(40, 8)$, iar rampa B pornește din punctul $O(0, 0)$ și conține punctul $N(40, 20)$ (figura 1).

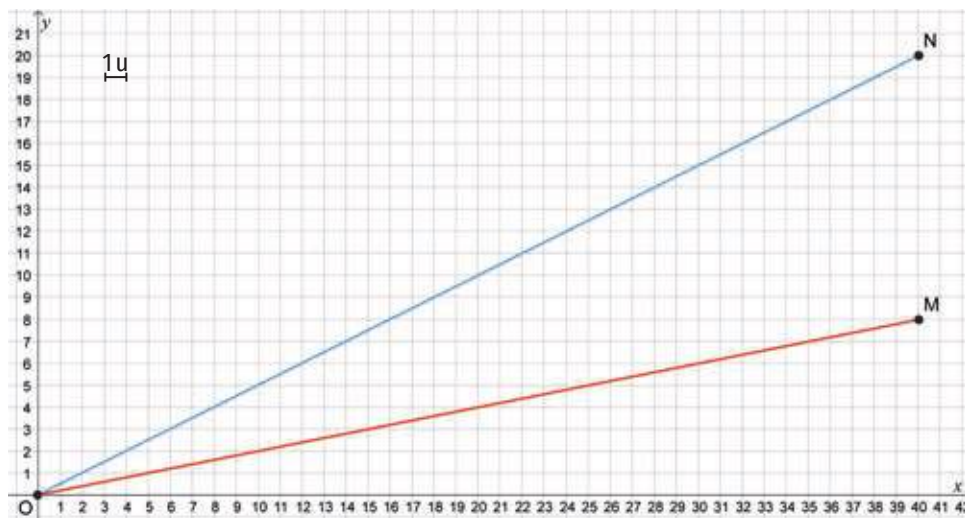


Figura 1

- Determină coordonatele punctului M' , știind că acesta este proiecția punctului M pe axa Ox .
 - Fie $S(x_S, y_S)$ un punct care aparține segmentului OM și S' proiecția sa pe axa Ox . Dă exemplu de un astfel de punct S , apoi calculează și compară valorile rapoartelor $\frac{MM'}{OM'}$ și $\frac{SS'}{OS'}$. Ce observi?
 - Demonstrează că punctul M' coincide cu proiecția punctului N pe axa Ox .
 - Compară valorile rapoartelor $\frac{MM'}{OM'}$ și $\frac{NM'}{OM'}$. Interpretează acest rezultat din punct de vedere al înclinării rampelor față de axa Ox .
 - Care dintre cele două rampe este destinată începătorilor? Argumentează răspunsul.
 - Fie $P(x_P, y_P)$ și $Q(x_Q, y_Q)$ două puncte distincte, care aparțin segmentului OM . Dă exemple de astfel de puncte, apoi, folosind coordonatele acestora, calculează și compară valorile rapoartelor $\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ și $\frac{y_M - y_O}{x_M - x_O}$. Ce observi?
2. În figurile 2 și 3 (a se vedea pagina următoare) sunt redată reprezentările grafice ale unor funcții afine.
- Scrie coordonatele punctelor A, B, C și D .
 - Calculează și compară rapoartele $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ și $\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$. Ce observi?
 - Ce poți spune despre dreptele AB și CD ?
 - Scrie coordonatele punctelor E, F, G și H .

- e) Calculează rapoartele $\frac{y_F - y_E}{x_F - x_E}$ și $\frac{y_F - y_G}{x_F - x_G}$ și scrie o relație între acestea.
f) Măsoară unghiul format de dreptele EF și GF. Câte grade are acesta?

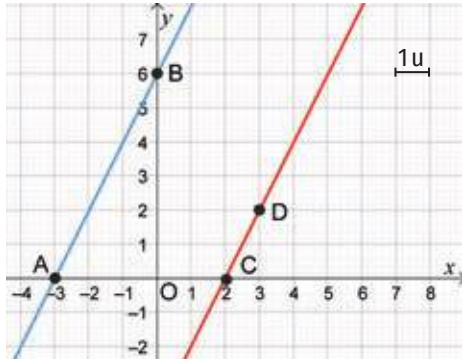


Figura 2

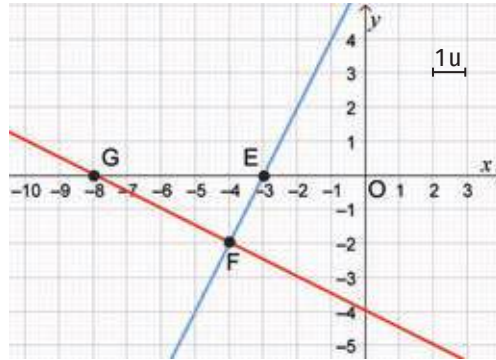


Figura 3



Învăț

Panta unei drepte

Rezolvând problema 1 propusă la secțiunea **Descopăr**, observăm că, în cazul dreptei OM, $\frac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$, unde Q și P sunt două puncte distincte care aparțin dreptei OM. Un astfel de raport reprezintă panta dreptei OM și caracterizează înclinarea dreptei OM față de axa Ox. Panta unei drepte d se notează, de obicei, cu m. Pentru a evita confuzia, atunci când avem mai multe drepte, putem nota panta dreptei d cu m_d .

În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$, cu $x_A \neq x_B$. Panta dreptei AB este dată de formula $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

EXEMPLE:

1. Panta dreptei determinate de punctele A(1, -2) și B(2, 3) este $m_{AB} = \frac{3 - (-2)}{2 - 1} = \frac{5}{1} = 5$.
2. Panta dreptei determinate de punctele C(-3, -4) și D(2, -5) este $m_{CD} = \frac{-5 - (-4)}{2 - (-3)} = -\frac{1}{5}$.
3. Panta dreptei determinate de punctele E(3, 5) și F(2, 5) este $m_{EF} = \frac{5 - 5}{2 - 3} = \frac{0}{-1} = 0$.

Observăm că panta unei drepte poate fi pozitivă (figura 4), negativă (figura 5) sau poate fi egală cu 0 (figura 6).

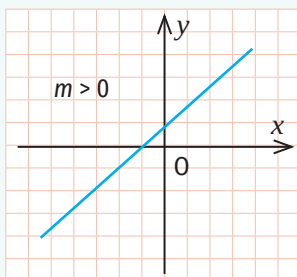


Figura 4

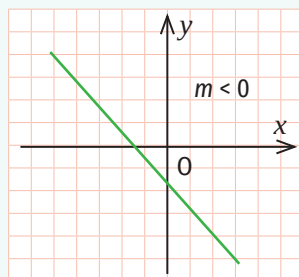


Figura 5

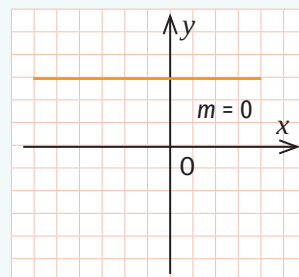


Figura 6

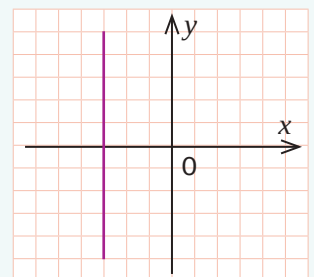


Figura 7

OBSERVAȚIE.

Dacă $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ sunt două puncte distincte cu $x_A = x_B$, atunci panta dreptei AB este nedefinită (figura 7).

OBSERVAȚII.

În reperul cartezian xOy se consideră dreptele distincte d și g , care nu sunt paralele cu Oy .

- Dreptele d și g sunt paralele dacă și numai dacă $m_d = m_g$.
- Dreptele d și g sunt perpendiculare dacă și numai dacă $m_d \cdot m_g = -1$.

În reperul cartezian xOy se consideră punctele A , B și C , distincte două câte două. **Punctele A , B și C sunt coliniare dacă și numai dacă dreptele AB și AC (sau AB și BC , sau AC și BC) au aceeași pantă.**

EXEMPLU:

În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(3, 7)$, $C(-2, -5)$, $D(1, 4)$, $E(3, 1)$ și $F(-6, 4)$.

Pentru a demonstra că dreptele AB și CD sunt paralele, procedăm astfel:

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= \frac{7-1}{3-1} = \frac{6}{2} = 3 \\ m_{CD} &= \frac{4-(-5)}{1-(-2)} = \frac{9}{3} = 3 \\ m_{AC} &= \frac{-5-1}{-2-1} = \frac{-6}{-3} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{AB} = m_{CD} \text{ și } m_{AB} \neq m_{AC} \Rightarrow AB \parallel CD$$

Am calculat și panta dreptei AC pentru a arăta că punctele A , B și C nu sunt coliniare.

Pentru a demonstra că dreptele AB și EF sunt perpendiculare, procedăm astfel:

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= 3 \\ m_{EF} &= \frac{4-1}{-6-3} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{EF} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow AB \perp EF$$

Exerciții rezolvate

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 2)$, $B(-1, -7)$ și $C(-3, -13)$. Demonstrează că punctele A , B și C sunt coliniare.

Rezolvare:

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= \frac{-7-2}{-1-2} = \frac{-9}{-3} = 3 \\ m_{AC} &= \frac{-13-2}{-3-2} = \frac{-15}{-5} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow \text{Punctele } A, B \text{ și } C \text{ sunt coliniare.}$$

2. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 1-4m)$ și $B(-5, 3-m)$, unde m este număr real. Determină numărul real m , pentru care panta dreptei AB este egală cu $-\frac{2}{3}$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{(3-m) - (1-4m)}{-5 - (-1)} = \frac{3-m-1+4m}{-4} = \frac{3m+2}{-4} = -\frac{3m+2}{4} \\ -\frac{3m+2}{4} &= -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{3m+2}{4} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3(3m+2) = 2 \cdot 4 \Leftrightarrow 9m+6 = 8 \Leftrightarrow 9m = 8-6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9m = 2 \Leftrightarrow m = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

3. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3, 6)$, $B(4, 6)$, $C(7, -3)$ și $D(-6, -3)$. Demonstrează că patrulaterul ABCD este trapez isoscel.

Rezolvare:

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= \frac{6-6}{4-(-3)} = \frac{0}{7} = 0 \\ m_{CD} &= \frac{-3-(-3)}{-6-7} = \frac{0}{-13} = 0 \\ m_{AD} &= \frac{-3-6}{-6-(-3)} = \frac{-9}{-3} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{AB} = m_{CD} \text{ și } m_{AB} \neq m_{AD} \Rightarrow AB \parallel CD \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} m_{AD} &= 3 \\ m_{BC} &= \frac{-3-6}{7-4} = \frac{-9}{3} = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{AD} \neq m_{BC} \Rightarrow AD \nparallel BC \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că patrulaterul ABCD este trapez.

Calculăm lungimile segmentelor AD și BC:

$$\left. \begin{aligned} AD &= \sqrt{(-6+3)^2 + (-3-6)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \\ BC &= \sqrt{(7-4)^2 + (-3-6)^2} = \sqrt{3^2 + (-9)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AD = BC = 3\sqrt{10}$$

Patrulaterul ABCD este trapez. $\left. \begin{aligned} AD &= BC = 3\sqrt{10} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ Patrulaterul ABCD este trapez isoscel.

Aplic

- În reperul cartezian xOy se consideră punctele A și B. Determină panta dreptei AB.

a) $A(5, -3)$, $B(-4, 7)$;	c) $A(0, 2)$, $B(-3, 4)$;	e) $A(5, -6)$, $B(3, -6)$;
b) $A(1, 2)$, $B(2, 3)$;	d) $A(-3, -4)$, $B(2, 0)$;	f) $A(-7, -2)$, $B(2, -3)$.
- În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2, m)$ și $N(-1, 5)$, unde m este număr real. Determină numărul real m , pentru care panta dreptei MN este egală cu 2.
 - În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 2)$ și $B(1, m-1)$, unde m este număr real. Determină numărul real m , pentru care panta dreptei AB este egală cu -3.
- În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5, 3)$, $B(-4, 1)$ și $C(2, -4)$. Punctele M, N și P sunt mijloacele segmentelor AB, BC și AC. Determină pantele dreptelor MN, NP și MP în două moduri.
- În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 4)$, $B(0, 5)$ și $C(2, -3)$. Determină pantele dreptelor suport ale înălțimilor triunghiului ABC.
- În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B și C. Demonstrează că punctele A, B și C sunt coliniare.

a) $A(1, 2)$, $B(-2, 1)$, $C(-5, 0)$;	b) $A(1, -1)$, $B(-3, -9)$, $C(4, 5)$.
--	---
- În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B, C și D. Demonstrează că dreptele AB și CD sunt paralele.

a) $A(1, 2)$, $B(-1, -4)$, $C(0, -3)$, $D(-2, -9)$;	b) $A(-1, 6)$, $B(1, -2)$, $C(0, 9)$, $D(4, -7)$.
---	---
- În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B, C și D. Demonstrează că dreptele AB și CD sunt perpendiculare.

a) $A(0, -3)$, $B(3, 3)$, $C(2, 3)$, $D(6, 1)$;	b) $A(-1, -9)$, $B(-2, -13)$, $C(-4, -1)$, $D(8, -4)$.
---	--



ȘTIAI CĂ...?

• Indicatoarele rutiere care avertizează o „pantă periculoasă” cu un anumit procent reprezintă exact panta matematică a drumului.

Un procent de 10% înseamnă o pantă de 0,1, adică șoseaua urcă cu exact 10 metri pentru fiecare 100 de metri parcurși pe orizontală.

• Cea mai abruptă stradă rezidențială din lume se află în Noua Zeelandă (*Baldwin Street*) și are o înclinație de 34,8%.

• Panta rampelor pentru scaunele cu roțile este strict reglementată prin lege.

8. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B și C. Demonstrează că triunghiul ABC este dreptunghic.
 - a) $A(-2, 3)$, $B(5, -1)$, $C(1, -8)$; b) $A(-1, 3)$, $B(3, 5)$, $C(1, -1)$.
9. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B, C și D. Demonstrează că patrulaterul ABCD este trapez isoscel.
 - a) $A(-5, 4)$, $B(6, 4)$, $C(9, -2)$, $D(-8, -2)$; b) $A(-1, 3)$, $B(3, -1)$, $C(5, 2)$, $D(2, 5)$.
10. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B, C și D. Demonstrează că patrulaterul ABCD este trapez dreptunghic.
 - a) $A(-4, -2)$, $B(2, -2)$, $C(1, 3)$, $D(-4, 3)$; b) $A(-9, 4)$, $B(-1, 8)$, $C(-6, 3)$, $D(-8, 2)$.
11. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B, C și D. Demonstrează că patrulaterul ABCD este paralelogram.
 - a) $A(-5, -3)$, $B(1, 3)$, $C(5, 1)$, $D(-1, -5)$; b) $A(-4, -2)$, $B(-1, 3)$, $C(5, 6)$, $D(2, 1)$.
12. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B, C și D. Demonstrează că patrulaterul ABCD este dreptunghi.
 - a) $A(1, 5)$, $B(3, 7)$, $C(6, 4)$, $D(4, 2)$; b) $A(1, 2)$, $B(3, 8)$, $C(12, 5)$, $D(10, -1)$.
13. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B, C și D. Demonstrează că patrulaterul ABCD este pătrat.
 - a) $A(-1, 6)$, $B(3, 9)$, $C(6, 5)$, $D(2, 2)$; b) $A(-5, 2)$, $B(-2, 6)$, $C(2, 3)$, $D(-1, -1)$.
14. Într-un experiment de laborator, mișcarea unei bacterii într-un vas Petri este monitorizată folosind un reper cartezian xOy . Inițial, bacteria se află în punctul $B(1, 2)$, iar sursa de hrană este plasată în punctul $H(7, 5)$. Bacteria se deplasează pe cel mai scurt drum către sursa de hrană.
 - a) Determină panta dreptei care modelează deplasarea bacteriei către sursa de hrană și explică semnificația acesteia în contextul deplasării raportate la axele de coordonate.
 - b) Calculează coordonatele punctului în care se va afla bacteria după ce a parcurs exact jumătate din distanța până la sursa de hrană.
15. Într-un reper cartezian xOy , traiectoria rectilinie a unui vapor de pasageri este reprezentată sub forma unei drepte care conține punctele $P(1, 1)$ și $Q(5, 3)$. O barcă de salvare pornește din punctul $S(2, 4)$ și se deplasează paralel cu vaporul pentru a-i supraveghea traseul.
 - a) Determină panta dreptei PQ.
 - b) Barca de salvare ar putea trece la un moment dat prin punctul $R(6, 6)$? Argumentează.
 - c) Barca de salvare ar putea trece la un moment dat prin punctul $T(4, 8)$? Argumentează.
16. Un inginer proiectant realizează schița unei rampe pentru scaune cu roțile într-un reper cartezian xOy . Rampa este reprezentată printr-un segment cu capetele în punctele O și $A(12, 1)$. Știind că standardul de siguranță impune o pantă maximă de $\frac{1}{12}$, verifică dacă această rampă este sigură. 

3. Ecuația dreptei care trece printr-un punct dat și are panta dată, ecuația dreptei care trece prin două puncte; intersecțiile dreptei cu axele de coordonate

Descopăr



Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, -1)$, $B(0, -3)$ și $C(-1, -5)$.

- Demonstrează că punctele A , B și C sunt coliniare și reprezintă dreapta AB în reperul cartezian xOy .
- În reperul cartezian de la punctul a), reprezintă geometric graficul funcției f . Ce observi?
- Demonstrează că punctele A , B și C aparțin reprezentării geometrice a graficului funcției f .
- Ce figură geometrică este reprezentarea geometrică a graficului funcției f ?
- Scris relația dintre x și y , unde $M(x, y)$ este un punct care aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f .



Învăț

În această lecție vom considera, în plan, reperul cartezian xOy .

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale și punctele distincte $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$, care aparțin reprezentării geometrice a graficului funcției f în reperul cartezian xOy . Atunci, $f(x_A) = y_A$ și $f(x_B) = y_B$, de unde rezultă că $y_A = ax_A + b$ și $y_B = ax_B + b$. Panta dreptei AB este:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{(ax_B + b) - (ax_A + b)}{x_B - x_A} = \frac{ax_B - ax_A}{x_B - x_A} = \frac{a(x_B - x_A)}{x_B - x_A} = a$$

Așadar, reprezentarea geometrică a graficului funcției f în reperul cartezian xOy este o dreaptă care are panta egală cu a . (1)

Știm că reprezentarea geometrică a graficului funcției f în reperul cartezian xOy este o mulțime de puncte $M(x, y)$ cu proprietatea $f(x) = y$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că, în reperul cartezian xOy , o dreaptă este o mulțime de puncte $M(x, y)$ cu proprietatea $y = ax + b$, unde a reprezintă panta dreptei.

Putem spune că, în reperul cartezian xOy , orice punct $M(x, y)$ care aparține unei drepte, care nu este verticală, poate fi descris de o relație de forma $y = mx + n$, unde m și n sunt numere reale.

Ecuația carteziană explicită a unei drepte (care nu este verticală) în plan este $y = mx + n$, unde m și n sunt numere reale. Numărul real m este panta dreptei, iar numărul real n se numește ordonata la origine a dreptei (este ordonata punctului de pe dreaptă care are abscisa egală cu 0).

OBSERVAȚII.

1. Pentru a nota o dreaptă, folosim litere mici din alfabetul latin, însoțite sau nu de indici: de exemplu, d , d_1 .
2. Pentru a scrie că ecuația carteziană explicită a unei drepte d în plan este $y = mx + n$, unde m și n sunt numere reale, folosim notația $d: y = mx + n$.

EXEMPLE:

1. Dreapta de ecuație $y = 2x - 5$ are panta $m = 2$.
2. Dreapta de ecuație $y = 5$ are panta $m = 0$.

În reperul cartezian xOy se consideră punctul $P(x_p, y_p)$ și dreapta d de ecuație $y = mx + n$ ($m, n \in \mathbb{R}$). Punctul $P(x_p, y_p)$ aparține dreptei d dacă și numai dacă $y_p = mx_p + n$.

EXEMPLU:

În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(1, -3)$ și dreapta $d: y = -2x + 5$.

Pentru a verifica dacă punctul A aparține dreptei d , înlocuim x cu 1 și y cu -3 în ecuația dreptei d . Obținem $-3 = -2 \cdot 1 + 5$, ceea ce nu este adevărat. De aici rezultă că punctul A nu aparține dreptei d .

Ecuația dreptei care trece printr-un punct dat și are panta dată

În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d cu ecuația carteziană explicită $y = mx + n$ ($m, n \in \mathbb{R}$) și punctul $A(x_A, y_A)$ care aparține dreptei d . Atunci $y_A = mx_A + n$, de unde rezultă că $n = y_A - mx_A$. Înlocuind n cu $y_A - mx_A$ în ecuația carteziană explicită a dreptei d , obținem:

$$y = mx + y_A - mx_A \Leftrightarrow y - y_A = mx - mx_A \Leftrightarrow y - y_A = m(x - x_A)$$

Teorema 1. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(x_A, y_A)$. Ecuația dreptei care trece prin punctul $A(x_A, y_A)$ și are panta dată m este $y - y_A = m(x - x_A)$.

EXEMPLE:

1. Ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3, 1)$ și are panta $m = -2$ este: $y - 1 = -2(x - 3)$ sau $y = -2x + 7$.
2. Ecuația dreptei care trece prin punctul $C(1, -1)$ și are panta $m = 0$ este: $y + 1 = 0(x - 1)$ sau $y = -1$.

Ecuația dreptei care trece prin două puncte date

Fie $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ două puncte distincte în reperul cartezian xOy . Ne propunem să scriem ecuația dreptei care trece prin punctele A și B (există o singură dreaptă care trece prin punctele A și B , dreapta AB).

Există două cazuri: $x_A = x_B$ sau $x_A \neq x_B$.

I. Dacă $x_A = x_B$, atunci ecuația dreptei AB este $x = x_A$ (figura 1).

II. Dacă $x_A \neq x_B$, atunci dreapta AB are panta $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Scriind ecuația dreptei care trece prin punctul $A(x_A, y_A)$ și are panta $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, obținem ecuația $y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$.

Teorema 2. În reperul cartezian xOy se consideră punctele distincte $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$. Ecuația dreptei care trece prin punctele $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ este:

- $AB: x = x_A$, dacă $x_A = x_B$;
- $AB: y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$, dacă $x_A \neq x_B$.

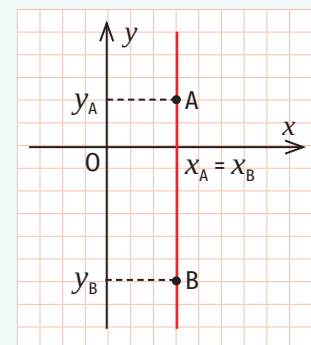


Figura 1

OBSERVAȚIE.

Dacă $x_A \neq x_B$ și $y_A \neq y_B$, ecuația dreptei care trece prin punctele $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ poate fi scrisă sub forma $\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$.

EXEMPLE:

1. Ecuația dreptei care trece prin punctele $A(2, 5)$ și $B(2, -3)$ este $x = 2$.
2. Ecuația dreptei care trece prin punctele $A(-2, 3)$ și $B(2, 3)$ este $y - 3 = \frac{3 - 3}{2 - (-2)}(x + 2)$ sau $y = 3$.
3. Ecuația dreptei care trece prin punctele $A(2, 4)$ și $B(1, -5)$ este:

$$y - 4 = \frac{-5 - 4}{1 - 2}(x - 2) \Leftrightarrow y - 4 = \frac{-9}{-1}(x - 2) \Leftrightarrow y - 4 = 9(x - 2) \Leftrightarrow y - 4 = 9x - 18 \Leftrightarrow y = 9x - 14.$$

OBSERVAȚIE.

Punctele distincte $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ și $C(x_C, y_C)$, cu $x_A \neq x_B \neq x_C \neq x_A$, sunt coliniare dacă și numai dacă $y_C - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x_C - x_A)$ sau $\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

În reperul cartezian xOy se consideră punctele distincte $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$. Ecuația dreptei care trece prin punctele $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ poate fi scrisă sub forma:

- $AB: x - x_A = 0$, dacă $x_A = x_B$;
- $AB: (y_B - y_A)x + (x_A - x_B)y + (x_By_A - x_Ay_B) = 0$, dacă $x_A \neq x_B$.

Observăm că ecuația unei drepte poate fi scrisă sub forma $ax + by + c = 0$, unde a, b, c sunt numere reale.

OBSERVAȚII.

1. Orice dreaptă din plan este descrisă printr-o ecuație de forma $ax + by + c = 0$, unde a, b, c sunt numere reale, iar a și b nu sunt simultan nule. Această ecuație este numită **ecuația carteziană generală a unei drepte**.
2. Ecuația carteziană generală a unei drepte care trece prin origine este $ax + by = 0$, unde a, b sunt numere reale, iar a și b nu sunt simultan nule.

Dacă $b \neq 0$, panta dreptei care are ecuația carteziană generală $ax + by + c = 0$, unde a, b, c sunt numere reale, este $m = -\frac{a}{b}$.

EXEMPLE:

1. Panta dreptei $d: 2x + 3y + 7 = 0$ este $m = -\frac{2}{3}$.
2. Panta dreptei $d: -3x + 4y - 5 = 0$ este $m = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}$.
3. Panta dreptei $d: 2y - 7 = 0$ este $m = 0$.
4. Panta dreptei $d: x + 2y = 0$ este $m = -\frac{1}{2}$.

OBSERVAȚIE.

În reperul cartezian xOy se consideră punctul $P(x_p, y_p)$ și dreapta d de ecuație $ax + by + c = 0$, unde a, b, c sunt numere reale, iar a și b nu sunt simultan nule. Punctul $P(x_p, y_p)$ aparține dreptei d dacă și numai dacă $ax_p + by_p + c = 0$.

EXEMPLU:

În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-1, 2)$ și dreapta $d: 2x - 3y + 8 = 0$.

Pentru a verifica dacă punctul A aparține dreptei d , înlocuim x cu -1 și y cu 2 în ecuația dreptei d . Obținem $2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 + 8 = 0$, ceea ce este adevărat. De aici rezultă că punctul A aparține dreptei d .

Determinarea coordonatelor punctelor de intersecție a unei drepte cu axele de coordonate Ox și Oy . Reprezentarea unei drepte în reperul cartezian xOy

În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $ax + by + c = 0$, unde a, b, c sunt numere reale, iar a și b nu sunt simultan nule.

I. Dacă $a = 0$, atunci dreapta d are ecuația $by + c = 0$.

- Dacă $c = 0$, atunci dreapta d are ecuația $y = 0$ și coincide cu axa Ox , deci $d \cap Ox = Ox$ și $d \cap Oy = \{O(0, 0)\}$.
- Dacă $c \neq 0$, atunci dreapta d are ecuația $y = -\frac{c}{b}$ și este paralelă cu axa Ox , deci $d \cap Ox = \emptyset$ și coordonatele punctului de intersecție dintre dreapta d și axa Oy sunt $(0, -\frac{c}{b})$. Pentru a reprezenta dreapta d în reperul cartezian xOy , ducem paralela la axa Ox prin punctul de coordonate $(0, -\frac{c}{b})$ (figura 2).

II. Dacă $b = 0$, atunci dreapta d are ecuația $ax + c = 0$.

- Dacă $c = 0$, atunci dreapta d are ecuația $x = 0$ și coincide cu axa Oy , deci $d \cap Oy = Oy$ și $d \cap Ox = \{O(0, 0)\}$.
- Dacă $c \neq 0$, atunci dreapta d are ecuația $x = -\frac{c}{a}$ și este paralelă cu axa Oy , deci $d \cap Oy = \emptyset$ și coordonatele punctului de intersecție dintre dreapta d și axa Ox sunt $(-\frac{c}{a}, 0)$. Pentru a reprezenta dreapta d în reperul cartezian xOy , ducem paralela la axa Oy prin punctul de coordonate $(-\frac{c}{a}, 0)$ (figura 3).

III. Dacă $a \neq 0$ și $b \neq 0$, atunci dreapta d are ecuația $ax + by + c = 0$.

- Dacă $c = 0$, atunci dreapta d are ecuația $ax + by = 0$ și $O(0, 0) \in d$. În acest caz, $d \cap Ox = \{O(0, 0)\}$ și $d \cap Oy = \{O(0, 0)\}$. Pentru a reprezenta dreapta d în reperul cartezian xOy , trebuie să determinăm coordonatele unui punct diferit de O care aparține acestei drepte (se dă o valoare lui x și se determină y sau se dă o valoare lui y și se determină x). Dreapta d este dreapta determinată de acest punct și punctul $O(0, 0)$ (figura 4).

- Dacă $c \neq 0$, fie $\{M(x_M, y_M)\} = d \cap Oy$ și $\{N(x_N, y_N)\} = d \cap Ox$. Atunci:

$$\left. \begin{array}{l} M \in d \Rightarrow ax_M + by_M + c = 0 \\ M \in Oy \Rightarrow x_M = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow by_M + c = 0 \Rightarrow y_M = -\frac{c}{b} \Rightarrow M\left(0, -\frac{c}{b}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} N \in d \Rightarrow ax_N + by_N + c = 0 \\ N \in Ox \Rightarrow y_N = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow ax_N + c = 0 \Rightarrow x_N = -\frac{c}{a} \Rightarrow N\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$$

Pentru a reprezenta dreapta d în reperul cartezian xOy , se reprezintă punctele M și N (figura 5).

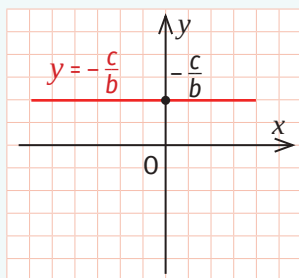


Figura 2

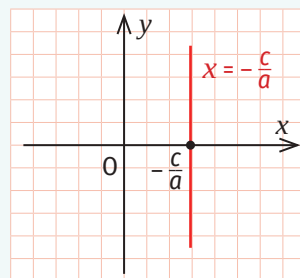


Figura 3

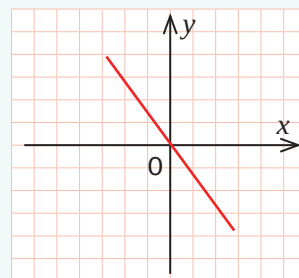


Figura 4

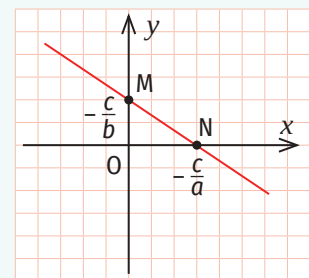


Figura 5

EXEMPLU:

În reperul cartezian xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1: 4x + 3 = 0$, $d_2: 2y - 5 = 0$, $d_3: 2x + 4y - 5 = 0$. Determinăm coordonatele punctelor de intersecție dintre dreptele d_1 , d_2 , d_3 și axele de coordonate Ox și Oy :

$$d_1: x = -\frac{3}{4} \Rightarrow d_1 \cap Ox = \left\{ A\left(-\frac{3}{4}, 0\right) \right\} \text{ și } d_1 \cap Oy = \emptyset;$$

$$d_2: y = \frac{5}{2} \Rightarrow d_2 \cap Ox = \emptyset \text{ și } d_2 \cap Oy = \left\{ B\left(0, \frac{5}{2}\right) \right\}.$$

Fie $\{C(x_C, y_C)\} = d_3 \cap Ox$ și $\{D(x_D, y_D)\} = d_3 \cap Oy$. Atunci:

$$\left. \begin{array}{l} C \in d_3 \Rightarrow 2x_C + 4y_C - 5 = 0 \\ C \in Ox \Rightarrow y_C = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x_C - 5 = 0 \Rightarrow x_C = \frac{5}{2} \Rightarrow C\left(\frac{5}{2}, 0\right);$$

$$\left. \begin{array}{l} D \in d_3 \Rightarrow 2x_D + 4y_D - 5 = 0 \\ D \in Oy \Rightarrow x_D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4y_D - 5 = 0 \Rightarrow y_D = \frac{5}{4} \Rightarrow D\left(0, \frac{5}{4}\right).$$

În figurile 6, 7 și 8 sunt reprezentate dreptele d_1 , d_2 și d_3 în reperul cartezian xOy .

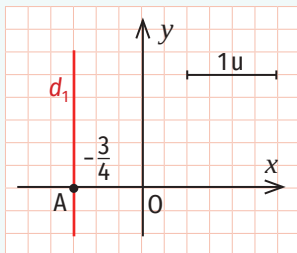


Figura 6

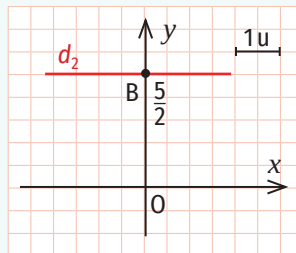


Figura 7

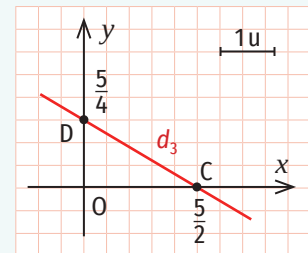


Figura 8

Exerciții rezolvate

1. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $2x - 3y + 6 = 0$.

- Determină ordonata punctului care aparține dreptei d și are abscisa egală cu 3.
- Determină abscisa punctului care aparține dreptei d și are ordonata egală cu -4 .

Rezolvare:

$$a) M(3, y_M) \in d \Leftrightarrow 2 \cdot 3 - 3y_M + 6 = 0 \Leftrightarrow 6 - 3y_M + 6 = 0 \Leftrightarrow 12 - 3y_M = 0 \Leftrightarrow 3y_M = 12 \Leftrightarrow y_M = 4.$$

$$b) N(x_M, -4) \in d \Leftrightarrow 2x_M - 3 \cdot (-4) + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x_M + 12 + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x_M + 18 = 0 \Leftrightarrow 2x_M = -18 \Leftrightarrow x_M = -9.$$

2. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $x - 3my + m = 0$ ($m \in \mathbb{R}$) și punctul $A(2, -3)$. Determină numărul real m pentru care punctul A aparține dreptei d .

Rezolvare:

$$A(2, -3) \in d \Leftrightarrow 2 - 3m \cdot (-3) + m = 0 \Leftrightarrow 2 + 9m + m = 0 \Leftrightarrow 2 + 10m = 0 \Leftrightarrow 10m = -2 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{10} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{5}.$$

3. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 1)$, $B(-6, -2)$ și $C(0, -6)$. Scrie ecuația dreptei suport a medianei din A a triunghiului ABC .





PROVOCARE

Rezolvă problemele 1 (A, B), 3, 4 și 5 folosind și un instrument digital (GeoGebra sau Desmos).

Rezolvare:

Fie $M(x_M, y_M)$ mijlocul segmentului BC. Atunci, $x_M = \frac{-6 + 0}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ și

$y_M = \frac{-2 + (-6)}{2} = \frac{-8}{2} = -4$, de unde rezultă că punctul M are coordonatele $(-3, -4)$.

Ecuția dreptei AM este:

$$y - 1 = \frac{-4 - 1}{-3 - 3}(x - 3) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{-5}{-6}(x - 3) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{5}{6}(x - 3) \Leftrightarrow 6(y - 1) = 5(x - 3) \Leftrightarrow 6y - 6 = 5x - 15 \Leftrightarrow 5x - 6y - 9 = 0.$$

Ecuția dreptei suport a medianei din A a triunghiului ABC este $5x - 6y - 9 = 0$.

4. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$ și $C(m, -3)$, unde m este număr real. Determină numărul real m pentru care punctele A, B și C sunt coliniare.

Rezolvare:

Punctele distincte $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ și $C(x_C, y_C)$, cu $x_A \neq x_B \neq x_C \neq x_A$, sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Pentru $m = -1$ sau $m = 3$, punctele A, B și C nu sunt coliniare, deci $m \neq -1$ și $m \neq 3$.

$$\frac{-3 - 2}{m + 1} = \frac{-1 - 2}{3 + 1} \Leftrightarrow \frac{-5}{m + 1} = \frac{-3}{4} \Leftrightarrow -5 \cdot 4 = -3(m + 1) \Leftrightarrow -20 = -3m - 3 \Leftrightarrow 3m = 17 \Leftrightarrow m = \frac{17}{3}.$$

Aplic

1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.

A. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $2x - 3y + 7 = 0$ și punctele $A(1, 3)$, $B(2, 8)$, $C(0, 7)$, $D(-2, -1)$. Dintre punctele A, B, C și D, cel care aparține dreptei d este:

a) A; b) B; c) C; d) D.

B. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $-x - 2y + 5 = 0$ și punctul $A(m, 1)$, unde m este număr real. Numărul real m pentru care punctul A aparține dreptei d este:

a) -3; b) -2; c) 2; d) 3.

C. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $3x - 6y + 2 = 0$. Panta dreptei d este egală cu:

a) -2; b) $\frac{1}{2}$; c) 2; d) 3.
2. Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a) În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $2x - 3y + 6 = 0$. Coordonatele punctului de intersecție a dreptei d cu axa Ox sunt ____.

b) În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $-4x - 5y + 10 = 0$. Coordonatele punctului de intersecție a dreptei d cu axa Oy sunt ____.
3. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d și punctul A. Stabilește, în fiecare caz, dacă punctul A aparține dreptei d .

a) $A(1, 2)$, $d: y = -5x + 3$; c) $A(3, -4)$, $d: y + 4 = 0$;

b) $A(-1, -3)$, $d: y = 7x + 4$; d) $A(-4, -6)$, $d: 3x + 4y - 2 = 0$.

4. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $-x + 3y + 2 = 0$. Determină coordonatele punctului care aparține dreptei d și are abscisa egală cu:
a) -1 ; b) 4 ; c) $\frac{1}{2}$; d) $0,2$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $3x + 5y - 8 = 0$. Determină coordonatele punctului care aparține dreptei d și are ordonata egală cu:
a) 0 ; b) -5 ; c) $-\frac{3}{5}$; d) $-0,4$.
6. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d și punctul A. Determină numărul real m pentru care punctul A aparține dreptei d .
a) $A(-1, 4)$, $d: mx - 3y + 5 = 0$; b) $A(m, 1)$, $d: 3x - 5y + 1 = 0$.
7. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d . Determină coordonatele punctelor de intersecție a dreptei d cu axele de coordonate Ox și Oy (dacă există) și reprezintă dreapta d în reperul cartezian xOy . Precizează poziția acesteia față de axele de coordonate Ox și Oy .
a) $d: y = 2x$; d) $d: y = -5$; g) $d: -4x + 8y - 2 = 0$;
b) $d: y = 3x - 6$; e) $d: 2x - 3y + 1 = 0$; h) $d: 2x + 3y + 5 = 0$.
c) $d: x - 6 = 0$; f) $d: -3x + y = 0$;
8. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d . Determină panta dreptei d .
a) $d: y = 3x - 5$; c) $d: y = 8$; e) $d: 4x + 2y - 9 = 0$;
b) $d: y = -2x$; d) $d: x - 3y = 0$; f) $d: -3x + 3y - 5 = 0$.
9. În reperul cartezian xOy se consideră punctul A. Scrie ecuația dreptei care conține punctul A și are panta dată m .
a) $A(-1, 3)$, $m = 2$; c) $A(1, 2)$, $m = 0$; e) $A(-1, 5)$, $m = 5$;
b) $A(2, -4)$, $m = -5$; d) $A(-3, -1)$, $m = -3$; f) $A(-4, -2)$, $m = \frac{1}{2}$.
10. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A și B. Scrie ecuația dreptei care conține punctele A și B.
a) $A(5, 3)$, $B(5, 7)$; c) $A(0, -2)$, $B(3, 4)$; e) $A(-5, -6)$, $B(3, -6)$;
b) $A(-1, 2)$, $B(-2, 3)$; d) $A(3, -4)$, $B(-2, 0)$; f) $A(-7, -2)$, $B(2, -3)$.
11. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B și C. Scrie ecuațiile dreptelor suport ale laturilor și ale medianelor triunghiului ABC.
a) $A(5, 3)$, $B(-4, 1)$, $C(2, -4)$; b) $A(5, 1)$, $B(3, 6)$, $C(-2, -5)$.
12. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B și C. Verifică dacă punctele A, B și C sunt coliniare.
a) $A(2, 1)$, $B(1, -1)$, $C(-5, -13)$; b) $A(1, 1)$, $B(-5, 5)$, $C(1, -2)$.
13. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B și C. Verifică dacă punctul A aparține dreptei BC.
a) $A(0, 1)$, $B(2, 3)$, $C(1, 5)$; b) $A(1, -1)$, $B(-3, -9)$, $C(4, 5)$.
14. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B și C. Determină numărul real m pentru care punctele A, B și C sunt coliniare.
a) $A(2, 4)$, $B(1, -2)$, $C(m, 5)$; b) $A(0, 3)$, $B(-5, 2m)$, $C(1, 4)$.

EXERSEAZĂ!

1. Deschide o pagină goală în *GeoGebra* (Calculator de grafice) și setează limba română.

2. În bara de introducere:

- Scrie $m = 1$ și apasă *Enter*. Fă click pe cele trei puncte din dreapta și apoi pe *Creare Cursor*.

- Scrie $n = 2$ și apasă *Enter*. Fă click pe cele trei puncte din dreapta și apoi pe *Creează cursor*.

- Scrie $y = m \cdot x + n$.

3. Mișcă sliderul pentru m . Ce se întâmplă cu dreapta când $m > 0$? Dar când $m < 0$? Ce valoare are m când dreapta este orizontală?

4. Fixează $m = 2$ și mișcă sliderul pentru n . Urmărește punctul în care dreapta intersectează axa Oy . Ce legătură este între valoarea lui n și acest punct?

EXERSEAZĂ!

Într-un experiment de fizică, se studiază lungimea unui arc elastic în funcție de masa greutăților atașate de acesta (legea lui Hooke). Când nu are nicio greutate atașată, lungimea arcului este de 15 cm. Când se agață o masă de 2 kg, lungimea arcului devine 21 cm.

a) Determină ecuația dreptei care descrie lungimea arcului în funcție de masa atașată. Care este panta acestei drepte și ce semnificație practică are aceasta?

b) Să presupunem că arcul se înlocuiește cu unul mai rigid, care are o alungire de 1,5 cm pentru fiecare kilogram, dar aceeași lungime inițială de 15 cm. Cum se modifică panta și ecuația dreptei care descrie lungimea arcului în funcție de masa atașată? Cum putem vizualiza această modificare în GeoGebra?

15. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d care conține punctul A și are panta dată m . Determină coordonatele punctelor de intersecție a dreptei d cu axele de coordonate Ox și Oy .
 - a) $A(1, -3)$, $m = -2$; b) $A(-1, -2)$, $m = 3$; c) $A(-1, 2)$, $m = 5$.
16. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1 și d_2 . Stabilește dacă dreptele d_1 și d_2 sunt concurente. În caz afirmativ, determină coordonatele punctului de intersecție.
 - a) $d_1: 2y + 4 = 0$, $d_2: x = -2$; d) $d_1: 2x - 3y + 7 = 0$, $d_2: 2x - 3y + 8 = 0$;
 - b) $d_1: x - 2y = 0$, $d_2: 2x - 3y - 2 = 0$; e) $d_1: 3x - y + 5 = 0$, $d_2: 2x + 3y - 3 = 0$;
 - c) $d_1: x = -1$, $d_2: x - 2 = 0$; f) $d_1: 2x - 2y - 2 = 0$, $d_2: -3x + 3y + 3 = 0$.
17. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d și punctele A și B . Determină numerele reale m și n pentru care punctele A și B aparțin dreptei d .
 - a) $A(1, 2)$, $B(0, 4)$, $d: mx - 2y + n = 0$; b) $A(-4, 0)$, $B(-1, -3)$, $d: -3x + my - 4n = 0$.
18. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2, 4)$, $N(6, 0)$, $P(-2, -4)$.
 - a) Scrie ecuațiile laturilor triunghiului MNP .
 - b) Punctele M , N și P sunt mijloacele laturilor AB , BC și, respectiv, CA , ale triunghiului ABC . Scrie ecuațiile laturilor triunghiului ABC .
19. În reperul cartezian xOy se consideră paralelogramul $ABCD$ cu centrul în punctul M . Scrie ecuațiile dreptelor suport ale laturilor și ale diagonalelor paralelogramului $ABCD$.
 - a) $A(-3, -1)$, $B(0, 2)$, $M(1, 0)$; b) $B(-1, 4)$, $C(3, 1)$, $M(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.
20. O companie de taxi percepe o taxă de pornire de 5 lei și 3 lei pentru fiecare kilometru parcurs. 
 - a) Scrie relația care descrie dependența dintre costul total al unei curse și numărul de kilometri parcurși.
 - b) Reprezintă grafic dependența în reperul cartezian xOy .
 - c) Determină panta dreptei care descrie dependența dintre costul total al unei curse și numărul de kilometri parcurși.
21. Un serviciu de livrare are un tarif fix și un tarif pe kilometru parcurs. O cursă de 2 km costă 14 lei, iar o cursă de 5 km costă 23 de lei.
 - a) Scrie ecuația dreptei care descrie dependența dintre distanța parcursă și costul total al unei curse.
 - b) Determină panta dreptei prin care se reprezintă geometric dependența dintre costul total al unei curse și distanța parcursă.
22. Pe imaginea unui preparat microscopic, mișcarea unei celule este monitorizată într-un sistem de coordonate cartezian xOy . La două momente de timp succesive, celula este localizată în punctele $A(-2, 1)$ și $B(4, 4)$, deplasându-se pe o traiectorie rectilinie.
 - a) Determină distanța parcursă de celulă între cele două momente de observație.
 - b) Scrie ecuația dreptei care modelează traiectoria celulei.
 - c) Identifică coordonatele punctului în care dreapta care modelează traiectoria celulei intersectează axa Oy și explică semnificația acestui punct în contextul monitorizării poziției celulei față de centrul de referință al preparatului.

4. Pozițiile relative ale unei drepte față de axe de coordonate; pozițiile relative a două drepte

Descopăr



În cadrul unui experiment de fizică, mișcarea rectilinie a patru particule, P_1, P_2, P_3, P_4 , este monitorizată prin reprezentarea traiectoriilor acestora într-un reper cartezian xOy .

Datele experimentale colectate sunt:

- Particula P_1 : Traiectoria trece prin punctele $A(2, -1)$ și $B(8, 2)$.
- Particula P_2 : Traiectoria trece prin punctele $C(0, -5)$ și $D(6, -2)$.
- Particula P_3 : Traiectoria trece prin punctele $E(2, 5)$ și $F(5, 2)$.
- Particula P_4 : Traiectoria trece prin punctele $G(-2, 1)$ și $H(-8, -2)$.

a) Reprezintă punctele A, B, C, D, E, F, G și H în reperul cartezian xOy folosind aplicația *GeoGebra* și trasează dreptele care modelează mișcarea particulelor. Ce observi?

b) Determină pantele celor patru drepte care modelează mișcarea particulelor.

c) Stabilește dacă dreptele care modelează mișcarea particulelor sunt concurente sau paralele. Verifică dacă reprezentarea grafică din *GeoGebra* corespunde calculelor matematice.

d) Scrie ecuațiile dreptelor care modelează mișcarea particulelor. Ce observi?

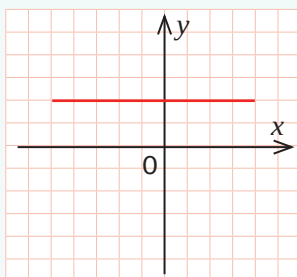


Învăț

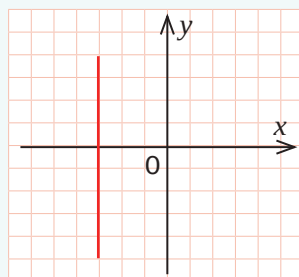
În această lecție vom considera, în plan, reperul cartezian xOy .

După poziția față de axele Ox și Oy ale reperului cartezian xOy , o dreaptă din plan poate fi:

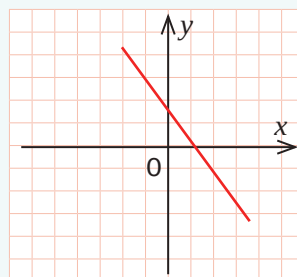
- orizontală – paralelă cu axa Ox (figura 1);
- verticală – paralelă cu axa Oy (figura 2);
- oblică – nu este paralelă nici cu axa Ox , nici cu axa Oy (figurile 3 și 4).



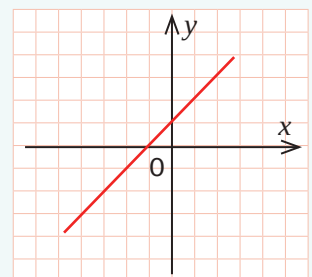
dreaptă orizontală
Figura 1



dreaptă verticală
Figura 2



dreaptă oblică
Figura 3



dreaptă oblică
Figura 4

OBSERVAȚII.

1. Ecuația carteziană generală a unei drepte verticale este $x - c = 0$, unde c este număr real.
2. Ecuația carteziană generală a unei drepte orizontale este $y - c = 0$, unde c este număr real.

3. Ecuația carteziană generală a unei drepte oblice este $ax + by + c = 0$, unde a, b, c sunt numere reale, $a \neq 0, b \neq 0$.

Oricum am considera două drepte în plan, acestea pot fi paralele, concurente sau confundate.

OBSERVAȚII.

1. Oricare două drepte orizontale sunt paralele.
2. Oricare drepte verticale sunt paralele.
3. O dreaptă verticală nu este paralelă cu o dreaptă oblică sau cu o dreaptă orizontală.
4. Orice dreaptă orizontală este concurentă cu orice dreaptă verticală și cu orice dreaptă oblică.
5. Două drepte care nu au aceeași poziție față de axele Ox și Oy nu pot fi confundate.

Ne vom ocupa în continuare de pozițiile relative a două drepte oblice.

În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, unde $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}^*$ și $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Dreptele distincte d_1 și d_2 sunt paralele dacă și numai dacă $m_{d_1} = m_{d_2}$. Cum $m_{d_1} = -\frac{a_1}{b_1}$ și $m_{d_2} = -\frac{a_2}{b_2}$, rezultă $d_1 \parallel d_2$ dacă și numai dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$. Folosind proporții derivate, obținem $d_1 \parallel d_2$ dacă și numai dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

Teorema 1. Dreptele distincte $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, unde $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}^*$ și $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, sunt paralele dacă și numai dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

EXEMPLU:

În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1: 2x - 5y + 7 = 0$ și $d_2: -4x + 10y - 2 = 0$. Calculând rapoartele $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$, și $\frac{c_1}{c_2}$, obținem $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$ și $\frac{c_1}{c_2} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}$, de unde rezultă că dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.

Teorema 2. Dreptele $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, unde $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}^*$ și $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, sunt concurente dacă și numai dacă $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

EXEMPLU:

În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1: -x + 7y - 5 = 0$ și $d_2: 5x - 2y + 4 = 0$.

Calculăm rapoartele $\frac{a_1}{a_2}$ și $\frac{b_1}{b_2}$ și obținem $\frac{a_1}{a_2} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}$ și $\frac{b_1}{b_2} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}$. Cum $-\frac{1}{5} \neq -\frac{7}{2}$, rezultă că dreptele d_1 și d_2 sunt concurente.

Teorema 3. Dreptele $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, unde $a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*$, sunt confundate dacă și numai dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

EXEMPLU:

În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1: x - 2y + 1 = 0$ și $d_2: -3x + 6y - 3 = 0$.

Calculăm rapoartele $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{c_2}$ și obținem $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$ și $\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$. Cum $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, rezultă că dreptele d_1 și d_2 sunt confundate.

OBSERVAȚIE.

Dreptele $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, unde $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}^*$ și $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, sunt perpendiculare dacă și numai dacă $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

EXEMPLU:

În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1: 2x - 3y - 5 = 0$ și $d_2: -6x - 4y + 4 = 0$.

Calculăm produsele a_1a_2 și b_1b_2 și obținem $a_1a_2 = 2 \cdot (-6) = -12$ și $b_1b_2 = (-3) \cdot (-4) = 12$.

Cum $a_1a_2 + b_1b_2 = (-12) + 12 = 0$, rezultă că dreptele d_1 și d_2 sunt perpendiculare.

OBSERVAȚIE.

Orice dreaptă verticală este perpendiculară pe orice dreaptă orizontală.

Studiul poziției a două drepte în plan poate fi prezentat ca discuție a unui sistem de două ecuații cu două necunoscute.

În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, unde $a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atașăm sistemul de ecuații
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Acest sistem de ecuații poate avea o singură soluție, nicio soluție sau o infinitate de soluții, fiecare dintre aceste situații fiind echivalentă cu o anumită poziție a dreptelor d_1 și d_2 . Astfel:

- Sistemul de ecuații are soluție unică dacă și numai dacă dreptele d_1 și d_2 sunt concurente.
- Sistemul de ecuații nu are soluție dacă și numai dacă dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.
- Sistemul de ecuații are o infinitate de soluții dacă și numai dacă dreptele d_1 și d_2 sunt confundate.

EXEMPLE:

1. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1: 2x + 3y + 5 = 0$ și $d_2: 3x - 2y - 12 = 0$. Pentru a stabili poziția relativă a dreptelor d_1 și d_2 scriem și rezolvăm următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5 = 0 \\ 3x - 2y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -5 \quad | \cdot 2 \\ 3x - 2y = 12 \quad | \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y = -10 \\ 9x - 6y = 36 \end{cases}$$

$$13x = 26 \Leftrightarrow x = 2$$

$$2 \cdot 2 + 3y = -5 \Leftrightarrow 4 + 3y = -5 \Leftrightarrow 3y = -5 - 4 \Leftrightarrow 3y = -9 \Leftrightarrow y = -3$$

Sistemul de ecuații are soluția $(2, -3)$, deci dreptele d_1 și d_2 sunt concurente în punctul de coordonate $(2, -3)$.

2. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1: -3x + 2y = 0$ și $d_2: 6x - 4y - 5 = 0$. Pentru a stabili poziția relativă a dreptelor d_1 și d_2 scriem și rezolvăm următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ 6x - 4y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 0 \quad | \cdot 2 \\ 6x - 4y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 4y = 0 \\ 6x - 4y = 5 \end{cases}$$

$$0 = 5 \text{ (ceea ce este fals)}$$

Sistemul de ecuații nu are soluție, deci dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.

3. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1: 4x + 2y - 6 = 0$ și $d_2: 2x + y - 3 = 0$. Pentru a stabili poziția relativă a dreptelor d_1 și d_2 scriem și rezolvăm sistemul de ecuații atașat:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 6 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ -4x - 2y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 0 = 0 \text{ (ceea ce este adevărat)} \end{matrix}$$

Sistemul de ecuații are o infinitate de soluții, deci dreptele d_1 și d_2 sunt confundate.

Exerciții rezolvate

1. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $6x - 2y + 1 = 0$ și punctul $A(-3, 5)$. Scrie ecuația dreptei care conține punctul A și este paralelă cu dreapta d .

Rezolvare:

Fie g dreapta care conține punctul A și este paralelă cu dreapta d . Ecuația dreptei g este $y - y_A = m_g(x - x_A)$.

$$\left. \begin{aligned} d \parallel g &\Rightarrow m_d = m_g \\ m_d &= -\frac{6}{-2} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_g = 3$$

Atunci, $g: y - 5 = 3(x + 3)$, de unde obținem $g: y = 3x + 14$ sau $g: 3x - y + 14 = 0$.

2. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $2x - 8y - 5 = 0$ și punctul $A(2, -8)$. Scrie ecuația dreptei care conține punctul A și este perpendiculară pe dreapta d .

Rezolvare:

Fie g dreapta care conține punctul A și este perpendiculară pe dreapta d . Ecuația dreptei g este $y - y_A = m_g(x - x_A)$.

$$\left. \begin{aligned} d \perp g &\Rightarrow m_d \cdot m_g = -1 \\ m_d &= -\frac{2}{-8} = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot m_g = -1 \Rightarrow m_g = -4$$

Atunci, $g: y + 8 = -4(x - 2)$, de unde obținem $g: y = -4x$ sau $g: 4x + y = 0$.

Aplică

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A și B . Scrie ecuația dreptei care conține punctele A și B și precizează poziția acestora față de axele de coordonate Ox și Oy .
- a) $A(5, 3), B(5, 7)$; b) $A(0, -2), B(3, 4)$; c) $A(-5, -6), B(3, -6)$.
2. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1 și d_2 . Stabilește dacă dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.
- a) $d_1: 2x + 4 = 0, d_2: x = 5$; c) $d_1: 3x - 2y = 0, d_2: -6x + 4y - 5 = 0$;
b) $d_1: 2x - 3y + 5 = 0, d_2: 2x + 6y - 2 = 0$; d) $d_1: x - 3y + 1 = 0, d_2: 2x + 6y - 2 = 0$.

INDICAȚIE

Rezolvă problemele 1-5 și folosind un instrument digital (GeoGebra sau Desmos).

3. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1 și d_2 . Stabilește dacă dreptele d_1 și d_2 sunt concurente.
- a) $d_1: 3y + 4 = 0, d_2: x = -2$; c) $d_1: 4x - 3y = 0, d_2: -6x + 4y - 1 = 0$;
b) $d_1: 2x - 3y = 0, d_2: 2x - 3y - 2 = 0$; d) $d_1: 3x - 2y + 1 = 0, d_2: x + 6y - 1 = 0$.
4. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1 și d_2 . Stabilește dacă dreptele d_1 și d_2 sunt confundate.
- a) $d_1: y + 4 = 0, d_2: x = -4$; c) $d_1: x + 2y + 2 = 0, d_2: -2x - 4y + 4 = 0$;
b) $d_1: x - 3y = 0, d_2: 2x - 6y = 0$; d) $d_1: 3x - y + 1 = 0, d_2: 9x - 3y + 3 = 0$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1 și d_2 . Stabilește poziția relativă a dreptelor d_1 și d_2 .
- a) $d_1: 2y + 4 = 0, d_2: x = -2$; d) $d_1: 2x - 3y + 7 = 0, d_2: 2x - 3y + 8 = 0$;
b) $d_1: x - 2y = 0, d_2: 2x - 3y - 2 = 0$; e) $d_1: 3x - y + 5 = 0, d_2: 2x + 3y - 3 = 0$;
c) $d_1: x = -1, d_2: x - 2 = 0$; f) $d_1: 2x - 2y - 2 = 0, d_2: -3x + 3y + 3 = 0$.
6. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1 și d_2 . Determină numărul real m pentru care dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.
- a) $d_1: 2x - y + 4 = 0, d_2: x - my + 1 = 0$;
b) $d_1: mx - 3y = 0, d_2: 2x - 12y + 5 = 0$;
c) $d_1: 3x - my + 1 = 0, d_2: 6x - 3y + 2 = 0$;
d) $d_1: -4x - my + 5 = 0, d_2: 2x + 3y - 1 = 0$.
7. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1 și d_2 . Stabilește dacă dreptele d_1 și d_2 sunt perpendiculare.
- a) $d_1: 2x + 5 = 0, d_2: 3y - 4 = 0$; c) $d_1: 2x - 6y + 5 = 0, d_2: -3x + y + 1 = 0$;
b) $d_1: x - 2y = 0, d_2: 4x + 2y - 2 = 0$; d) $d_1: 3x - 2y + 1 = 0, d_2: 3x - 2y - 3 = 0$.
8. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1 și d_2 . Determină numărul real m pentru care dreptele d_1 și d_2 sunt perpendiculare.
- a) $d_1: x - y + 4 = 0, d_2: -x - my + 2 = 0$;
b) $d_1: mx + 2y = 0, d_2: 3x - 4my + 5 = 0$;
c) $d_1: 5x - 2my + 1 = 0, d_2: x - 3y + 1 = 0$;
d) $d_1: -2x + 3my + 5 = 0, d_2: 2x + 4y - 2 = 0$.
9. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1 și d_2 . Determină coordonatele punctului de intersecție a dreptelor d_1 și d_2 .
- a) $d_1: y + 3 = 0, d_2: x = -4$; c) $d_1: 5x - 2y + 12 = 0, d_2: 3x + 4y + 2 = 0$;
b) $d_1: x + y - 1 = 0, d_2: 3x + y - 3 = 0$; d) $d_1: 3x + 7y + 15 = 0, d_2: 2x - y - 7 = 0$.
10. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d și punctul A. Scrie ecuația dreptei care conține punctul A și este paralelă cu dreapta d .
- a) $A(-2, 4), d: y = 3x + 1$;
b) $A(1, 0), d: 2x - y + 2 = 0$;
c) $A(4, -1), d: 3x + 4y - 5 = 0$.
11. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 3), B(2, 5)$ și $C(3, -2)$.
- a) Scrie ecuația dreptei care conține punctul A și este paralelă cu dreapta BC.
b) Scrie ecuația dreptei care conține punctul C și este paralelă cu dreapta AB.

EXERSEAZĂ!

1. Deschide o pagină goală în *GeoGebra* (Calculator de grafice/*Graphing*)
2. Creează patru itemi de intrare (*slidere*):
 $m_1 = 2, n_1 = 1,$
 $m_2 = -1, n_2 = 3.$
3. Introdu apoi ecuațiile celor două drepte:
 $y = m_1 \cdot x + n_1$
 $y = m_2 \cdot x + n_2$
4. Folosește instrumentul *Intersecție/Intersect* și selectează cele două drepte. Se va afișa punctul comun A.
5. Modifică valorile itemilor de intrare până când punctul A dispăre. Cum sunt dreptele? Ce observi legat de pantele m_1 și m_2 ?
6. Folosește instrumentul *Angle* și selectează cele două drepte pentru a măsura unghiul format de acestea (se aleg laturile unghiului ascuțit). Modifică parametrii până când unghiul devine drept și calculează produsul pantelor acestora. Ce rezultat obții?

12. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $(m^2 - 3m - 4)x + 3(m + 2)y + 2m - 4 = 0$, unde m este număr real.
- Determină valorile numărului real m pentru care dreapta d este paralelă cu axa Ox .
 - Determină numărul real m pentru care dreapta d este paralelă cu axa Oy .
13. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4, 1)$, $B(-1, 2)$, $C(-2, 5)$, D și $M(5, -3)$, astfel încât $ABCD$ este pătrat. Scrie ecuațiile dreptelor care conțin punctul M și sunt paralele cu diagonalele pătratului $ABCD$.
14. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d și punctul A . Scrie ecuația dreptei care conține punctul A și este perpendiculară pe dreapta d .
- $A(1, 5)$, $d: y = \frac{1}{5}x - 4$;
 - $A(1, -3)$, $d: 2x - 2y + 3 = 0$;
 - $A(-1, -2)$, $d: 2x - 5y + 1 = 0$.
15. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 0)$, $B(-2, 4)$ și $C(-3, -5)$.
- Scrie ecuația dreptei care conține punctul A și este perpendiculară pe dreapta BC .
 - Scrie ecuația dreptei care conține punctul C și este perpendiculară pe dreapta AB .
16. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A și B . Scrie ecuația mediatoarei segmentului AB .
- $A(2, 3)$, $B(-4, 5)$;
 - $A(-2, -4)$, $B(-1, 3)$.
17. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A , B , C și H . Demonstrează că punctul H este ortocentrul triunghiului ABC .
- $A(-1, 2)$, $B(5, 2)$, $C(3, 6)$, $H(3, 4)$;
 - $A(2, 2)$, $B(10, 2)$, $C(3, 3)$, $H(3, 9)$.
18. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, -2)$, $B(-1, 6)$ și $C(7, 2)$.
- Scrie ecuațiile dreptelor suport ale înălțimilor triunghiului ABC .
 - Determină coordonatele ortocentrului triunghiului ABC .
 - Scrie ecuațiile mediatoarelor laturilor triunghiului ABC .
19. Două nave se deplasează pe traiectorii rectilinii. Într-un reper cartezian în care sunt reprezentate traiectoriile acestora, una dintre nave se deplasează pe dreapta d de ecuație $d: x - y + 2 = 0$, iar cealaltă de deplasează pe dreapta g de ecuație $g: 2x + y - 8 = 0$. Determină coordonatele punctului în care traiectoriile celor două nave se intersectează.
20. În cadrul unei unități de producție chimică, poziția unei conducte principale de transport este modelată matematic în reperul cartezian xOy prin dreapta d de ecuație $d: 2x - y + 1 = 0$. Un rezervor de stocare este amplasat în punctul $R(3, 5)$. Pentru a conecta rezervorul la conducta principală, se proiectează o conductă de legătură care să urmeze cel mai scurt traseu posibil. Unitatea de măsură din reperul cartezian xOy corespunde unei distanțe de 50 m în teren.
- Scrie ecuația dreptei care modelează traseul conductei de legătură.
 - Determină coordonatele punctului în care conducta de legătură se va intersecta cu conducta principală.
 - Calculează lungimea conductei de legătură.

5. Ecuația cercului

Descopăr

Într-un reper cartezian xOy , o stație radar este situată în punctul $A(2, 3)$. Radarul are o rază de acțiune constantă de 5 unități. Trei obiecte se află în punctele de coordonate $B(3, 4)$, $C(5, 7)$ și $D(-3, -2)$.

- Care dintre cele trei obiecte se află în zona de monitorizare a radarului?
- Determină coordonatele punctelor aflate la intersecția dintre axele Ox și Oy și limita zonei de monitorizare a radarului.
- Un punct $P(a, a)$, unde a este număr real, se află exact pe limita zonei de monitorizare a radarului. Determină valorile numărului real a .
- Ce relație trebuie să existe între coordonatele punctului $M(x_M, y_M)$ pentru ca un obiect aflat în acest punct să fie localizat exact la limita zonei de monitorizare a radarului?



Învăț

Știți din clasele anterioare că **figura geometrică formată din toate punctele din plan care se află la aceeași distanță de un punct fix (numit centru) se numește cerc**.

Dacă C este centrul cercului, iar M este un punct oarecare al cercului, atunci distanța $CM = r$ se numește rază.

Ecuația cercului

Considerăm în plan un reper cartezian xOy . Fie $C(a, b)$ un punct fix, un număr real $r > 0$ și cercul $\mathcal{C}$ de centru C și rază r . Un punct oarecare din plan, $M(x, y)$, aparține cercului $\mathcal{C}$ dacă și numai dacă $CM = r$, adică $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$.

Altfel spus, **punctul $M(x, y)$ aparține cercului cu centrul în punctul $C(a, b)$ și raza r dacă și numai dacă:**

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (1)$$

Ecuația (1) este ecuația cercului de rază r , cu centrul în punctul de coordonate (a, b) . Aceasta se numește **ecuația restrânsă a cercului**.

EXEMPLU:

Ecuația restrânsă a cercului cu centrul în punctul $A(-1, 2)$ și raza $r = 4$ este $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

Dacă centrul cercului este originea reperului cartezian, punctul O , atunci ecuația (1) devine $x^2 + y^2 = r^2$ (**ecuația canonică a cercului**).

Dacă dezvoltăm parantezele din primul membru al ecuației (1), obținem:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Înlocuind $-a = m$, $-b = n$ și $a^2 + b^2 - r^2 = p$, obținem $x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0$ (**ecuația generală a cercului**).

În continuare vom descoperi care sunt condițiile care trebuie îndeplinite pentru ca o ecuație de forma $x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0$ să reprezinte ecuația unui cerc.

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2mx + m^2) + (y^2 + 2ny + n^2) + p - m^2 - n^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + m)^2 + (y + n)^2 + p - m^2 - n^2 = 0 \Leftrightarrow (x + m)^2 + (y + n)^2 = m^2 + n^2 - p$$

O ecuație de forma $x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0$ reprezintă ecuația unui cerc dacă și numai dacă $m^2 + n^2 - p > 0$.

EXEMPLE:

1. Ecuația $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ reprezintă ecuația unui cerc ($m = 2, n = -3, p = -3$ și $m^2 + n^2 - p = 4 + 9 + 3 = 16 > 0$).

În continuare determinăm coordonatele centrului și raza acestui cerc.

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 - 4 - 9 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$$

Așadar, centrul cercului are coordonatele $(-2, 3)$, iar raza acestuia este 4.

2. Ecuația $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5 = 0$ nu reprezintă ecuația unui cerc ($m = 2, n = 1, p = 5$ și $m^2 + n^2 - p = 4 + 1 - 5 = 0$).

Într-adevăr:

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ și } y = -1. (2)$$

Din relația (2), deducem că ecuația $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5 = 0$ reprezintă un punct.

Poziția unei drepte față de un cerc

În reperul cartezian xOy considerăm dreapta d_1 de ecuație $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ (unde $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$, iar a_1, b_1 nu sunt simultan nule) și cercul de ecuație $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (unde $a, b, r \in \mathbb{R}, r > 0$). Notăm cu C centrul cercului, deci punctul C are coordonatele (a, b) .

Dacă centrul cercului aparține dreptei d_1 , atunci dreapta d_1 intersectează cercul în două puncte distincte (**dreapta este secantă cercului**).

Dacă centrul cercului nu aparține dreptei d_1 , perpendiculara din C pe dreapta d_1 intersectează această dreaptă în punctul M . Pentru a determina poziția dreptei d_1 față de cercul cu centrul în punctul C și raza r , vom compara distanța dintre punctele C și M cu r . Se disting următoarele cazuri:

- Dacă $CM < r$, atunci dreapta intersectează cercul în două puncte distincte (**dreapta este secantă cercului**).
- Dacă $CM = r$, atunci dreapta și cercul au un singur punct comun (**dreapta este tangentă cercului**).
- Dacă $CM > r$, atunci dreapta nu intersectează cercul (**dreapta este exterioară cercului**).

• Dacă $b_1 \neq 0$ și $a_1 \neq 0$, pentru a calcula lungimea segmentului CM procedăm astfel:

- Scriem ecuația dreptei d care conține centrul cercului, punctul $C(a, b)$, și este perpendiculară pe dreapta d_1 .

Cum dreptele d_1 și d sunt perpendiculare ($m_d \cdot m_{d_1} = -1$) și $m_{d_1} = -\frac{a_1}{b_1}$, rezultă că $m_d = \frac{b_1}{a_1}$. Ecuația dreptei d

$$\text{este } y - b = \frac{b_1}{a_1}(x - a) \text{ sau } y = \frac{b_1}{a_1}(x - a) + b.$$

- Determinăm coordonatele punctului M (punctul de intersecție dintre dreptele d și d_1) prin rezolvarea

$$\text{sistemului de ecuații } \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ y = \frac{b_1}{a_1}(x - a) + b \end{cases}.$$

- Calculăm distanța dintre punctele C și M folosind formula distanței dintre două puncte.

• Dacă $b_1 \neq 0$ și $a_1 = 0$, atunci dreapta d_1 are ecuația $b_1y + c_1 = 0$. Observăm că dreapta d_1 este o dreaptă orizontală, deci distanța de la punctul $C(a, b)$ la dreapta d_1 este $\left| b + \frac{c_1}{b_1} \right|$.

- Dacă $b_1 = 0$ și $a_1 \neq 0$, atunci dreapta d_1 are ecuația $a_1 x + c_1 = 0$. Observăm că dreapta d_1 este o dreaptă verticală, deci distanța de la punctul $C(a, b)$ la dreapta d_1 este $\left| a + \frac{c_1}{a_1} \right|$.

EXEMPLU:

În reperul cartezian xOy considerăm dreapta d de ecuație $x + y - 1 = 0$ și cercul de ecuație $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Observăm că $r = 2$ și centrul cercului, punctul $C(1, 2)$, nu aparține dreptei d . Fie g dreapta care conține punctul $C(1, 2)$ și este perpendiculară pe dreapta d , iar $d \cap g = \{M\}$.

$$\left. \begin{array}{l} m_d \cdot m_g = -1 \\ m_d = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow m_g = 1$$

Ecuația dreptei g este $y - 2 = x - 1$.

Pentru a determina coordonatele punctului M , rezolvăm sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y - 2 = x - 1 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y - 2 = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + x + 1 - 1 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Coordonatele punctului M sunt $(0, 1)$.

Calculăm distanța dintre punctele C și M : $CM = \sqrt{(0 - 1)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{2}$

Cum $\sqrt{2} < 2$, rezultă că $CM < r$, deci dreapta d este secantă cercului.

Exerciții rezolvate

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(\sqrt{5}, -1 + \sqrt{5})$ și cercul $\mathcal{C}$ de ecuație $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 12$. Stabilește poziția punctului M față de cercul $\mathcal{C}$.

Rezolvare:

Centrul cercului $\mathcal{C}$ este punctul $C(3, -2)$, iar raza acestuia este egală cu $2\sqrt{3}$.

$$CM = \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2 + (-1 + \sqrt{5} + 2)^2} = \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2 + (1 + \sqrt{5})^2} =$$

$$= \sqrt{5 - 6\sqrt{5} + 9 + 1 + 2\sqrt{5} + 5} = \sqrt{20 - 4\sqrt{5}}$$

$$8 < 4\sqrt{5} < 9 \Leftrightarrow -9 < -4\sqrt{5} < -8 \Leftrightarrow 11 < 20 - 4\sqrt{5} < 12 \Leftrightarrow \sqrt{11} < \sqrt{20 - 4\sqrt{5}} < \sqrt{12}$$

Am obținut $CM < \sqrt{12}$, adică $CM < 2\sqrt{3}$, de unde rezultă că punctul M aparține interiorului cercului $\mathcal{C}$.

2. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(1, 2)$ și cercul $\mathcal{C}$ de ecuație $x^2 + y^2 + 4x - 5y + 1 = 0$. Scrie ecuația tangentei la cercul $\mathcal{C}$ în punctul A .

Rezolvare:

$$x^2 + y^2 + 4x - 5y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4) + \left(y^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}y + \frac{25}{4}\right) - \frac{25}{4} + 1 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{37}{4}$$

Centrul cercului $\mathcal{C}$ este punctul $C(-2, \frac{5}{2})$.

Tangenta la cerc în punctul A este o dreaptă d care conține punctul A și este perpendiculară pe dreapta AC .

$$\left. \begin{array}{l} m_d \cdot m_{AC} = -1 \\ m_{AC} = \frac{\frac{5}{2} - 2}{-2 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{-3} = -\frac{1}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow m_d = 6$$

Ecuația dreptei d este $y - 2 = 6(x - 1)$, adică $y = 6x - 4$.

Ecuația tangentei la cercul $\mathcal{C}$ în punctul A este $y = 6x - 4$.



PROVOCARE!

Rezolvă problemele 1-4 cu ajutorul unuia dintre instrumentele digitale *Geogebra* sau *Desmos*.

Aplic

- Verifică dacă ecuațiile următoare sunt ecuațiile unor cercuri:
 - $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 20 = 0$;
 - $x^2 + y^2 + 3x + 5y - 1 = 0$.
- În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 3)$ și $B(6, 6)$. Stabilește poziția punctului B față de cercul cu centrul în punctul A și raza egală cu 5.
- În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 3)$, $B(-2, -1)$, $C(3, 2)$, $D(-3, -4)$.
 - Verifică dacă punctul A aparține cercului de ecuație $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 32$.
 - Verifică dacă punctul B aparține cercului de ecuație $(x + \sqrt{2})^2 + (y - 2\sqrt{2})^2 = 15$.
 - Verifică dacă punctul C aparține cercului de ecuație $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$.
 - Verifică dacă punctul D aparține cercului cu centrul în punctul O și raza egală cu 5.
- În reperul cartezian xOy se consideră punctul M și cercul $\mathcal{C}$. Stabilește poziția punctului M față de cercul $\mathcal{C}$.
 - $M(-3, 4)$, $\mathcal{C}: (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$;
 - $M(4, 9)$, $\mathcal{C}: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 100$;
 - $M(2\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, $\mathcal{C}: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$.
- Scrie ecuația restrânsă a cercului care are centrul în punctul C și raza r .
 - $C(0, -2)$, $r = 3$;
 - $C(-3, -3)$, $r = 5$;
 - $C(1, 0)$, $r = 4$;
 - $C(-3, \frac{1}{2})$, $r = 1$.
- Scrie ecuația generală a cercului care are centrul în punctul C și raza r .
 - $C(-3, 1)$, $r = \sqrt{2}$;
 - $C(2, -2)$, $r = 2$;
 - $C(-2, 1)$, $r = \frac{2}{3}$;
 - $C(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $r = 1$.
- În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2, 1)$ și $B(1, -2)$.
 - Determină raza cercului care are centrul în punctul A și conține punctul B .
 - Determină ecuația cercului al cărui diametru este segmentul AB .
 - Scrie ecuația cercului care are centrul în punctul B și conține punctul A .
- Determină coordonatele centrelor și razele cercurilor care au ecuațiile următoare:
 - $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 9$;
 - $(x - 2\sqrt{3})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 3$;
 - $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$;
 - $x^2 + y^2 + x - 3y + 2 = 0$.
- În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 0)$ și $B(0, -4)$.
 - Scrie ecuația cercului care are centrul în punctul O și conține mijlocul segmentului AB .
 - Scrie ecuația cercului care are centrul în punctul A și are ca tangentă axa Oy .
 - Scrie ecuația cercului care are centrul în punctul B și are ca tangentă axa Ox .
 - Scrie ecuația cercului care are centrul în punctul O și are ca tangentă dreapta AB .
- În reperul cartezian xOy se consideră punctul C și dreapta d . Scrie ecuația cercului care are centrul în punctul C și are ca tangentă dreapta d .
 - $C(-3, 2)$, $d: y = -5$;
 - $C(2, -5)$, $d: x = 4$;
 - $C(3, 1)$, $d: y = 2x - 3$;
 - $C(0, -4)$, $d: y = -x + 2$;
 - $C(1, 5)$, $d: 2x + 3y - 6 = 0$;
 - $C(-1, -4)$, $d: 3x - 2y + 4 = 0$.

11. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d și cercul $\mathcal{C}$. Determină poziția dreptei d față de cercul $\mathcal{C}$.
- a) $d: y = 4$, $\mathcal{C}: (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$;
 b) $d: 3x + 4y - 31 = 0$, $\mathcal{C}: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$;
 c) $d: x - y + 1 = 0$, $\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$.
12. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, P și Q. Determină poziția dreptei PQ față de cercul cu centrul în punctul A și raza r .
- a) $P(0, 6)$, $Q(8, 0)$, $A(2, 3)$, $r = 5$; b) $P(-1, -1)$, $Q(2, 2)$, $A(3, 0)$, $r = 2$.
13. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B, P și Q. Determină poziția dreptei PQ față de cercul cu centrul în punctul A și care conține punctul B.
- a) $P(1, 6)$, $Q(5, 3)$, $A(4, 5)$, $B(6, 4)$; b) $P(1, 5)$, $Q(7, -3)$, $A(1, -2)$, $B(4, 2)$.
14. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A, B, P și Q. Determină poziția dreptei PQ față de cercul cu diametrul AB.
- a) $P(1, 2)$, $Q(5, 5)$, $A(2, 5)$, $B(6, 1)$; b) $P(-1, 5)$, $Q(3, 2)$, $A(1, 1)$, $B(5, 5)$.
15. În reperul cartezian xOy se consideră punctul A și cercul $\mathcal{C}$. Scrie ecuația tangentei la cercul $\mathcal{C}$ în punctul A.
- a) $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 25$, $A(-3, 4)$; c) $\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$, $A(5, 0)$;
 b) $\mathcal{C}: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$, $A(2, 1)$; d) $\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 3x + 6y + 4 = 0$, $A(4, -2)$.
16. Primăria unui oraș își propune să amenajeze un parc de formă circulară. Schița parcului se realizează într-un reper cartezian xOy . În schiță, centrul parcului este situat în punctul $C(2, 3)$, iar raza parcului este $r = 5$ unități de lungime. Persoanele și reprezentanții instituțiilor implicate în acest proiect analizează mai multe aspecte legate de amplasarea unor obiective și a unor drumuri în raport cu acest parc.
- a) Scrie ecuația cercului care delimitează parcul.
 b) Se propun următoarele puncte pentru amplasarea unor obiective: $A(6, 6)$, $B(2, 8)$ și $D(-1, 3)$. Stabilește pentru fiecare punct poziția față de cercul care delimitează parcul.
 c) Se propune construirea unei alei sub forma unei drepte care să fie tangentă la parc în punctul $M(7, 3)$. Scrie ecuația dreptei prin care este reprezentată aleea în schiță.
 d) Se recomandă realizarea unui drum drept de ecuație $x + y - 15 = 0$. Stabilește poziția acestui drum față de cercul care delimitează parcul.
 e) Realizează schița parcului (poziționează obiectivele, trasează aleea și drumul) folosind un instrument digital (*GeoGebra* sau *Desmos*).
17. Într-un lac a fost identificat un punct de poluare cu o substanță care se răspândește uniform în toate direcțiile, formând o zonă circulară de contaminare cu raza de 600 m. Pentru monitorizarea răspândirii substanței poluante, a fost realizată o schiță a zonei la scara 1:10 000, într-un reper cartezian xOy . În schiță, punctul de poluare este $O(0, 0)$.
- a) Scrie ecuația cercului care mărginește, în schiță, zona contaminată.
 b) Pentru cercetarea apei, se colectează mostre din punctele $A(3, 4)$, $B(6, 0)$ și $C(7, 1)$. Stabilește poziția fiecărui punct față de zona contaminată.

EXERSEAZĂ!

1. Deschide o pagină goală în *GeoGebra* (Calculator de grafice) și setează limba română.
 2. Creează sliderule pentru centrul cercului $C(a, b)$ și raza r :
 $a = 0$, $b = 0$ și $r = 3$
 (setează valoarea minimă a lui r la 0,1).
 3. Introdu ecuația cercului:
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
 4. Introdu ecuația unei drepte oarecare, de exemplu: $y = x + 1$.
 5. Folosește instrumentul *Intersecție* și dă click pe dreaptă și pe cerc pentru a afișa punctul lor comun A.
 6. Mișcă sliderule a și b . Ce se întâmplă cu cercul?
 7. Mișcă sliderul r . Ce se întâmplă cu cercul?
 8. Fixează $a = 0$, $b = 0$, modifică raza r de la valori foarte mici la valori mari și observă punctele de intersecție dintre dreaptă și cerc.
- Pentru ce valori ale lui r dreapta este exterioară cercului?
 - Pentru ce valoare a lui r dreapta devine tangentă la cerc?
 - Ce se întâmplă cu punctele de intersecție când mărești raza și mai mult?



c) Pe suprafața lacului, este montată o barieră liniară cu geamanduri care delimitează zona de înot. Aceasta este reprezentată în schiță printr-un segment a cărui dreaptă suport are ecuația $d: y = x - 2$. Determină poziția acestei bariere față de cercul care mărginește zona contaminată.

d) Pentru a proteja solul din jur, se construiește un ecran de impermeabilizare (un zid subteran de protecție). În schiță, acest ecran este reprezentat printr-un segment a cărui dreaptă suport este tangentă la cercul care delimitează zona contaminată în punctul $M(6, 0)$. Scrie ecuația acestei drepte.

e) Realizează schița (poziționează punctele de colectare, trasează dreptele ce reprezintă râul și barajul) folosind un instrument digital.

18. Într-un reper cartezian xOy , un radar este amplasat în punctul $R(2, 1)$ și are o rază de detecție de 5 unități de lungime.

a) Scrie ecuația cercului care mărginește zona de detecție a radarului.

b) Stabilește dacă obiectele amplasate în punctele $A(6, 4)$, $B(8, 1)$ și $C(0, 1)$ aparțin zonei de detecție a radarului.

c) Traectoria unui avion este reprezentată prin dreapta $d: 2x + y - 10 = 0$. Care este poziția traiectoriei avionului față de zona de detecție a radarului?

Proiect: „Conexiunea eco-senzor”

Ce vei face?

Vei crea un model geometric simplificat al alinierii a două fascicule laser către un senzor optic folosind *GeoGebra*.

De ce vei elabora proiectul?

Scopul proiectului este să înțelegi cum este utilizată geometria analitică în ingineria mediului și în calibrarea dispozitivelor optice de măsurare.

Cum vei face?

1. Vei considera un reper cartezian xOy , unde axa Ox reprezintă solul, iar Oy reprezintă înălțimea.
2. Vei analiza poziționarea celor două dispozitive laser și a senzorului optic.
3. Vei stabili punctele cheie: L_1 și L_2 (locațiile celor două emițătoare laser) și S (punctul în care se află senzorul de monitorizare).
4. Vei desena traiectoriile fasciculelor în reperul cartezian xOy .
5. Vei scrie ecuațiile dreptelor suport pentru cele două fascicule laser.
6. Vei da exemple de coordonate pentru punctele E și F prin care trece al doilea fascicul.
7. Vei evidenția panta fiecărui fascicul.
8. Dacă diferența dintre pantele celor două fascicule este mai mare decât 0,5, senzorul poate distinge ușor direcțiile fasciculelor. Modelul tău permite o aliniere stabilă a sistemului?
9. Presupunem că emițătorul L_1 suferă o mică vibrație, iar panta acestuia se mărește cu 0,1. Calculează noile coordonate ale punctului de intersecție dintre cele două fascicule. Mai este senzorul suficient de bine poziționat pentru noua configurație?

Cum vei ști dacă ai reușit?

Vei considera proiectul reușit dacă desenul rezultat în *GeoGebra* confirmă că fasciculele pornite de la dispozitivele de emisie „se întâlnesc” exact pe senzorul de monitorizare.

- 145

Timp de lucru: 45 de minute

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I

30 de puncte

30 de puncte	1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.
(10 p.)	A. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, -3)$ și $B(1, -5)$. Panta dreptei AB este egală cu: a) -2 ; b) -1 ; c) 1 ; d) 2 .
(10 p.)	B. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $x + 2y - 6 = 0$ și punctele $A(4, -1)$, $B(2, -2)$, $C(0, 3)$ și $D(-6, 0)$. Dintre punctele A , B , C și D , cel care aparține dreptei d este: a) A ; b) B ; c) C ; d) D .
(10 p.)	C. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 2)$ și $B(4, 6)$. Distanța dintre punctele A și B este egală cu: a) 25 ; b) 3 ; c) 5 ; d) 10 .

Subiectul al II-lea

60 de puncte

Scrie rezolvările complete.

60 de puncte	Într-o hală industrială automatizată, mișcarea unor roboți autonomi de transport este monitorizată într-un sistem cartezian xOy . Un scanner laser fix este situat în punctul $C(3, 2)$, iar raza lui de detecție este de 5 unități de lungime, formând o zonă circulară de scanare. O consolă de siguranță este situată în punctul $P(6, 6)$. În hală se deplasează trei roboți R_1 , R_2 și R_3 . Robotul R_1 urmează o traiectorie rectilinie care trece prin punctele $A(0, 6)$ și $B(8, 0)$. Robotul R_2 urmează o rută paralelă cu cea a robotului R_1 , pornind din punctul $D(0, 10)$, iar robotul R_3 se deplasează pe o rută modelată printr-o dreaptă orizontală care trece prin punctul $E(0, 2)$.
(10 p.)	a) Scrie ecuația cercului care delimitează zona de scanare.
(10 p.)	b) Determină ecuația dreptei care modelează traiectoria robotului R_1 .
(10 p.)	c) Scrie ecuația dreptei care modelează traiectoria robotului R_2 .
(10 p.)	d) Determină punctul de intersecție a dreptelor care modelează traiectoriile roboților R_1 și R_3 . Verifică dacă acest punct se află în interiorul zonei de scanare.
(10 p.)	e) Stabilește poziția relativă a dreptei care modelează traiectoria robotului R_2 față de cercul care delimitează zona de scanare.
(10 p.)	f) Pentru a andoca la rampă, robotul R_1 primește o nouă rută de la computerul central. Pentru a verifica calibrarea sistemului de ghidare, senzorii de proximitate din podea trebuie să confirme că robotul trece exact prin punctele $S_1(-4, 9)$, $S_2(0, 6)$ și $S_3(4, 3)$. Verifică dacă robotul își menține o traiectorie rectilinie.

6

Funcții: observarea unor proprietăți ale funcțiilor utilizând lecturi grafice

- ▶ 1. Funcția afină
- ▶ 2. Funcția de gradul al doilea
- ▶ 3. Funcții obținute prin operații de înmulțire și/sau de împărțire, compunere cu funcții afine și funcții de gradul al doilea
- ▶ 4. Funcția putere cu exponent întreg
- ▶ 5. Funcția radical de ordin 2 și ordin 3
- ▶ 6. Funcția exponențială (numărul irațional e)
- ▶ 7. Funcția logaritmică (logaritmi, logaritm natural, logaritm zecimal)



1. Funcția afină

Îmi amintesc

Elevii vor lucra în perechi.

1. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 4$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2 - x$.

A. Reprezentați geometric graficele funcțiilor f și g într-un reper cartezian xOy .

B. Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a) Imaginea lui 2 prin g este ____.

b) $f(3)$ este ____ lui 3 prin f .

c) $(x, 6) \in G_f \Leftrightarrow x = \text{____}$.

d) Reprezentarea geometrică a graficului funcției f în reperul cartezian xOy intersectează axa Ox în punctul $A(\text{____}, \text{____})$.

e) Reprezentarea geometrică a graficului funcției g în reperul cartezian xOy intersectează axa Oy în punctul $B(\text{____}, \text{____})$.

f) Reprezentările geometrice ale graficelor funcțiilor f și g în reperul cartezian xOy se intersectează în punctul $C(\text{____}, \text{____})$.

g) $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \text{____}$.

Învăț



Definiția 1. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale, se numește funcție afină.

EXEMPLE:

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$;

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x$;

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 5$;

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3$.

Pentru orice funcție numerică $f: A \rightarrow B$ ($A, B \subseteq \mathbb{R}$):

1. Punctul $M(x, y)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției $f \Leftrightarrow x \in A$ și $y = f(x)$.

2. $M(x, y)$ este punctul de intersecție a reprezentării geometrice a graficului funcției f cu axa $Oy \Leftrightarrow x = 0 \in A$ și $y = f(0) \in B$.

3. $M(x, y)$ este punctul de intersecție a reprezentării geometrice a graficului funcției f cu axa $Ox \Leftrightarrow x \in A$ este soluția ecuației $f(x) = 0$ și $y = 0 \in B$.

4. Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții afine într-un reper cartezian xOy este o dreaptă.

În continuare, pentru simplificarea limbajului, atunci când vorbim despre reprezentarea geometrică a graficului funcției f vom folosi **reprezentarea graficului funcției f** sau **reprezentarea grafică a funcției f** .

Atunci când reprezentăm într-un reper cartezian xOy mai multe funcții, scriem denumirea funcției alături de reprezentarea grafică pentru a nu exista confuzii.

OBSERVAȚII.

1. Reprezentarea grafică, în reperul cartezian xOy , a funcției afine $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$, este o dreaptă care conține originea sistemului de coordonate xOy .

2. Reprezentarea grafică, în reperul cartezian xOy , a funcției afine $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = b, b \in \mathbb{R}^*$, este o dreaptă paralelă cu axa Ox .

3. Reprezentarea grafică, în reperul cartezian xOy , a funcției afine $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0$, este axa Ox .

În continuare vom observa proprietățile funcțiilor prin studierea reprezentărilor grafice ale acestora în reperul cartezian xOy .

EXEMPLU:

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 6$, reprezentată grafic în reperul cartezian xOy în figura 1.

a) Determină numărul real a pentru care punctul $A(4, a)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .

b) Determină coordonatele punctului de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox .

c) Determină coordonatele punctului de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy .

d) Arată că, pentru oricare $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) < f(x_2)$.

e) Determină $x \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) < 0$.

f) Determină mulțimea valorilor funcției f (imaginea funcției f).

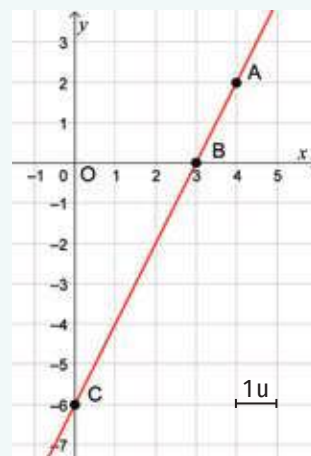


Figura 1

Rezolvare:

	Din reprezentarea grafică observăm că:	Explicația matematică:
a)	Punctul $A(4, 2)$ aparține reprezentării grafice a funcției $f. \Rightarrow a = 2$	$A(4, a)$ aparține reprezentării grafice a funcției $f. \Leftrightarrow a = f(4) \Leftrightarrow a = 2 \cdot 4 - 6 \Leftrightarrow a = 2$
b)	$B(3, 0)$	$B(n, 0)$, unde n este soluția ecuației $f(x) = 0$, este punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox . $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ Obținem $B(3, 0)$.
c)	$C(0, -6)$	$C(0, f(0))$ este punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy . $f(0) = 2 \cdot 0 - 6 = -6 \Rightarrow C(0, -6)$
d)	Reprezentarea grafică a funcției f este o dreaptă ascendentă, deci creșterea argumentului implică o creștere a imaginii corespunzătoare. În concluzie, pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) < f(x_2)$.	$x_1 < x_2 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2 \mid - 6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x_1 - 6 < 2x_2 - 6 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ Deci, pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) < f(x_2)$.

e)	Dacă $M(x, f(x))$ aparține reprezentării grafice a funcției f, atunci $f(x) < 0$ dacă și numai dacă punctul M este situat sub axa Ox. Cum punctul $B(3, 0)$ aparține axei Ox și reprezentarea grafică a funcției f este o dreaptă ascendentă, obținem $f(x) < 0$ dacă și numai dacă $x < 3$. $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3)$	$f(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 6 < 0 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x < 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3)$
f)	$Im(f) = \mathbb{R}$	$Im(f) = f(\mathbb{R}) =$ $= \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists)x \in \mathbb{R}, \text{ astfel încât } y = 2x - 6\}$ $y = 2x - 6 \Leftrightarrow 2x = y + 6 \Leftrightarrow x = \frac{y + 6}{2}$ Deci, $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = \frac{y + 6}{2} \in \mathbb{R}$, astfel încât $y = 2x - 6$. Am obținut $Im(f) = \mathbb{R}$.

Monotonia funcției afine



În figurile 2, 3 și 4 sunt reprezentate grafic funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x + 3$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -3x + 3$, și $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -2$.

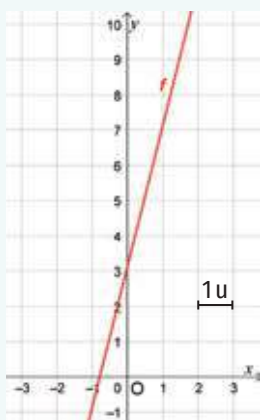


Figura 2

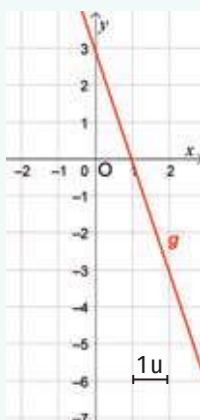


Figura 3



Figura 4

Analizând reprezentarea grafică a funcției f (figura 2), observăm că, pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) < f(x_2)$. Cu alte cuvinte, dacă valoarea argumentului crește, atunci crește și valoarea imaginii corespunzătoare. Vom spune că **funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$** .

Analizând reprezentarea grafică a funcției g (figura 3), observăm că, pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $x_1 < x_2$, avem $g(x_1) > g(x_2)$. Cu alte cuvinte, dacă valoarea argumentului crește, atunci descrește valoarea imaginii corespunzătoare. Vom spune că **funcția g este descrescătoare pe $\mathbb{R}$** .

Analizând reprezentarea grafică a funcției h (figura 4), observăm că, pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $x_1 < x_2$, avem $h(x_1) = h(x_2)$. Cu alte cuvinte, dacă valoarea argumentului crește, atunci valoarea imaginii corespunzătoare rămâne constantă. **Funcția h este constantă** și putem spune că este **atât crescătoare, cât și descrescătoare pe $\mathbb{R}$** .

Definiția 2. Se consideră funcția numerică $f: A \rightarrow B$ și $I \subset A, I \neq \emptyset$.

Spunem că funcția f este **monoton crescătoare** sau **crescătoare** pe mulțimea I dacă, oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Spunem că funcția f este **strict crescătoare** pe mulțimea I dacă, oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) < f(x_2)$.

Spunem că funcția f este **monoton descrescătoare** sau **descrescătoare** pe mulțimea I dacă, oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Spunem că funcția f este **strict descrescătoare** pe mulțimea I dacă, oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) > f(x_2)$.

OBSERVAȚII.

1. O funcție numerică $f: A \rightarrow B$ crescătoare sau descrescătoare pe o mulțime nevidă $I, I \subset A$, se numește **funcție monotonă pe I** .
2. Dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este monotonă pe intervalul I , atunci intervalul I se numește **interval de monotonie**.
3. Dacă o funcție numerică $f: A \rightarrow B$ este crescătoare sau descrescătoare pe A (domeniul de definiție), atunci spunem că funcția f este monotonă.

Monotonia unei funcții numerice se poate studia și prin observarea reprezentării grafice a acesteia în reperul cartezian xOy . Astfel:

- dacă reprezentarea graficului funcției „urcă” de la stânga la dreapta, atunci funcția este crescătoare (a se vedea figura 2 de la pagina anterioară);
- dacă reprezentarea graficului funcției „coboară” de la stânga la dreapta, atunci funcția este descrescătoare (a se vedea figura 3 de la pagina anterioară).

Teoremă. Funcția afină $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, este:

- **strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ pentru $a > 0$** (a se vedea figura 2 de la pagina anterioară);
- **strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ pentru $a < 0$** (a se vedea figura 3 de la pagina anterioară);
- **constantă pe $\mathbb{R}$ pentru $a = 0$** (a se vedea figura 4 de la pagina anterioară).

Mulțimea valorilor (imaginea) unei funcții afine

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale. Atunci:

- $Im(f) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, pentru $a \neq 0$;
- $Im(f) = f(\mathbb{R}) = \{b\}$, pentru $a = 0$.

Intersecția reprezentărilor grafice a două funcții afine

Se consideră $M(x_M, y_M)$ punctul de intersecție a reprezentărilor grafice ale funcțiilor numerice $f: A \rightarrow B$ și $g: C \rightarrow D$. Atunci, (x_M, y_M) , unde $x_M \in A \cap C$ și $y_M \in B \cap D$, este o soluție a sistemului de ecuații
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Se consideră $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = a_1x + b_1$ și $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = a_2x + b_2$ ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$), două funcții afine ale căror reprezentări grafice în reperul cartezian xOy sunt dreptele d_1 , respectiv d_2 . Atunci:

• $d_1 \cap d_2 = \{M(x_M, y_M)\}$, unde (x_M, y_M) este soluția sistemului de ecuații $\begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \end{cases}$, $\Leftrightarrow a_1 \neq a_2$ (figura 5);

• $d_1 \cap d_2 = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$ (figura 6);

• $d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$ (figura 7).



Figura 5



Figura 6



Figura 7

OBSERVAȚIE.

Reprezentările grafice ale funcțiilor $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = a_1x + b_1$, și $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = a_2x + b_2$, unde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, în reperul cartezian xOy , sunt drepte perpendiculare dacă și numai dacă $a_1 a_2 = -1$.

EXEMPLU:

Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -2x + 4$, reprezentate grafic în reperul cartezian xOy în figura 8.

Analizând figura 8, observăm că punctul de intersecție a reprezentărilor grafice ale funcțiilor f și g are coordonatele $(1, 2)$.

Să verificăm corectitudinea rezultatului. Pentru aceasta, vom rezolva sistemul de ecuații $\begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = -2x + 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 2 \\ 4x - 2 = -2x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 2 \\ 4x + 2x = 4 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 2 \\ 6x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

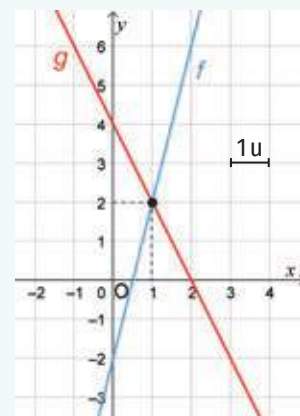


Figura 8

În problemele din viața cotidiană, funcțiile nu au, de obicei, ca domeniu de definiție mulțimea numerelor reale, ci doar anumite submulțimi ale acesteia, determinate de contextul situației studiate. De aceea, este necesar să lucrăm cu restricții ale funcțiilor.

Dreapta AB din figura 9 este reprezentarea grafică în reperul cartezian xOy a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

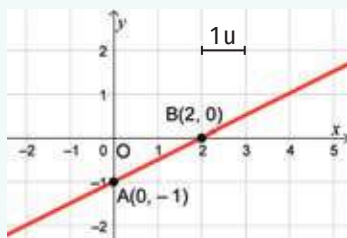


Figura 9

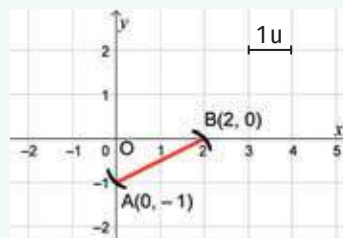


Figura 10

În figura 10 este reprezentat, în reperul cartezian xOy , segmentul AB. Punctele de pe segmentul AB aparțin dreptei AB și au abscisa $x \in (0, 2)$. Deci segmentul AB este reprezentarea graficului funcției $g: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$. Domeniul de definiție al funcției g a fost obținut prin restricționarea domeniului de definiție al funcției f . **Funcția g se numește restricția funcției f la intervalul $(0, 2)$.**

Rezolvarea ecuațiilor de forma $f(x) = m$ și a inecuațiilor de forma $f(x) < m$ ($\geq, \leq, >$), unde $m \in \mathbb{R}$

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Pentru a determina soluția/soluțiile ecuației $f(x) = m$, $m \in \mathbb{R}$, atunci când avem reprezentarea grafică a funcției f , procedăm astfel: construim dreapta de ecuație $y = m$ și determinăm abscisa punctului/abscisele punctelor de intersecție dintre această dreaptă și reprezentarea grafică a funcției f .
- Pentru a rezolva inecuația $f(x) < m$, trebuie să identificăm porțiunea/porțiunile din reprezentarea grafică a funcției f care se află sub dreapta de ecuație $y = m$ și valorile absciselor punctelor corespunzătoare.
- Pentru a rezolva inecuația $f(x) > m$, trebuie să identificăm porțiunea/porțiunile din reprezentarea grafică a funcției f care se află deasupra dreptei de ecuație $y = m$ și valorile absciselor punctelor corespunzătoare.

OBSERVAȚIE.

Prin rezolvarea în mulțimea numerelor reale a inecuațiilor $f(x) < 0$ și $f(x) > 0$, se determină de fapt semnul funcției f .

EXEMPLE:

1. În figura 11 este reprezentată grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 8$, în reperul cartezian xOy .

Lecturând graficul din figura 11, deducem că:

- $A(-4, 0)$ este punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox ;
- $f(x) > 0$, pentru orice $x > -4$, deci funcția f are semnul „+” pe intervalul $(-4, +\infty)$; (1)
- $f(x) < 0$, pentru orice $x < -4$, deci funcția f are semnul „-” pe intervalul $(-\infty, -4)$. (2)

Rezultatele (1) și (2) pot fi sintetizate într-un tabel astfel:

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$f(x)$	-----	0	+++++

Observăm că pe intervalul $(-\infty, -4)$ funcția f are semn opus semnelui lui a ($a = 2$), iar pe intervalul $(-4, +\infty)$ funcția f are semnul lui a .

2. În figura 12 este reprezentată grafic funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -3x + 6$, în reperul cartezian xOy .

Lecturând graficul din figura 12, deducem că:

- $A(2, 0)$ este punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției g cu axa Ox ;
- $g(x) > 0$, pentru orice $x < 2$, deci funcția g are semnul „+” pe intervalul $(-\infty, 2)$;
- $g(x) < 0$, pentru orice $x > 2$, deci funcția g are semnul „-” pe intervalul $(2, +\infty)$.

Putem completa un tabel de forma:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$	+++++	0	-----

Observăm că pe intervalul $(-\infty, 2)$ funcția g are semn opus semnelui lui a ($a = -3$), iar pe intervalul $(2, +\infty)$ are semnul lui a .

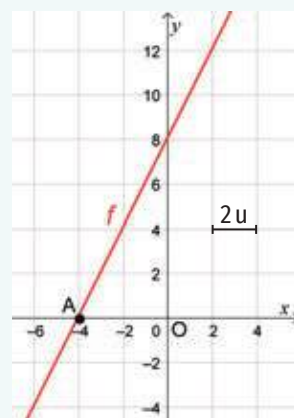


Figura 11

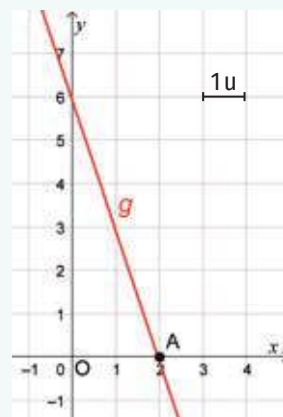


Figura 12

OBSERVAȚIE.

Semnul funcției afine $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, este sintetizat în tabelul de mai jos.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	semn contrar semnului lui a	0	semnul lui a

Fie A și B două mulțimi nevide și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții numerice. Pentru a rezolva o inecuație de tipul $f(x) < g(x)$, trebuie să identificăm porțiunea/porțiunile din reprezentarea grafică a funcției f care se află sub reprezentarea grafică a funcției g și valorile absciselor punctelor corespunzătoare acestei/acestor porțiuni.

Pentru a rezolva inecuația $f(x) > g(x)$, trebuie să identificăm porțiunea/porțiunile din reprezentarea grafică a funcției f care se află deasupra reprezentării grafice a funcției g și valorile absciselor punctelor corespunzătoare acestei/acestor porțiuni.

Exercițiu rezolvat

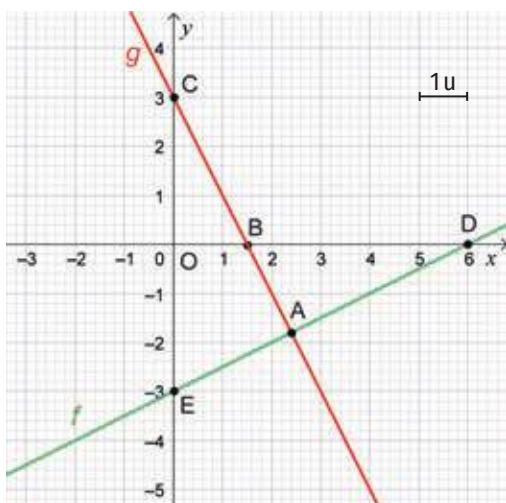


Figura 13

Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -2x + 3$, reprezentate grafic în reperul cartezian xOy în figura 13.

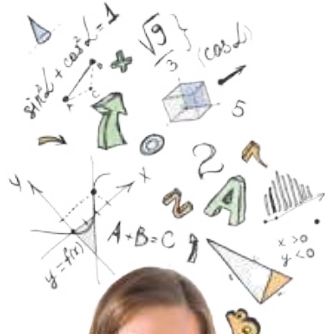
- Precizează monotonia funcțiilor f și g .
- Determină coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele de coordonate Ox și Oy .
- Determină coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției g cu axele de coordonate Ox și Oy .
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) < 0$.
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $g(x) > 0$.
- Determină coordonatele punctului de intersecție a reprezentărilor grafice ale funcțiilor f și g .
- Determină mulțimea numerelor reale x pentru care $f(x) \leq g(x)$.
- Arată că unghiurile ABO și AEO sunt suplementare.

Rezolvare:

- Conform reprezentărilor grafice ale funcțiilor f și g , funcția f este strict crescătoare, iar funcția g este strict descrescătoare.
- Punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy este $E(0, -3)$. Punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox este $D(6, 0)$.
- Punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției g cu axa Oy este $C(0, 3)$. Punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției g cu axa Ox este $B(1,5; 0)$. (Valoarea lui x_B se poate determina rezolvând ecuația $g(x) = 0$.)
- Conform reprezentării grafice a funcției f , soluția ecuației $f(x) = 0$ este $x = 6$ și $f(x) < 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 6)$.
- Conform reprezentării grafice a funcției g , soluția ecuației $g(x) = 0$ este $x = 1,5$ și $g(x) > 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 1,5)$.

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$f(x)$	- - - -	0	+ + + +

x	$-\infty$	1,5	$+\infty$
$g(x)$	+ + + +	0	- - - -



f) Fie $A(x_A, y_A)$ punctul de intersecție a reprezentărilor grafice ale funcțiilor f și g . Deoarece nu putem determina coordonatele punctului A folosind reprezentarea

grafică, vom rezolva sistemul de ecuații $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$.

Din $y = f(x)$ și $y = g(x)$ obținem $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - 3 = -2x + 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 2x = 6 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{12}{5}.$$

$$y = f(x) \Rightarrow y = f\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{5} - 3 = \frac{6}{5} - 3 = -\frac{9}{5}. \text{ Deci } A\left(\frac{12}{5}, -\frac{9}{5}\right).$$

g) $f(x) \leq g(x)$, pentru oricare $x \in (-\infty, x_A]$, unde $A(x_A, y_A)$ este punctul de intersecție a reprezentărilor grafice ale funcțiilor f și g . Conform punctului f), $x_A = \frac{12}{5}$.

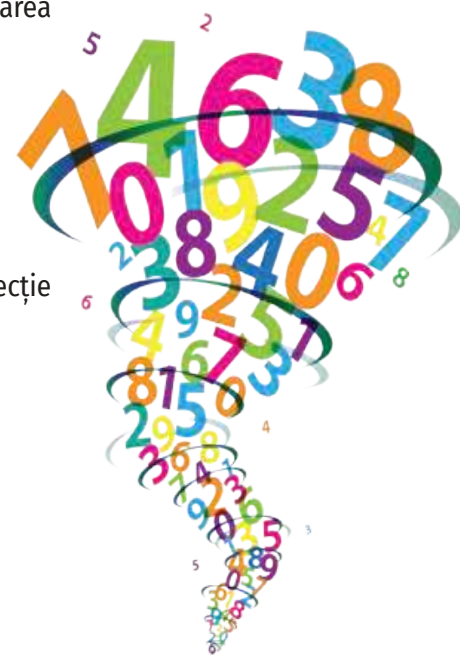
În concluzie, $f(x) \leq g(x)$, pentru orice $x \in \left(-\infty, \frac{12}{5}\right]$.

h) Reprezentarea grafică a funcției f este dreapta AE , care are panta $m_1 = \frac{1}{2}$.

Reprezentarea grafică a funcției g este dreapta AB , care are panta $m_2 = -2$.

Cum $m_1 \cdot m_2 = -1$, rezultă $AE \perp AB$, deci $\angle BAE = 90^\circ$.

În patrulaterul convex $ABOE$ avem $\angle A = \angle O = 90^\circ$, deci $\angle ABO + \angle AEO = 180^\circ$.



Portofoliu

Temperatura este o mărime fizică prin care se caracterizează starea de încălzire a unui corp sau a unui mediu. Măsurarea și controlul temperaturii sunt esențiale în multe domenii de activitate, cum ar fi medicină (identificarea febrei), meteorologie (prognoze, studiul climei), agricultură (protejarea plantelor de îngheț sau caniculă), activități casnice, industrie și tehnologie etc.

Principalele scări de măsurare a temperaturii sunt:

- scara Celsius ($^\circ\text{C}$), folosită la nivel global pentru viața de zi cu zi;
- scara Kelvin (K), scara absolută folosită în știință;
- scara Fahrenheit ($^\circ\text{F}$), folosită predominant în SUA.

Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$, cu ajutorul căreia transformăm gradele Celsius ($^\circ\text{C}$) în grade Fahrenheit ($^\circ\text{F}$), și funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 273,15$, cu ajutorul căreia transformăm gradele Celsius ($^\circ\text{C}$) în grade Kelvin (K).

a) Reprezintă grafic funcțiile f și g în același reper cartezian.

b) Determină valoarea temperaturii exprimate în grade Celsius, știind că, transformând-o în grade Kelvin, respectiv, Fahrenheit, obținem același număr.

c) Folosind funcțiile de mai sus, completează tabelele:

temperatura ($^\circ\text{C}$)	-273,15	-17, (7)	0	37	100	500	1 000
temperatura ($^\circ\text{F}$)							
temperatura ($^\circ\text{C}$)	-273,15	-17, (7)	0	37	100	500	1 000
temperatura (K)							

d) În fizica modernă există limite teoretice, atât pentru cea mai mică temperatură, cât și pentru cea mai mare temperatură pe care o poate avea un obiect sau un mediu. Care sunt aceste temperaturi?

e) Determină cea mai mică submulțime $A \subset \mathbb{R}$, care să cuprindă toate valorile de temperatură (în $^\circ\text{C}$) pe care le acceptă fizica modernă.



DICȚIONAR

monoton, monotonă, *adj.* = 1. (despre glas, sunete, melodii) care are sau care păstrează mereu același ton.

♦ (figurat) care îndispune, plictisește etc. prin lipsa de variație sau de varietate.

2. matematică (despre șiruri de numere sau despre funcții): care este fie crescător, fie descrescător. – Din fr. *monotone* (DEX, 2009)

CONTEXTUALIZEZ

Funcțiile afine pot fi utilizate în diferite domenii de activitate.

Informatică și criptografie:

– criptografia clasică (cifrul afin) folosește o funcție afină.

Funcțiile care modelează matematic anumite fenomene practice sunt restricții ale unor funcții afine la o mulțime de valori pentru care are loc fenomenul.

Aplic

1. În figura 14 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.

A. Dintre punctele $A(0, 15)$, $B(2, 4)$, $C(5, -5)$ și $D(5, 0)$, cel care aparține reprezentării grafice a funcției f este:

- a) $A(0, 15)$; c) $C(5, -5)$;
b) $B(2, 4)$; d) $D(5, 0)$.

B. Dintre numerele reale $f(0)$, $f(0,5)$, $f(-1)$ și $f(-2)$, cel mai mic este:

- a) $f(0)$; c) $f(-1)$;
b) $f(0,5)$; d) $f(-2)$.

C. Mulțimea soluțiilor inecuației $f(x) < 20$ este:

- a) $(-\infty, 0)$; b) $(0, +\infty)$; c) $(0, 5)$; d) $(4, +\infty)$.

D. Punctul $M(m, f(m))$, unde m este număr real, $m > 5$, se află:

- a) pe axa Oy ; b) pe axa Ox ; c) deasupra axei Ox ; d) sub axa Ox .

2. Dreptele AB , CD , EF și OE din figura 15 sunt reprezentările grafice ale funcțiilor f , g , h , respectiv i , în reperul cartezian xOy .

a) Determină funcțiile f , g , h și i .

b) Determină coordonatele punctului de intersecție a reprezentărilor grafice ale funcțiilor f și g .

c) Determină coordonatele punctului de intersecție a reprezentărilor grafice ale funcțiilor f și i .

d) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $h(x) = i(x)$.

e) Determină cărei reprezentări grafice aparține fiecare dintre punctele $M(-3, 2)$, $N(1, -1)$ și $P(\frac{1}{3}, 5)$.

f) Precizează monotonia funcțiilor f , g , h și i .

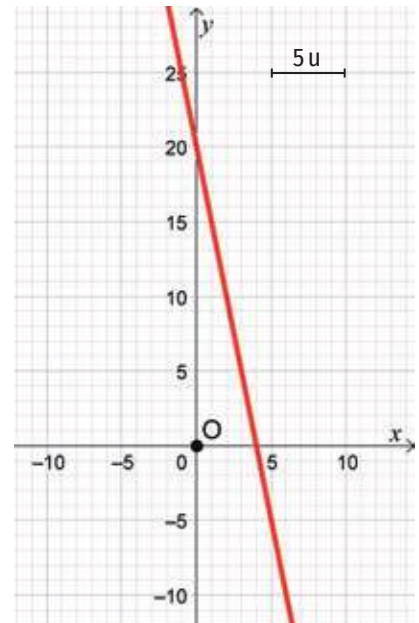


Figura 14

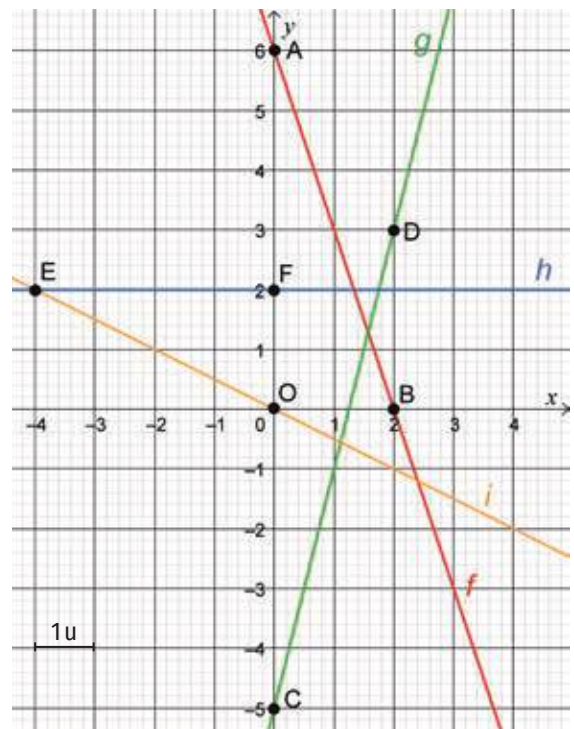


Figura 15

3. Dreptele OD și BC din figura 16 sunt reprezentările grafice, în reperul cartezian xOy , ale funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, respectiv $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

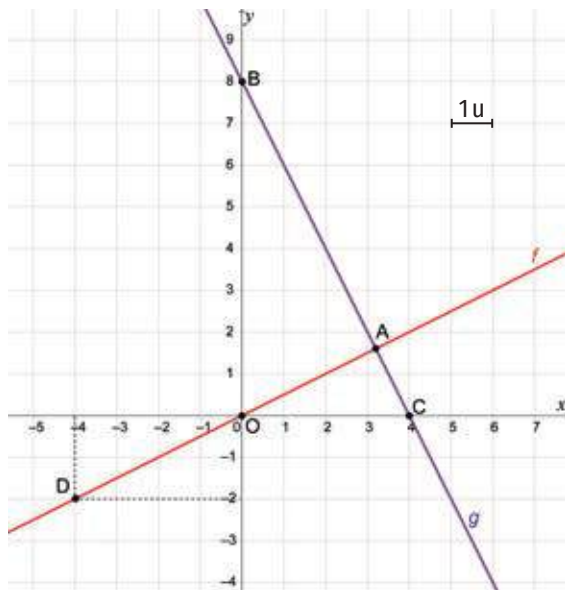


Figura 16

- a) Determină coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției g cu axele de coordonate Ox și Oy .
- b) Determină funcțiile f și g .
- c) Determină coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g .
- d) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $g(x) \geq 0$.
- e) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $g(x) \leq f(x)$.
- f) Precizează monotonia funcțiilor f și g .
4. O companie oferă spre închiriere o mașină electrică pentru o taxă de rezervare de 20 de lei, la care se adaugă un cost de 0,25 de lei pentru fiecare kilometru parcurs.
- a) Determină funcția liniară care modelează procesul descris mai sus.
- b) Reprezintă grafic, în reperul cartezian xOy , funcția identificată la punctul a).
- c) Verifică dacă punctele $A(120, 50)$, $B(410; 122,5)$ și $C(1\ 204, 321)$ se află pe reprezentarea grafică a funcției determinate la punctul a).
5. O firmă de taximetrie percepe pentru efectuarea unei curse (fără staționări) o taxă t de pornire, la care se adaugă un cost de c lei pentru fiecare kilometru parcurs. În figura 17 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția care exprimă costul unei călătorii în funcție de numărul de kilometri parcurși.
- a) Determină coordonatele punctelor A, B și C.
- b) Care este valoarea taxei de pornire?
- c) Care este costul în lei pentru un kilometru parcurs?
- d) Determină funcția care exprimă costul unei călătorii în funcție de numărul de kilometri parcurși.
- e) Cât plătește un client care a mers cu taxiul 14 km?

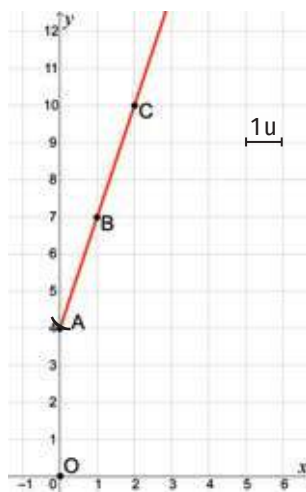


Figura 17

CONTEXTUALIZEZ

Funcțiile afine pot fi utilizate în diferite domenii de activitate.

Economie, finanțe:

– *costul de producție:*
 $c(x) = mx + F$, unde F reprezintă costurile fixe (chirie, utilaje), iar m este costul unitar de producție pentru o unitate;

– *rambursarea*

împrumuturilor:

$b(t) = S_0 - rt$, un model de rambursare a unui împrumut fără dobândă, unde $b(t)$ este soldul rămas de achitat după t luni, S_0 suma care trebuie achitată și r valoarea ratei;

– *schimb valutar:*

$l(x) = ex$, unde e este valoarea unui euro în lei și $l(x)$ valoarea în lei a x euro.

Transporturi:

– *tariful unei călătorii:*

$t(d) = pd + f$, unde f este tariful de pornire (fix), p este prețul pentru un kilometru parcurs, iar d reprezintă distanța parcursă în kilometri.

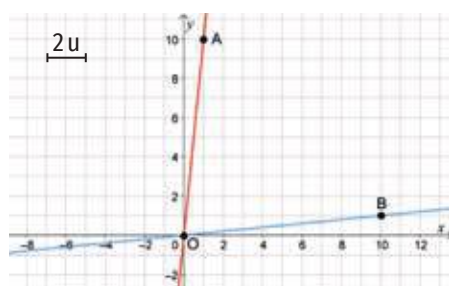


Figura 18

CONTEXTUALIZEZ

Funcțiile afine pot fi utilizate în diferite domenii de activitate.

Fizică, chimie:

– *dilatarea termică:*

$$l(t) = L_0(1 + \alpha(t - t_0)),$$

unde $l(t)$ este

lungimea unei bare

metalice la

temperatura t , L_0 este

lungimea barei la

momentul t_0 și α este

o constantă

(coeficient de dilatare specific materialului);

– *transformarea*

unităților de măsură:

$$f(x) = 1\,000x$$

este

funcția de

transformare a

kilogramelor în grame

$$\text{și } g(x) = \frac{1}{1000}x$$

transformă gramele în

kilograme;

– *conversia*

temperaturii:

transformarea din

grade Celsius ($^{\circ}$) în

grade Fahrenheit ($^{\circ}$)

urmează modelul

$$f(c) = \frac{9}{5}c + 32.$$

6. În figura 18 sunt reprezentate, în reperul cartezian xOy , graficele a două funcții liniare: una transformă decimetri în metri, iar cealaltă transformă metri în decimetri.

a) Scrie coordonatele punctelor A și B.

b) Definește funcția care transformă metri în decimetri și precizează care din cele două drepte este reprezentarea grafică a acesteia.

c) Precizează monotonia funcțiilor f și g .

7. O bară de oțel se dilată sau se contractă în funcție de temperatura pe care o are. Deoarece temperatura minimă a barei poate fi -20°C , iar temperatura maximă poate fi 45°C , atunci când se montează bara, inginerii trebuie să prevadă o marjă de siguranță (numită rost de dilatare). În figura 19 este reprezentată grafic funcția liniară f care descrie dependența dintre valoarea dilatării/contractiei barei (în milimetri) și temperatura acesteia (exprimată în $^{\circ}\text{C}$). Punctul $B(25; 4,5)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .

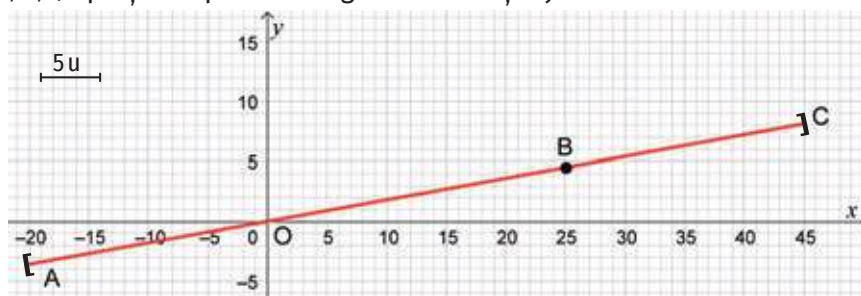


Figura 19

a) Determină funcția f .

b) Cu câți milimetri se contractă bara atunci când are o temperatură de -20°C ?

c) Cu câți milimetri se dilată bara atunci când are o temperatură de 32°C ?

d) Determină lungimea minimă a rostului de dilatare.

8. Într-un laborator de cercetare, un tehnician monitorizează temperatura unei substanțe care se află într-un proces de încălzire constantă pe parcursul câtorva ore. În figura 20 este reprezentată grafic funcția f care exprimă dependența dintre temperatura substanței (exprimată în $^{\circ}\text{C}$) și ora din zi în care aceasta a fost înregistrată.

a) Câte ore a fost monitorizată temperatura substanței?

b) La ce oră a fost înregistrată temperatura minimă a substanței?

c) Care a fost temperatura maximă înregistrată?

d) Determină funcția f .

e) Ce temperatură avea substanța la ora 14?

f) La ce oră a avut substanța temperatura de 21°C ?

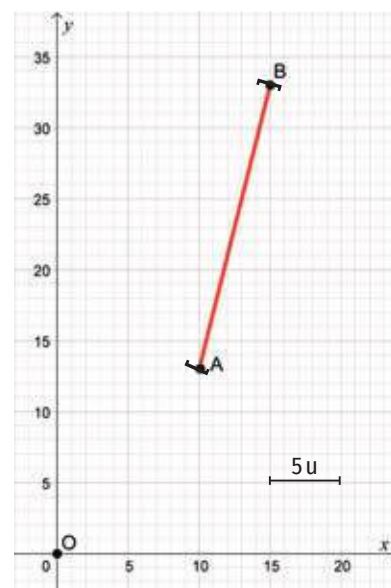


Figura 20

2. Funcția de gradul al doilea

Descopăr



În figura 1 este reprezentată traiectoria unei mingi de baschet.

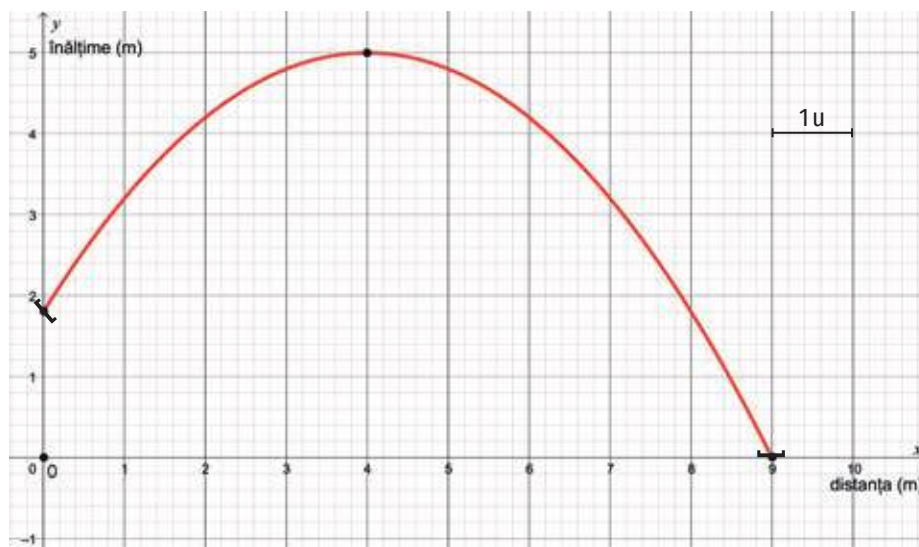


Figura 1

- Scrie domeniul de definiție și mulțimea de valori a funcției care modelează traiectoria mingii.
- Care este înălțimea de la care jucătorul a lansat mingea?
- Determină coordonatele punctului de intersecție a reprezentării grafice cu axa Oy și explică semnificația acestuia în contextul problemei.
- Determină coordonatele punctului de intersecție a reprezentării grafice cu axa Ox și explică semnificația acestuia în contextul problemei.
- Care este înălțimea maximă la care ajunge mingea?
- De câte ori s-a aflat mingea la înălțimea de 4,2 m deasupra solului?



- Identifică pe reprezentarea grafică punctele care au ordonata egală cu 4,2. Explică de ce sunt două astfel de puncte. Care sunt abscisele acestor puncte?
- Identifică pe reprezentarea grafică punctul care are abscisa egală cu 5. Care este ordonata acestui punct? Explică de ce există un singur punct cu abscisa egală cu 5.
- Care este intervalul pe care funcția prin care este modelată traiectoria mingii este crescătoare?
- Care este intervalul pe care funcția prin care este modelată traiectoria mingii este descrescătoare?





Definiție. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde a, b, c sunt numere reale și $a \neq 0$, se numește funcție de gradul al doilea cu coeficienții a, b, c .

EXEMPLE:

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + x - 4$;

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x$.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}\right) = a\left\{x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}, \end{aligned}$$

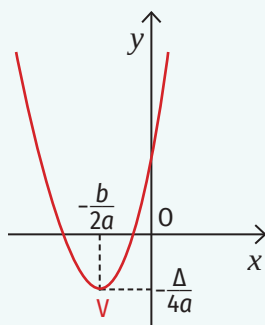
unde $\Delta = b^2 - 4ac$ este discriminantul ecuației $ax^2 + bx + c = 0$.

Așadar, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$ (egalitatea este numită **forma canonică a funcției de gradul al doilea**).

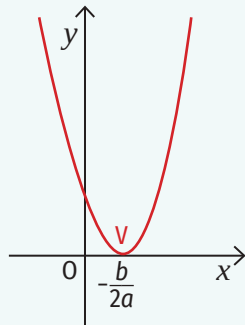
Evident $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$ și perechea $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ este un element al mulțimii G_f , iar punctul $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ este un punct al reprezentării grafice a funcției f .

- Dacă $a > 0$, atunci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, pentru orice număr real x , și $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \geq \frac{-\Delta}{4a}$, pentru orice număr real x . Deci $f(x) \geq \frac{-\Delta}{4a}$ pentru orice număr real x , de unde rezultă că $\frac{-\Delta}{4a}$ reprezintă cea mai mică valoare a funcției f , valoare numită și minimul funcției f . În acest caz, mulțimea valorilor funcției f este $\left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty\right)$.
- Dacă $a < 0$, atunci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$, pentru orice număr real x , și $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \leq \frac{-\Delta}{4a}$, pentru orice număr real x . Deci $f(x) \leq \frac{-\Delta}{4a}$ pentru orice număr real x , de unde rezultă că $\frac{-\Delta}{4a}$ reprezintă cea mai mare valoare a funcției f , valoare numită și maximul funcției f . În acest caz, mulțimea valorilor funcției f este $\left(-\infty, \frac{-\Delta}{4a}\right]$.

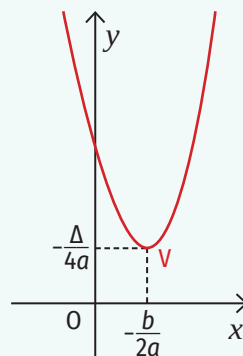
Reprezentarea grafică a unei funcții de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) se comportă asemănător cu reprezentările grafice din figurile 2-7.



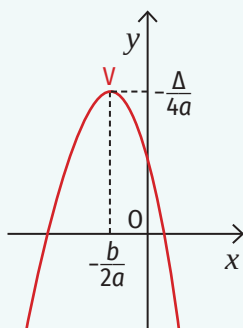
$a > 0, \Delta > 0$
Figura 2



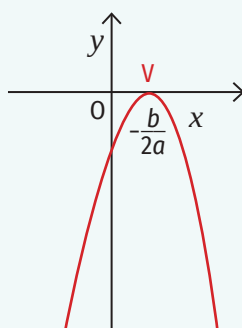
$a > 0, \Delta = 0$
Figura 3



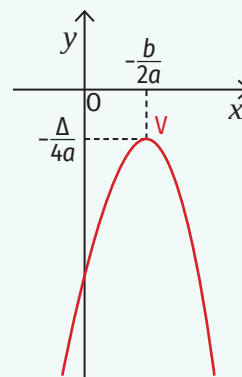
$a > 0, \Delta < 0$
Figura 4



$a < 0, \Delta > 0$
Figura 5



$a < 0, \Delta = 0$
Figura 6



$a < 0, \Delta < 0$
Figura 7

Prin observarea acestor reprezentări grafice deducem că:

- Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Ox într-un punct dacă $\Delta = 0$ (figura 3 și figura 6), în două puncte dacă $\Delta > 0$ (figura 2 și figura 5), sau nu intersectează axa Ox dacă $\Delta < 0$ (figura 4 și figura 7).
- Dacă $\Delta < 0$, atunci ecuația $f(x) = 0$ nu are soluție și $f(x)$ are semnul lui a pe $\mathbb{R}$ (figura 4 și figura 7), fapt care poate fi reprezentat astfel:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a	

- Dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are soluția dublă $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ și $f(x)$ are semnul lui a pe intervalele $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ și $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ (figura 3 și figura 6), fapt care poate fi reprezentat astfel:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a	0	semnul lui a

- Dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are două soluții distincte x_1 și x_2 . Presupunând că $x_1 < x_2$, $f(x)$ are semnul lui a pe intervalele $(-\infty, x_1)$ și $(x_2, +\infty)$ și semn contrar semnelui lui a pe intervalul (x_1, x_2) (figura 2 și figura 5), fapt care poate fi reprezentat astfel:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a	0	semn contrar semnelui lui a	0	semnul lui a

- Dacă $a > 0$ (figurile 2-4), atunci funcția f are **valoarea minimă** $y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$, care se obține pentru $x = -\frac{b}{2a}$ (**punctul de minim al funcției**) și mulțimea valorilor funcției f este $[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$.
- Dacă $a < 0$ (figurile 5-7), atunci funcția f are **valoarea maximă** $y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$, care se obține pentru $x = -\frac{b}{2a}$ (**punctul de maxim al funcției**). Mulțimea valorilor funcției f este $(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$.
- Dacă $a < 0$, atunci funcția f este crescătoare pe intervalul $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ și descrescătoare pe intervalul $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$.
- Dacă $a > 0$, atunci funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ și crescătoare pe intervalul $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$.
- Dreapta de ecuație $x = -\frac{b}{2a}$ este **axă de simetrie** a reprezentării grafice a funcției f .
- Dacă $a > 0$, reprezentarea grafică a funcției f are aspect convex, iar dacă $a < 0$, reprezentarea grafică a funcției f are aspect concav.

OBSERVAȚII.

1. Valoarea minimă (sau maximă) a funcției f se numește **valoare extremă** sau **extremul funcției**, iar punctul $x = -\frac{b}{2a}$ pentru care se realizează extremul se numește **punct de extrem al funcției**.

2. Reprezentarea geometrică a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, în reperul cartezian xOy este o curbă numită **parabolă**, iar punctul $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, care este **punctul de extrem al graficului funcției**, se numește **vârful parabolei**.

3. Intervalele $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ se numesc **intervale de monotonie ale funcției de gradul al doilea**.

EXEMPLU:

Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 4$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 6x - 8$. Reprezentările grafice ale funcțiilor f și g sunt redată în figurile 8-9.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x + 4$$

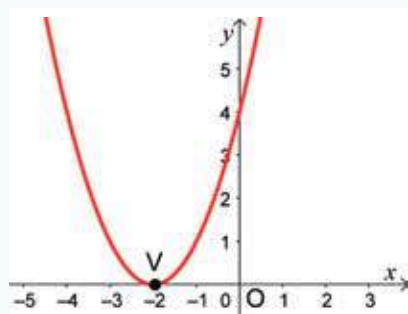


Figura 8

Lecturând reprezentarea grafică a funcției f din figura 8, deducem că:

- Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Ox într-un singur punct, care are coordonatele $(-2, 0)$.
- Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Oy în punctul de coordonate $(0, 4)$.
- Funcția f are un punct de minim $x = -2$.
- Funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, -2]$ și crescătoare pe intervalul $[-2, +\infty)$.
- Valoarea minimă a funcției f este 0.
- Mulțimea valorilor funcției f este $[0, +\infty)$.
- Dreapta de ecuație $x = -2$ este axa de simetrie a reprezentării grafice a funcției f .
- $f(x) > 0$, pentru orice număr real $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x^2 + 6x - 8$$

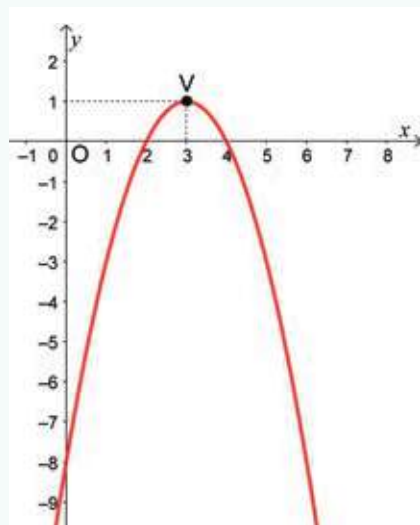


Figura 9

Lecturând reprezentarea grafică a funcției g din figura 9, deducem că:

- Reprezentarea grafică a funcției g intersectează axa Ox în două puncte, care au coordonatele $(2, 0)$ și, respectiv, $(4, 0)$.
- Reprezentarea grafică a funcției g intersectează axa Oy în punctul de coordonate $(0, -8)$.
- Funcția g are un punct de maxim $x = 3$.
- Funcția g este crescătoare pe intervalul $(-\infty, 3]$ și descrescătoare pe intervalul $[3, +\infty)$.
- Valoarea maximă a funcției g este 1.
- Mulțimea valorilor funcției g este $(-\infty, 1]$.
- Dreapta de ecuație $x = 3$ este axa de simetrie a reprezentării grafice a funcției g .
- $g(x) > 0$, pentru orice număr real $x \in (2, 4)$.
- $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2, 4\}$.
- $g(x) < 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$.

Aplic



1. În figura 10 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



i) Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.

A. Dintre punctele $A(0, 4)$, $B(2, 4)$, $C(4, 2)$, $D(2, 2)$, cel care aparține reprezentării grafice a funcției f este:

a) $A(0, 4)$; b) $B(2, 4)$; c) $C(4, 2)$; d) $D(2, 2)$.

B. Dintre numerele reale $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ și $f(6)$, cel mai mare este:

a) $f(3)$; b) $f(4)$; c) $f(5)$; d) $f(6)$.

C. Mulțimea soluțiilor inecuației $f(x) > 0$ este:

a) $(-\infty, 0)$; b) $(0, +\infty)$; c) $(0, 4)$; d) $(4, +\infty)$.

ii) Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a) Coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox sunt ____ și ____.

b) Ecuația $f(x) = ______$ are două soluții.

c) Mulțimea valorilor funcției f este ____.

2. În figura 11 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

a) Precizează care sunt ordonata punctului A și abscisa punctului B de pe reprezentarea grafică a funcției f .

b) Identifică punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox și Oy ale reperului cartezian xOy și scrie coordonatele acestora.

c) Care este ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f care are abscisa egală cu 1?

d) Care sunt abscisele punctelor de pe reprezentarea grafică a funcției f care au ordonata egală cu 1?

e) Care este imaginea numărului real 5 prin funcția f ?

f) Determină valorile numărului real a pentru care $f(a) = 9$.

g) Care este punctul de extrem al funcției f ?

h) Care este mulțimea valorilor funcției f ?

i) Există puncte pe reprezentarea grafică a funcției f a căror ordonată este egală cu -1 ?

j) Care este intervalul pe care funcția f este crescătoare?

k) Compară numerele reale $f(-1)$ și $f(2)$.

l) Compară numerele reale $f(1)$ și $f(7)$.

m) Câte soluții are ecuația $f(x) = 12$?

n) Determină mulțimea numerelor reale a pentru care $f(a) \leq 0$.

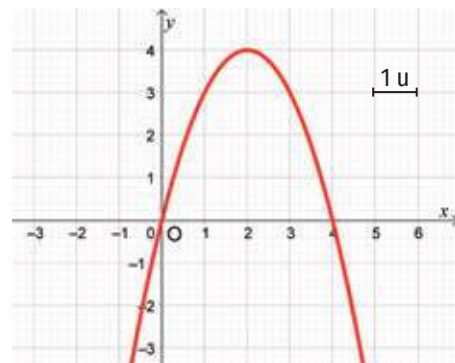


Figura 10

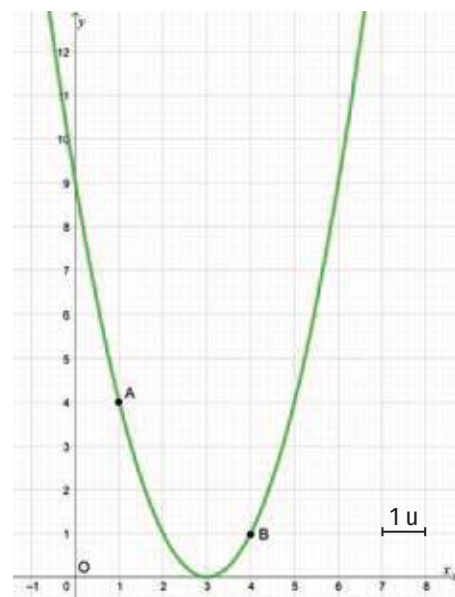


Figura 11

PROVOCARE!

Verifică dacă răspunsurile exercițiilor sunt corecte folosind cunoștințele teoretice!



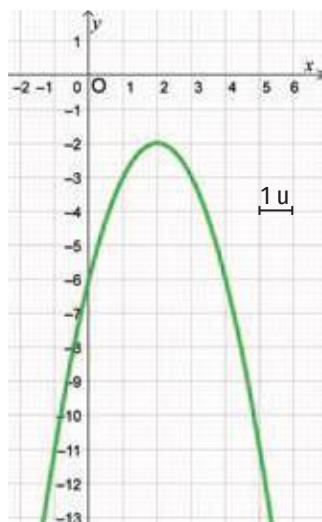


Figura 12

3. În figura 12 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x - 6$.

- Ecuția $f(x) = 0$ are soluție?
- Identifică punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy și scrie coordonatele acestuia.
- Care este ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f care are abscisa egală cu -1 ?
- Există puncte pe reprezentarea grafică a funcției f a căror ordonată este egală cu -3 ? Dacă da, precizează care sunt abscisele acestor puncte.
- Calculează $f(4) - f(3)$.
- Care este punctul de extrem al funcției f ?
- Care este mulțimea valorilor funcției f ?
- Există puncte pe reprezentarea grafică a funcției f a căror ordonată este egală cu 1 ?
- Există puncte pe reprezentarea grafică a funcției f a căror ordonată este egală cu -5 ? Dacă da, câte sunt?
- Care este intervalul pe care funcția f este crescătoare?
- Compară numerele reale $f(9)$ și $f(5)$.
- Câte soluții are ecuația $f(x) = -7$?
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = -11$.
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) > -2$.
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) < -6$.

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x$.

- Reprezintă grafic funcția f folosind un instrument digital.
- Câte soluții are ecuația $f(x) = 0$? Care sunt acestea?
- Identifică punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy și scrie coordonatele acestuia.
- Care este ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f care are abscisa egală cu 1 ?
- Care sunt abscisele punctelor de pe reprezentarea grafică a funcției f care au ordonata egală cu -5 ?
- Există puncte pe reprezentarea grafică a funcției f care au abscisa egală cu ordonata?
- Care este valoarea numărului $f(5)$?
- Determină numărul real a pentru care $f(a) = 4$.
- Care este punctul de extrem al funcției f ?
- Care este mulțimea valorilor funcției f ?
- Există puncte pe reprezentarea grafică a funcției f a căror ordonată este egală cu 10 ?
- Care sunt intervalele de monotonie ale funcției f ?
- Precizează valoarea de adevăr a propoziției „ $f(5) < f(1)$ ”.



n) Câte soluții are ecuația $f(x) = -7$?

o) Determină mulțimea numerelor reale a pentru care $f(a) < -12$.

p) Determină mulțimea valorilor numărului real x pentru care $f(x) > 0$.

5. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4$.

a) Reprezintă grafic funcția f folosind un instrument digital.

b) Identifică punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele de coordonate și scrie coordonatele acestora.

c) Care este ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f care are abscisa egală cu -3 ?

d) Care sunt abscisele punctelor de pe reprezentarea grafică a funcției f care au ordonata egală cu -3 ?

e) Care este valoarea numărului $f(2)$?

f) Determină valorile numărului real a pentru care $f(a) = 12$.

g) Care este punctul de extrem al funcției f ?

h) Care este mulțimea valorilor funcției f ?

i) Care sunt intervalele de monotonie ale funcției f ?

j) Precizează valoarea de adevăr a propoziției „ $f(\sqrt{15}) < f(3)$ ”.

k) Câte soluții are ecuația $f(x) = 7$?

l) Determină mulțimea numerelor reale a pentru care $f(a) > -3$.

m) Determină mulțimea valorilor numărului real x pentru care reprezentarea grafică a funcției f se află deasupra axei Ox .

6. În figura 13 sunt reprezentate grafic, în reperul cartezian xOy , funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x - 4$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x - 1$.

a) Câte soluții are ecuația $f(x) = g(x)$?

b) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) > g(x)$.

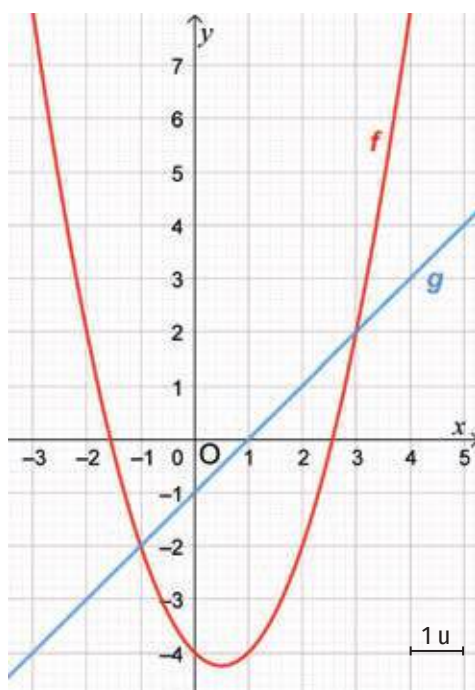


Figura 13

INDICAȚIE

Pentru a reprezenta grafic funcția f cu ajutorul unui instrument digital (*GeoGebra* sau *Desmos*), procedezi astfel:

1. Deschizi *GeoGebra* sau *Desmos*.

2. În bara de intrare (*Input*) din stânga, folosind tastatura aplicației, tastezi „ $y = -x^2 + 4x$ ”.



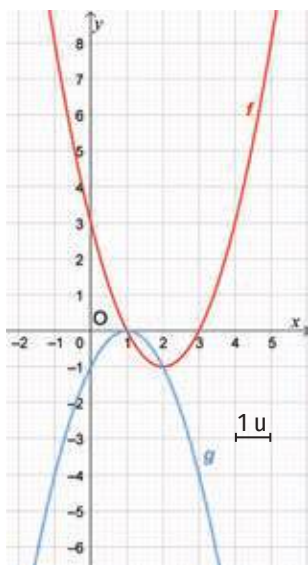


Figura 14

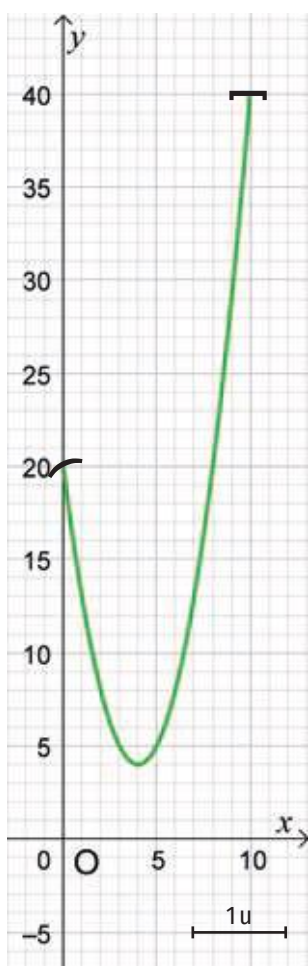


Figura 15

7. În figura 14 sunt reprezentate grafic, în reperul cartezian xOy , funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 2x - 1$. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) \geq g(x)$.
8. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = g(x)$.
 - a) $f(x) = x^2 - 6x + 1$, $g(x) = x + 1$; b) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$, $g(x) = 3x^2 - 6x + 2$.
9. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) < g(x)$.
 - a) $f(x) = -3x + 1$, $g(x) = x^2 + 3x + 10$; b) $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = -2x^2 + 1$.
10. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Determină mulțimea numerelor reale m pentru care $f(m) \leq g(m)$.
 - a) $f(x) = x + 4$, $g(x) = -x^2 - 3x$; b) $f(x) = x^2 - 5x + 15$, $g(x) = -x^2 + 5x - 10$.
11. O fabrică produce seturi de decorațiuni. Costul mediu de producție per unitate (exprimat în sute de lei) depinde de numărul de seturi produse zilnic (exprimat în sute de unități), conform unei funcții f a cărei reprezentare grafică în reperul cartezian xOy este redată în figura 15.
 - a) Care este domeniul de definiție al funcției f ? Ce reprezintă acesta?
 - b) Rezolvă ecuația $f(x) = 0$. Ce semnificație are rezultatul obținut?
 - c) Care este ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f care are abscisa egală cu 6? Ce semnificație are acest punct?
 - d) Identifică punctul de minim al reprezentării grafice a funcției f și precizează coordonatele acestuia. Ce semnificație are acest punct? Explică decizia pe care ar trebui să o ia managerul, dacă producția actuală este de 7 unități (7 unități reprezintă 700 de seturi de decorațiuni).
 - e) Care este mulțimea valorilor funcției f ?
 - f) Identifică intervalul de producție în care costul mediu crește. Ce se poate spune despre funcția f pe acest interval?
 - g) Compară costul mediu corespunzător unui volum de 6 unități cu costul corespunzător unui volum de 8 unități.
 - h) Compară costul mediu corespunzător unui volum de 2 unități cu costul corespunzător unui volum de 3 unități.
 - i) Determină intervalele de monotonie ale funcției f .
 - j) Rezolvă ecuația $f(x) = 13$. Ce reprezintă soluțiile obținute în contextul activității fabricii? Cum explici faptul că există două cantități diferite de produse care generează același cost mediu?
 - k) Rezolvă inecuația $f(x) < 5$. Ce reprezintă soluțiile acestei inecuații pentru planificarea bugetului fabricii?
 - l) Observând forma curbei din reprezentarea grafică, identifică tipul de dependență (liniară, pătratică).
 - m) Determină funcția f a cărei reprezentare grafică este redată în figura 15.

12. În figura 16 sunt reprezentate grafic, în reperul cartezian xOy , curbele de evoluție a două populații de insecte, pe parcursul unui sezon de opt luni. Curba sub formă de parabolă reprezintă evoluția populației de fluturi nativi, iar dreapta reprezintă evoluția unei specii invadatoare. Pe axa Ox este reprezentat timpul măsurat în luni, iar pe axa Oy este reprezentat numărul de exemplare, exprimat în sute. Vom nota cu f funcția care modelează evoluția populației de fluturi nativi și cu g funcția care modelează evoluția speciei invadatoare.

- Care este domeniul de definiție al funcției f ? Ce reprezintă acesta?
- Identifică vârful parabolei și precizează coordonatele acestuia. Ce semnificație are acest punct pentru populația de fluturi?
- Care este mulțimea valorilor funcției f ?
- Determină intervalele de monotonie ale funcției f . Interpretează aceste intervale din punct de vedere al evoluției numerice a populației.
- Compară numărul de exemplare de fluturi existente în luna a cincea cu numărul de exemplare de fluturi din luna a șaptea.
- Compară numărul de exemplare de fluturi existente în prima lună cu numărul de exemplare de fluturi existente în luna a doua. Ce indică acest lucru despre ritmul de reproducere la începutul sezonului?
- Rezolvă inecuația $f(x) > 24$. Interpretează soluția obținută.
- Identifică punctele de intersecție a celor două curbe, precizează coordonatele acestora și explică semnificația acestora.
- Rezolvă inecuația $f(x) > g(x)$. Ce concluzie poate trage un biolog despre dominanța uneia dintre cele două specii în acea perioadă?
- Determină funcțiile f și g .

13. Într-un studiu sociologic, s-a urmărit numărul de menționări zilnice pe platformele sociale pentru două curente de opinie opuse, A și B. Studiul s-a desfășurat pe parcursul a 10 zile. Evoluția numărului zilnic de menționări pe platformele sociale asociate opiniilor A și B este modelată prin funcțiile f și g . Cele două funcții sunt reprezentate grafice în figura 17. Pe axa Ox este reprezentat timpul (exprimat în zile), iar pe axa Oy este reprezentat numărul de menționări zilnice (exprimat în sute).

- Care este domeniul de definiție al funcțiilor f și g ? Ce reprezintă acesta?
- Determină coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox . Ce semnifică aceste puncte?
- Identifică punctele de extrem ale reprezentărilor grafice ale funcțiilor f și g și precizează coordonatele acestora. Ce semnificație au aceste puncte?
- Care este mulțimea valorilor funcției f ? Ce semnificație are această mulțime?
- Care este mulțimea valorilor funcției g ? Ce semnificație are această mulțime?
- Determină intervalele de monotonie ale funcției f . Interpretează aceste intervale din punct de vedere al interesului publicului.
- Determină intervalele de monotonie ale funcției g . Interpretează aceste intervale din punct de vedere al interesului publicului.



Figura 16

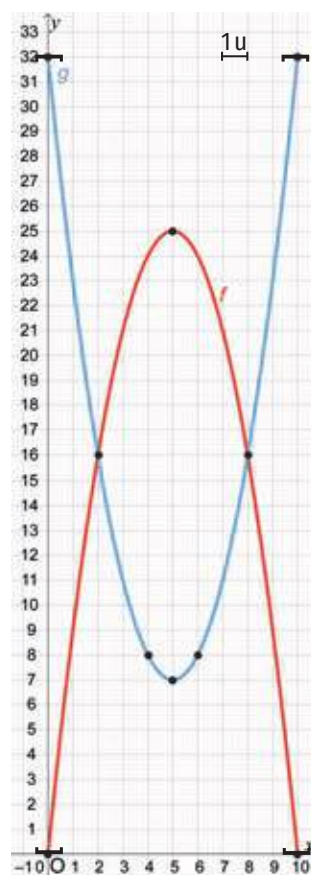


Figura 17



h) Compară numărul de menționări pentru opinia A din ziua a șasea cu numărul de menționări din ziua a șaptea.

i) Compară numărul de menționări pentru opinia A din prima zi cu cel din ziua a doua. Ce indică acest lucru despre rapiditatea cu care s-a răspândit opinia A la începutul campaniei?

j) Compară numărul de menționări pentru opinia B din ziua a șasea cu numărul de menționări din ziua a șaptea.

k) Compară numărul de menționări pentru opinia B din prima zi cu cel din ziua a doua. Ce indică acest lucru despre rapiditatea cu care s-a răspândit opinia B la începutul campaniei?

l) Rezolvă ecuația $g(x) = 8$. Interpretează soluția obținută.

m) Rezolvă inecuația $f(x) \geq 16$. Interpretează soluția obținută.

n) Identifică punctele de intersecție a celor două curbe, precizează coordonatele acestora și explică ce reprezintă acestea.

o) Rezolvă inecuația $f(x) < g(x)$. Ce concluzie poate trage un sociolog despre dominanța uneia dintre cele două opinii în acea perioadă?

p) Determină funcțiile f și g .

14. Funcția $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -5x^2 + 20x$, exprimă dependența dintre înălțimea față de sol (măsurată în metri) la care se află o minge degajată de un portar și timpul de la lansarea acesteia (măsurat în secunde).

a) Reprezintă grafic funcția f cu ajutorul unui instrument digital.

b) Ce reprezintă domeniul de definiție al funcției f în contextul mișcării mingii?

c) Identifică punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox și scrie coordonatele acestora. Ce reprezintă acestea?

d) Care este ordonata punctului de pe reprezentarea grafică pentru care abscisa este egală cu 1? Ce semnificație are acest punct pentru poziția mingii?

e) Identifică punctul de maxim al reprezentării grafice a funcției f . Ce semnificație are acest punct?

f) La câte secunde de la lansare înălțimea la care se află mingea față de sol este egală cu 15 metri?

g) Rezolvă inecuația $f(x) > 15$. Ce reprezintă soluțiile aceste inecuații?

h) Identifică intervalul de timp în care distanța dintre minge și sol crește. Ce se poate spune despre funcția f pe acest interval?

i) Compară înălțimea la care se află mingea față de sol la 0,5 secunde de la lansare cu înălțimea la care se află la o secundă de la lansare.

j) Compară înălțimea la care se află mingea față de sol la 3 secunde de la lansare cu înălțimea la care se află la 3,5 secunde de la lansare.

k) Determină intervalele de monotonie ale funcției f .

Investigație: „Secunda care salvează vieți”

Într-un scenariu de urgență din trafic, în care timpul de reacție a conducătorului auto este considerat neglijabil, distanța de oprire depinde exclusiv de capacitatea mecanică a vehiculului de a disipa energia cinetică. Distanța de oprire (în metri) este modelată de funcția $d : [0, 70) \rightarrow [0, +\infty)$, $d(v) = \frac{v^2}{16}$, unde v reprezintă viteza vehiculului (exprimată în m/s). Iată ce ai de făcut:

Extragerea datelor și studiul proprietăților

- Utilizează un instrument digital (*GeoGebra* sau *Desmos*) pentru a trasa graficul funcției d .
- Care este domeniul de definiție al funcției d ? Ce reprezintă acesta?
- Determină numărul de soluții ale ecuației $d(x) = 0$. Interpretează semnificația rezultatului.
- Precizează monotonia funcției d . Ce se întâmplă cu distanța de oprire pe măsură ce viteza crește?
- Care este ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f care are abscisa egală cu 20?
- Care este ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f care are abscisa egală cu 40?
- De câte ori a crescut distanța, dacă viteza s-a dublat?
- Dacă viteza este $v = 12$ m/s, care este distanța necesară pentru oprire?

Analiză critică și optimizare – scenarii de lucru

- Un obstacol apare la 4 m distanță. Folosind reprezentarea grafică, determină viteza cu care se poate deplasa o mașină pentru a opri în siguranță, exact în fața obstacolului, și a evita impactul.
- Un obstacol apare la 9 m distanță. Care este viteza maximă cu care se poate deplasa o mașină pentru a opri în siguranță?
- Un obstacol apare la 80 de metri distanță. Poate evita obstacolul o mașină care se deplasează cu 144 km/h?
- Compară distanța de oprire pentru $v = 10$ m/s (36 km/h) și $v = 20$ m/s (72 km/h). Deși viteza doar s-a dublat, cu câți metri a crescut distanța de oprire?
- De ce este mult mai periculos să crești viteza de la 108 km/h la 144 km/h decât de la 36 km/h la 72 km/h, deși în ambele cazuri diferența dintre viteze este de 36 km/h?





3. Funcții obținute prin operații de înmulțire și/sau de împărțire, compunere cu funcții afine și funcții de gradul al doilea

Descopăr

Elevii vor fi împărțiți în două grupe și vor avea de rezolvat următoarele sarcini:

- I. Reprezentați grafic funcțiile f , g și h în reperul cartezian xOy , folosind un instrument digital.
- II. Determinați domeniul maxim de definiție D al funcției h .
- III. Rezolvați ecuațiile $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ și $h(x) = 0$. Ce observați?
- IV. a) Determinați valorile numărului real x pentru care $f(x) > 0$ și $g(x) > 0$.
b) Determinați valorile numărului real x pentru care $f(x) < 0$ și $g(x) < 0$.
c) Determinați valorile numărului real x pentru care $h(x) > 0$. Ce observați?
- V. a) Determinați valorile numărului real x pentru care $f(x) > 0$ și $g(x) < 0$.
b) Determinați valorile numărului real x pentru care $f(x) < 0$ și $g(x) > 0$.
c) Determinați valorile numărului real x pentru care $h(x) < 0$. Ce observați?

Grupa 1

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 6, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 2x, h: D \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = (2x + 6)(x^2 + 2x)$$

Grupa 2

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 6, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 4, h: D \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{2x + 6}{x^2 - 4}$$

Învăț



Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, funcții afine sau funcții de gradul al doilea. Prin înmulțirea sau împărțirea acestora se obțin noi funcții: $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, $i: A \rightarrow \mathbb{R}$, $i(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (unde A este mulțimea numerelor reale x pentru care $g(x) \neq 0$), și $j: B \rightarrow \mathbb{R}$, $j(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ (unde B este mulțimea numerelor reale x pentru care $f(x) \neq 0$).

Prin lecturarea reprezentării grafice din figura 1, observăm că, pentru valori suficient de mari ale lui x , reprezentarea grafică a funcției f se apropie de dreapta de ecuație $y = 2$. Putem spune că dreapta de ecuație $y = 2$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f . De asemenea, pentru valori suficient de mici ale lui x , reprezentarea grafică a funcției f se apropie de dreapta de ecuație $y = 2$. Putem spune că dreapta de ecuație $y = 2$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f . În final, dreapta de ecuație $y = 2$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ și spre $+\infty$ la graficul funcției f .

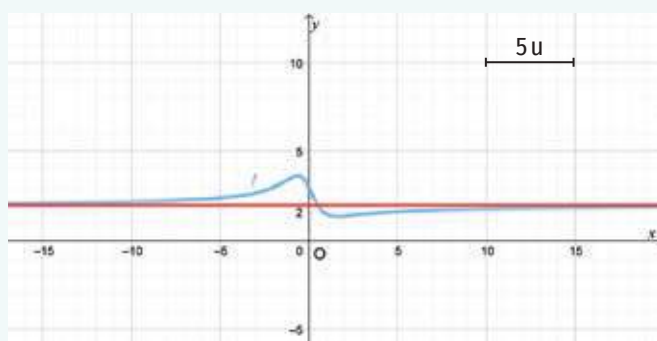


Figura 1

O asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul unei funcții este o dreaptă orizontală de care reprezentarea grafică a acelei funcții se apropie oricât de mult, fără a se confunda cu dreapta, pe măsură ce valorile variabilei cresc nelimitat.

O asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul unei funcții este o dreaptă orizontală de care reprezentarea grafică a acelei funcții se apropie oricât de mult, fără a se confunda cu dreapta, pe măsură ce valorile variabilei scad nelimitat.

Prin lecturarea reprezentării grafice din figura 2, observăm că, pentru valori ale lui x suficient de apropiate de 1, reprezentarea grafică a funcției se apropie de dreapta de ecuație $x = 1$. Putem spune că dreapta de ecuație $x = 1$ este asimptotă verticală la graficul funcției.

O asimptotă verticală la graficul unei funcții este o dreaptă verticală de ecuație $x = a$ de care graficul acelei funcții se apropie oricât de mult, fără a se confunda cu dreapta, pe măsură ce valorile variabilei se apropie de valoarea a .

Prin lecturarea reprezentării grafice din figura 3, observăm că, pentru valori suficient de mari ale lui x sau pentru valori suficient de mici ale lui x , reprezentarea grafică a funcției se apropie de dreapta de ecuație $y = x - 1$. Putem spune că dreapta de ecuație $y = x - 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ și spre $-\infty$ la graficul funcției.

O asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul unei funcții este o dreaptă oblică de care reprezentarea grafică a acelei funcții se apropie oricât de mult, fără a se confunda cu dreapta, pe măsură ce valorile variabilei cresc nelimitat.

O asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul unei funcții

este o dreaptă oblică de care reprezentarea grafică a acelei funcții se apropie oricât de mult, fără a se confunda cu dreapta, pe măsură ce valorile variabilei scad nelimitat.

OBSERVAȚII.

1. Dacă există asimptotă orizontală spre $+\infty$ ($-\infty$) la graficul unei funcții, atunci nu există asimptotă oblică spre $+\infty$ ($-\infty$) la graficul acelei funcții.
2. Dacă există asimptotă oblică spre $+\infty$ ($-\infty$) la graficul unei funcții, atunci nu există asimptotă orizontală spre $+\infty$ ($-\infty$) la graficul acelei funcții.

În continuare, pentru a determina comportamentul asimptotic al unei funcții, vom stabili dacă reprezentarea grafică a acesteia admite asimptote și vom preciza tipul acestora: orizontale, verticale sau oblice.

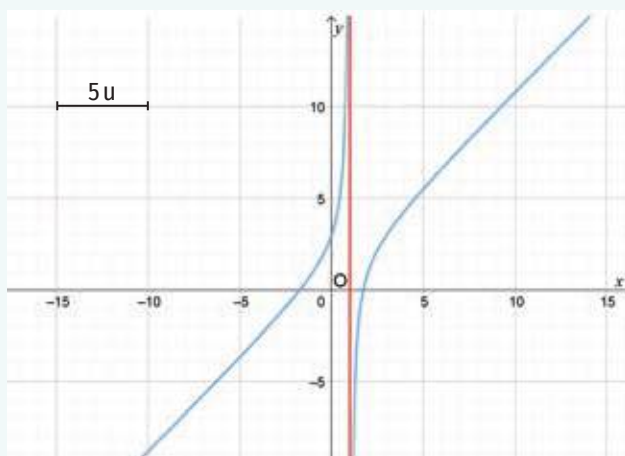


Figura 2

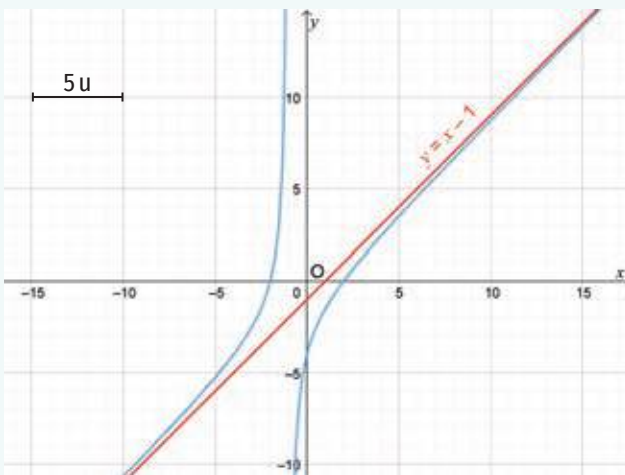
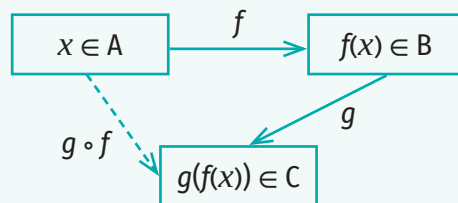


Figura 3

Compunerea funcțiilor

Definiția 1. Fie mulțimile nevide A, B, C și funcțiile $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$. Funcția $h: A \rightarrow C, h(x) = g(f(x))$, pentru orice $x \in A$, se numește **compunerea funcției g cu funcția f** . Se notează $h = g \circ f$.

Compunerea a două funcții $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ poate fi ilustrată astfel:



Operația prin care din funcțiile $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow C$ se obține funcția $g \circ f: A \rightarrow C$, cu $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, se numește **operația de compunere a funcțiilor**.

EXEMPLU:

Fie $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ și $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, g(x) = 3x + 2$.

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3 \cdot 1 + 2) = f(5) = \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{3} = \frac{17}{6};$$

$$g \circ f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) + 2 = \frac{3}{2}x + 3, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{Q}.$$

$$f \circ g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{2} \cdot (3x + 2) + \frac{1}{3} = \frac{3}{2}x + \frac{4}{3}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{Q}.$$

OBSERVAȚII:

1. Operația de compunere a funcțiilor nu este comutativă.

2. Fie funcțiile $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ și $h: C \rightarrow D$. Atunci există funcțiile $(h \circ g) \circ f: A \rightarrow D$ și $h \circ (g \circ f): A \rightarrow D$ și $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$, pentru orice $x \in A$ (**operația de compunere a funcțiilor este asociativă**).

3. Fie funcțiile $1_A: A \rightarrow A, 1_A(x) = x$ (numită funcția identică a mulțimii A) și $1_B: B \rightarrow B, 1_B(x) = x$ (numită funcția identică a mulțimii B). Atunci $f \circ 1_A: A \rightarrow B, 1_B \circ f: A \rightarrow B$ și $f \circ 1_A = f, 1_B \circ f = f$.

OBSERVAȚIE.

Proprietatea de asociativitate a operației de compunere a funcțiilor ne permite să notăm $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f$.

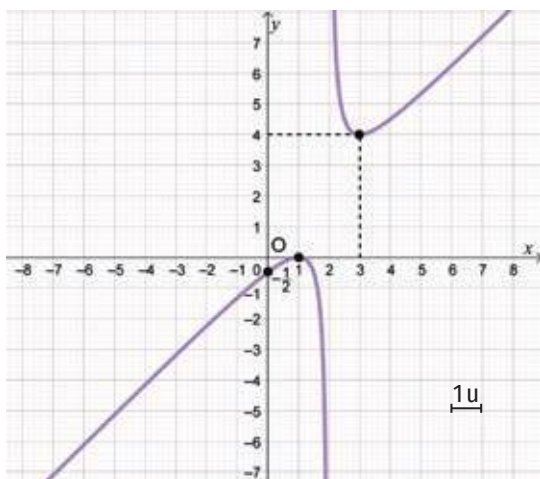


Figura 4

Exercițiu rezolvat



În figura 4 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$.

- Determină coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele de coordonate.
- Stabilește intervalele de monotonie ale funcției f .
- Determină imaginea funcției f .
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = 4$.
- Determină valorile numărului real x pentru care $f(x) < 0$.
- Studiază comportamentul asimptotic al funcției f .

Rezolvare:

a) Coordonatele punctului de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox sunt $(1, 0)$.

Coordonatele punctului de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy sunt $(0, -\frac{1}{2})$.

b) Funcția f este crescătoare pe intervalele $(-\infty, 1]$ și $[3, +\infty)$ și descrescătoare pe intervalele $[1, 2]$ și $(2, 3]$.

c) Imaginea funcției f este $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$.

d) $f(x) = 4 \Leftrightarrow x = 3$ (construim dreapta de ecuație $y = 4$).

e) Observăm care sunt valorile numărului real x pentru care reprezentarea grafică a funcției f se află sub axa Ox și obținem $f(x) < 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 2)$.

f) Există asimptote la graficul funcției f : asimptotă verticală (dreapta de ecuație $x = 2$) și asimptotă oblică spre $+\infty$ și spre $-\infty$ (dreapta de ecuație $y = x$) (figura 5).

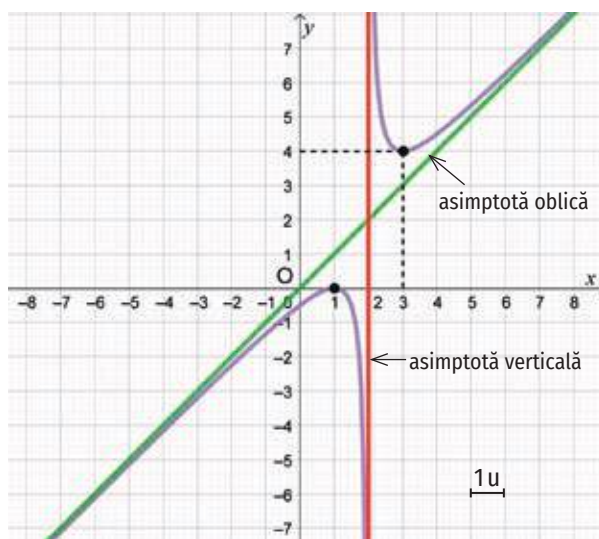


Figura 5

Aplic



- Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x^2 - 4x + 5$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -3x + 4$. Calculează $(f \circ f)(-1)$, $(f \circ g)(0)$, $(g \circ f)(2)$ și $(g \circ g)(-3)$.
- Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Determină funcțiile $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ și $g \circ g$.

a) $f(x) = 3x, g(x) = x + 4;$	f) $f(x) = x^2 - 2x, g(x) = 3x - 1;$
b) $f(x) = 2x - 3, g(x) = -x + 2;$	g) $f(x) = x^2 - x, g(x) = x^2 + 3;$
c) $f(x) = -6x - 5, g(x) = 8x + 7;$	h) $f(x) = -x^2 + x - 3, g(x) = -x + 4;$
d) $f(x) = \sqrt{2}x - 5, g(x) = \sqrt{8}x + 7;$	i) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1, g(x) = x^2 + 2x.$
e) $f(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x + \frac{1}{6}, g(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x - \frac{1}{6};$	j) $f(x) = x^2 - 2, g(x) = 2x^2 - 1.$
- Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, g(x) = cx + d$, unde a, b, c și d sunt numere reale.
 - Determină funcțiile $f \circ g$ și $g \circ f$.
 - Determină o relație între numerele reale a, b, c și d astfel încât $f \circ g = g \circ f$.
 - Pentru $a \neq 0$, determină $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(0), n \in \mathbb{N}^*$.
- Se consideră funcțiile afine $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x + 1$ și $g(x) = 2x - 1$. Determină numărul real a pentru care $(f \circ g)(a) - \frac{1}{2}(g \circ f)(a) = 3$.
- Se consideră funcția afină $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale. Determină numerele reale a și b pentru care $(f \circ f)(x) = 9x + 6$.
- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{a}x + b$, unde a și b sunt numere reale, $a > 0$. Determină numerele reale a și b pentru care $(f \circ f)(x) = 9x + 6$.



7. Fie funcția afină $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Determină numerele reale a și b pentru care:
- $(f \circ f)(x) = 2x - 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 - $(f \circ f)(x) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

8. În figura 6 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

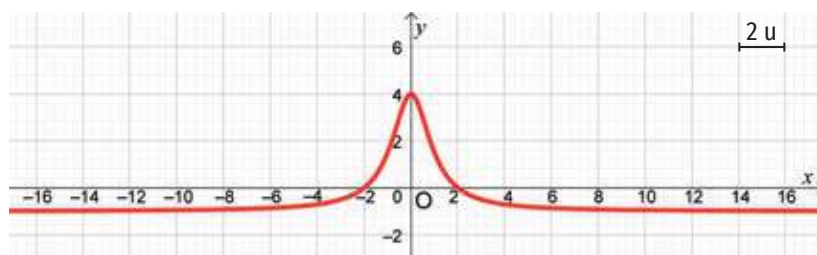


Figura 6

i) Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.

A. Dintre punctele $A(0, 4)$, $B(2, 4)$, $C(4, 2)$, $D(2, 2)$, cel care aparține reprezentării grafice a funcției f este:

- a) $A(0, 4)$; b) $B(2, 4)$; c) $C(4, 2)$; d) $D(2, 2)$.

B. Dintre numerele reale $f(0)$, $f(0,5)$, $f(1)$ și $f(2)$, cel mai mic este:

- a) $f(0)$; b) $f(0,5)$; c) $f(1)$; d) $f(2)$.

C. Mulțimea soluțiilor inecuației $f(x) > 0$ este:

- a) $(-\infty, 0)$; b) $(0, +\infty)$; c) $(-2, 2)$; d) $(2, +\infty)$.

ii) Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a) Coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox sunt ____ și ____.

b) Ecuația $f(x) = ______$ nu are soluții.

c) Funcția f este crescătoare pe intervalul ____.

9. În figura 7 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(x^2 - 3)$.

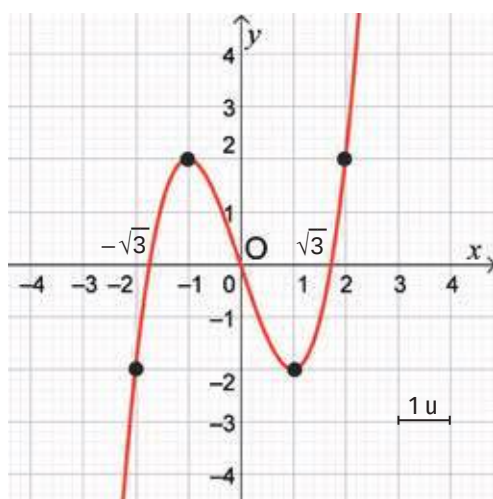


Figura 7

- Identifică punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele de coordonate și scrie coordonatele acestora.
- Care este ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f care are abscisa egală cu -1 ?
- Care sunt abscisele punctelor de pe reprezentarea grafică a funcției f care au ordonata egală cu -2 ?
- Stabilește intervalele de monotonie ale funcției f .
- Precizează care este mulțimea valorilor funcției f .
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = 2$.
- Determină valorile numărului real x pentru care $f(x) > 0$.
- Determină valorile numărului real x pentru care $f(x) < -2$.
- Studiază comportamentul asimptotic al funcției f .
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) > x$.

10. În figurile 8 și 9 este reprezentată grafic funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-6, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+4}{x^2+5x-6}$ în reperul cartezian xOy .

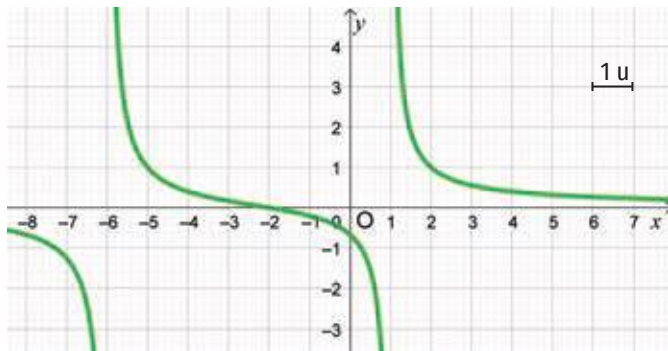


Figura 8

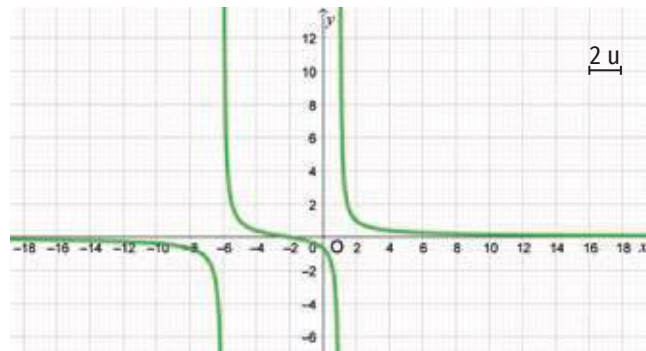


Figura 9

- Identifică punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox și scrie coordonatele acestuia.
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = 1$.
- Determină valorile numărului real x pentru care $f(x) > 0$.
- Studiază comportamentul asimptotic al funcției f .



11. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 4)$.

- Reprezintă grafic funcția f în reperul cartezian xOy folosind un instrument digital.
- Identifică punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele de coordonate și scrie coordonatele acestora.
- Precizează valoarea de adevăr a propoziției „ $f(3) > f(4)$ ”.
- Câte soluții are ecuația $f(x) = 2$?
- Determină valorile numărului real x pentru care $f(x) < 0$.
- Determină mulțimea soluțiilor inecuației $f(x) < -4$.
- Studiază comportamentul asimptotic al funcției f .
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$.

12. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{x-1}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 3x - 3$.

- Reprezintă grafic funcția f în reperul cartezian xOy folosind un instrument digital.
- Identifică punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy și scrie coordonatele acestuia.
- Care este ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f care are abscisa egală cu 2?
- Stabilește intervalele de monotonie ale funcției f .
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile $f(x) = 0$ și $f(x) = -1$.
- Determină valorile numărului real x pentru care $f(x) < 0$.
- Determină valorile numărului real x pentru care $f(x) < -2$.
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) > -1$.
- Studiază comportamentul asimptotic al funcției f .
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = g(x)$.

INDICAȚIE:

Pentru a oferi răspunsuri adecvate, reprezintă graficele funcțiilor folosind instrumente digitale.

POT MAI MULT

Explică modul în care se obțin reprezentările grafice ale funcției g din reprezentarea grafică a funcției f .

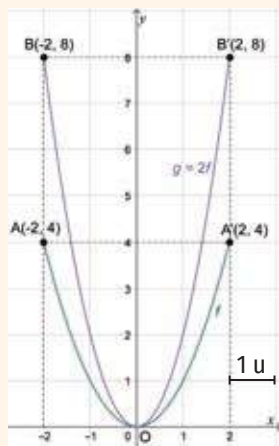


Figura 10

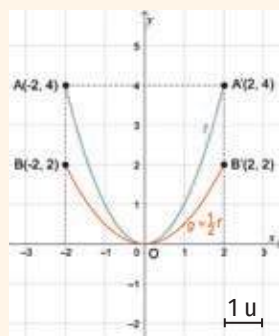


Figura 11

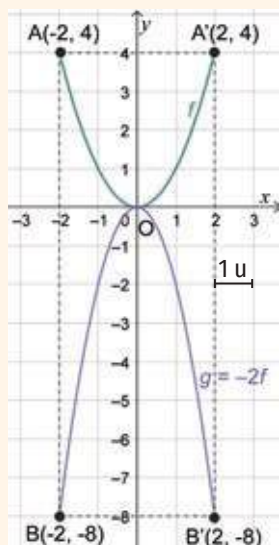


Figura 12

13. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x-2}{x+1}$.

- Reprezintă grafic funcția f în reperul cartezian xOy folosind un instrument digital.
- Identifică punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele de coordonate și scrie coordonatele acestora.
- Verifică dacă punctul de coordonate $(-4, 3)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .
- Care este ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f care are abscisa egală cu -3 ?
- Care este abscisa punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f care are ordonata egală cu 1 ?
- Care sunt intervalele de monotonie ale funcției f ?
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = 4$.
- Determină valorile numărului real x pentru care $f(x) < 0$.
- Determină valorile numărului real x pentru care $f(x) \geq 6$.
- Studiază comportamentul asimptotic al funcției f .
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = x - 1$.
- Determină valorile numărului real $x, x \neq 1$, pentru care $f(x) \leq \frac{x+2}{x-1}$.

14. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 6x - 16}{-x^2 + 8x - 4}$.

- Reprezintă grafic funcția f în reperul cartezian xOy folosind un instrument digital.
- Identifică punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele de coordonate și scrie coordonatele acestora.
- Verifică dacă punctul de coordonate $(3, -2)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .
- Care este ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f care are abscisa egală cu 4 ?
- Care este abscisa punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f care are ordonata egală cu -1 ?
- Compară numerele reale $f(-1)$ și $f(0)$.
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = -7$.
- Determină valorile numărului real x pentru care $f(x) > 4$.
- Studiază comportamentul asimptotic al funcției f .
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) > g(x)$, unde $g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x+2}{-x+1}$.

15. Viteza de creștere a unei colonii de bacterii sub influența unui antibiotic este modelată de funcția $V : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, $V(t) = \frac{-t^2 + 4t + 12}{t + 1}$, unde t reprezintă timpul măsurat în ore, iar $V(t)$ (viteza de creștere) este exprimată în milioane de bacterii noi pe oră.

- Reprezintă grafic funcția V în reperul cartezian xOy folosind un instrument digital.
- Determină coordonatele punctului de intersecție a reprezentării grafice a funcției V cu axa Oy . Ce semnificație are acest punct pentru colonia de bacterii?
- Determină coordonatele punctului de intersecție a reprezentării grafice a funcției V cu axa Ox . Ce semnificație are acest punct pentru colonia de bacterii?
- Verifică dacă, după două ore, viteza de creștere este mai mare de 4 milioane de bacterii/oră.
- Precizează monotonia funcției V . Ce semnifică aceasta?
- Rezolvă ecuația $V(t) = 7,5$ și interpretează rezultatul obținut.

16. Într-o reacție chimică, concentrația unei substanțe (măsurată în mg/l) depinde de timpul înregistrat de la începutul reacției (măsurat în secunde), conform funcției $C : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $C(t) = \frac{8t}{t^2 + 4}$.

- Reprezintă grafic funcția C în reperul cartezian xOy folosind un instrument digital.
- Determină coordonatele punctului de intersecție a reprezentării grafice a funcției C cu axa Oy . Ce semnificație are acest punct?
- Care sunt intervalele de monotonie ale funcției C ? Ce semnifică acestea?
- Studiază comportamentul asimptotic al funcției C . Ce se întâmplă cu substanța după un timp foarte mare?
- În ce interval de timp concentrația are o valoare de cel puțin 1,6 mg/l?

17. Intensitatea curentului electric I (în amperi) depinde de rezistența variabilă R (în ohmi) a unui consumator extern, conform Legii lui Ohm pentru întregul circuit. Funcția $I : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $I(R) = \frac{120}{R + 10}$, reprezintă modelul matematic al legii lui Ohm pentru un circuit cu tensiunea electromotoare $E = 120$ V și rezistența internă $r = 10 \Omega$.

- Reprezintă grafic funcția I în reperul cartezian xOy cu ajutorul unui instrument digital.
- Identifică punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției I cu axa Oy și determină coordonatele acestuia. Interpretează rezultatul obținut.
- Să presupunem că avem un dispozitiv care necesită o intensitate constantă a curentului de 2 amperi pentru a funcționa. La ce valoare, măsurată în ohmi, trebuie setată rezistența?
- O siguranță fuzibilă se arde în cazul în care intensitatea curentului electric depășește 3 amperi. În ce interval trebuie să se afle rezistența R pentru a nu arde siguranța?
- Studiază comportamentul asimptotic al funcției I . Ce se întâmplă cu intensitatea curentului electric, dacă rezistența R devine extrem de mare?

POT MAI MULT

1. Se consideră

funcțiile

$$f, g, h, p, q, r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = x,$$

$$g(x) = -f(x),$$

$$h(x) = -f(x) - 4,$$

$$p(x) = f(x) + 5,$$

$$q(x) = 3x, r(x) = \frac{1}{5}x.$$

a) Reprezintă grafic, în același reper cartezian xOy , funcțiile f și g , f și h , f și p , f și q , f și r .

b) Explică modul în care se obțin reprezentările grafice ale funcțiilor g , h , p , q și r din reprezentarea grafică a funcției f .

2. Se consideră funcțiile

$$f, g, h, p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = x^2,$$

$$g(x) = x^2 + 3,$$

$$h(x) = x^2 - 2,$$

$$p(x) = (x - 4)^2,$$

$$q(x) = (x + 1)^2 - 3.$$

a) Reprezintă grafic, în același reper cartezian xOy , funcțiile f și g , f și h , f și p , f și q .

b) Explică modul în care se obțin reprezentările grafice ale funcțiilor g , h , p și q din reprezentarea grafică a funcției f .



4. Funcția putere cu exponent întreg

Descopăr

Într-un experiment de fizică, într-un cilindru prevăzut cu un piston mobil se află 12 g de gaz. Prin deplasarea pistonului, volumul gazului V se modifică, iar densitatea acestuia ρ variază conform relației $\rho = 12 V^{-1}$.

- a) Scrie funcția f care exprimă densitatea gazului în funcție de volumul acestuia.
- b) Care este domeniul de definiție al funcției f ? Justifică răspunsul.
- c) Reprezintă grafic funcția f folosind un instrument digital (*GeoGebra/Desmos*).
- d) Ce se întâmplă cu densitatea gazului atunci când pistonul este ridicat (volumul crește)?
- e) Funcția f este crescătoare sau descrescătoare? Ce proprietate a gazului reflectă această dependență?
- f) Ce se întâmplă cu densitatea dacă volumul se dublează? Dar dacă volumul se înjumătățește?
- g) Ce se întâmplă cu densitatea când comprimăm gazul astfel încât volumul să devină foarte mic?
- h) Ce se întâmplă cu densitatea când volumul crește foarte mult?
- i) Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axele de coordonate? Interpretează răspunsul.

Învăț



Definiția 1. Fie n un număr natural nenul. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$ se numește funcția putere de gradul n .

OBSERVAȚII.

1. Dacă $n = 1$, atunci obținem funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$, care este o funcție de gradul întâi.
2. Dacă $n = 2$, atunci obținem funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$, care este o funcție de gradul al doilea.

Funcția putere cu exponent natural par

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*, n$ număr par, funcția putere cu exponent natural par. Cum n este număr natural par nenul, există un număr natural nenul k astfel încât $n = 2k$. În acest caz, putem scrie funcția f astfel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2k}, k \in \mathbb{N}^*$.

În figura 1 sunt reprezentate grafic, în reperul cartezian xOy , funcțiile $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$ și $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^4$.

Reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2k}, k \in \mathbb{N}^*$, are un comportament asemănător cu reprezentările grafice ale funcțiilor $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$ și $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^4$.

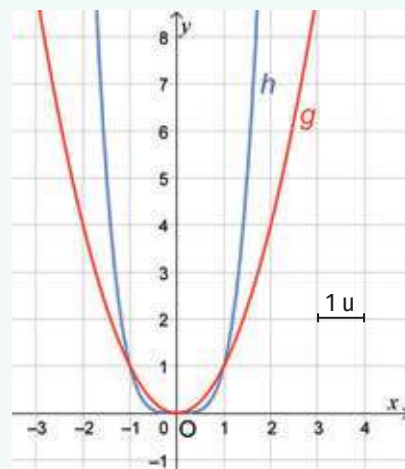


Figura 1

Studiind reprezentările grafice din figura 1, deducem următoarele proprietăți ale funcției putere cu exponent natural par $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2k}, k \in \mathbb{N}^*$:

- Mulțimea valorilor funcției f este $[0, +\infty)$.
- Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axele de coordonate Ox și Oy în punctul $O(0, 0)$.
- Reprezentarea grafică a funcției f este simetrică față de axa Oy .
- Funcția f este convexă.
- Funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.
- $f(x) \geq 0$, pentru orice număr real x .

Funcția putere cu exponent natural impar

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*, n$ număr impar, $n > 1$, funcția putere cu exponent natural impar. Cum n este număr natural impar, $n > 1$, există un număr natural nenul $k, k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $n = 2k + 1$. În acest caz, putem scrie funcția f astfel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2k+1}, k \in \mathbb{N}^*$.

În figura 2 sunt reprezentate grafic, în reperul cartezian xOy , funcțiile $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^3$ și $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^5$.

Reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2k+1}, k \in \mathbb{N}$, are un comportament asemănător cu reprezentările grafice ale funcțiilor $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^3$ și $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^5$.

Studiind reprezentările grafice din figura 2, deducem următoarele proprietăți ale funcției putere cu exponent natural impar $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2k+1}, k \in \mathbb{N}$:

- Mulțimea valorilor funcției f este $\mathbb{R}$.
- Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axele de coordonate Ox și Oy în punctul $O(0, 0)$.
- Reprezentarea grafică a funcției f este simetrică față de originea reperului cartezian.
- Funcția f este convexă pe intervalul $[0, +\infty)$ și este concavă pe intervalul $(-\infty, 0]$.
- Funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- $f(x) < 0$, pentru orice număr real $x \in (-\infty, 0)$.
- $f(x) > 0$, pentru orice număr real $x \in (0, +\infty)$.
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Definiția 2. Fie n un număr natural nenul. Funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{-n}$ se numește funcția putere cu exponent întreg negativ.

Distingem două cazuri, după cum n este par sau impar.

- Dacă n este număr natural nenul par, există un număr natural nenul k astfel încât $n = 2k$. În acest caz, putem scrie funcția f astfel: $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{-2k}, k \in \mathbb{N}^*$.

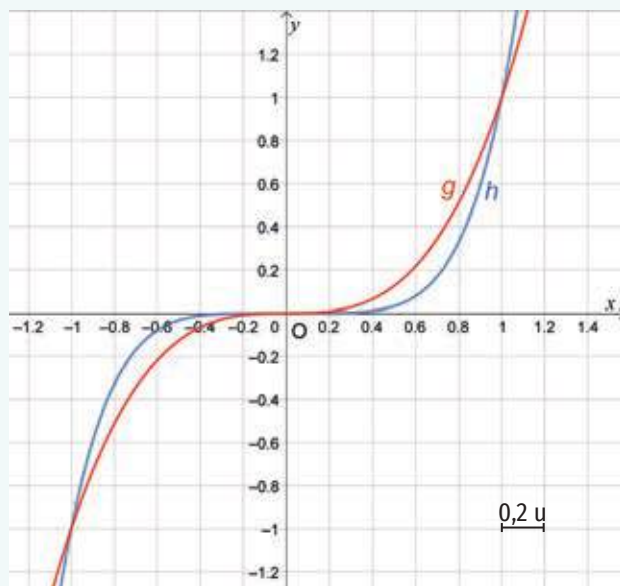


Figura 2

În figura 3 sunt reprezentate grafic, în reperul cartezian xOy , funcțiile $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-2}$, și $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^{-4}$.

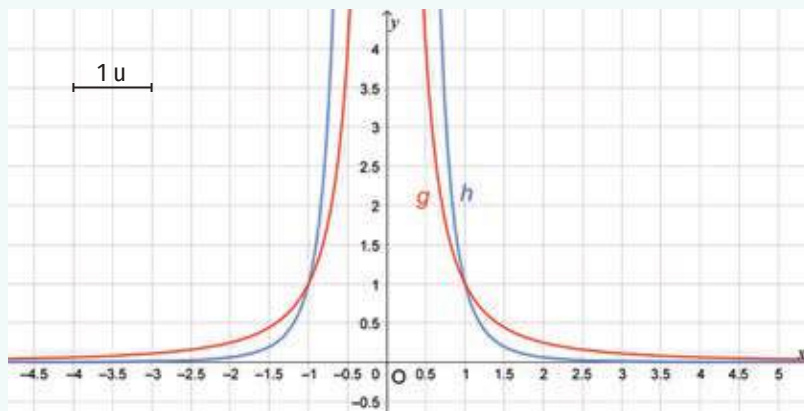


Figura 3

Reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, are un comportament asemănător cu reprezentările grafice ale funcțiilor $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-2}$, și $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^{-4}$.

Studiind reprezentările grafice din figura 3, deducem următoarele proprietăți ale funcției $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2k}$, $k \in \mathbb{N}^*$:

- Mulțimea valorilor funcției f este $(0, +\infty)$.
- Reprezentarea grafică a funcției f nu intersectează axele de coordonate Ox și Oy .
- Reprezentarea grafică a funcției f este simetrică față de axa Oy .
- Funcția f este convexă.
- Funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$ și strict descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.
- $f(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$.
- Dacă n este număr natural impar, există un număr natural k astfel încât $n = 2k + 1$. În acest caz, putem scrie funcția f astfel: $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$.

În figura 4 sunt reprezentate grafic, în reperul cartezian xOy , funcțiile $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-1}$, și $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^{-3}$.

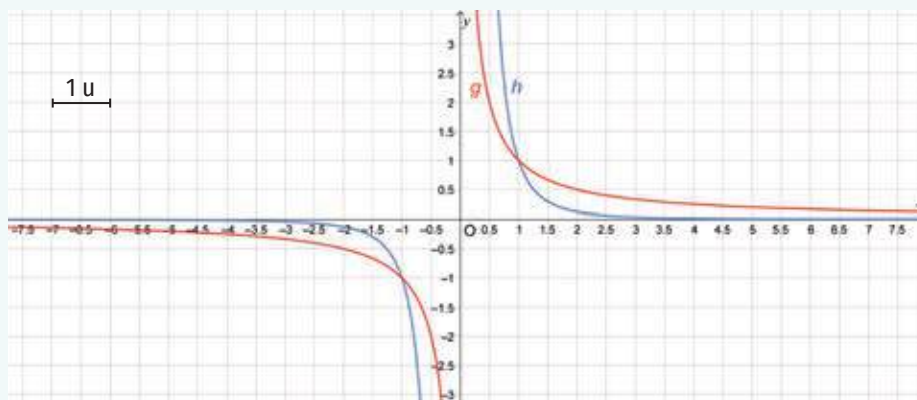


Figura 4

Reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, are un comportament asemănător cu reprezentările grafice ale funcțiilor $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-1}$, și $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^{-3}$.

Studiind reprezentările grafice din figura 4, deducem următoarele proprietăți ale funcției $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$:

- Mulțimea valorilor funcției f este $\mathbb{R}^*$.
- Reprezentarea grafică a funcției f nu intersectează axele de coordonate Ox și Oy .
- Reprezentarea grafică a funcției f este simetrică față de originea reperului cartezian xOy .
- Funcția f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$ și concavă pe intervalul $(-\infty, 0)$.
- Funcția f este strict descrescătoare atât pe intervalul $(-\infty, 0)$ cât și pe intervalul $(0, +\infty)$.
- $f(x) < 0$, pentru orice număr real $x \in (-\infty, 0)$.
- $f(x) > 0$, pentru orice număr real $x \in (0, +\infty)$.

Aplic

1. Se consideră funcțiile $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = 2x^3$, $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = -3x^4 + 2$, $f_3: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x) = -2x^{-3}$, și $f_4: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f_4(x) = 4x^{-2} - 3$.
 - a) Reprezintă grafic funcțiile f_1 , f_2 , f_3 și f_4 .
 - b) Identifică punctele de intersecție dintre reprezentările grafice ale funcțiilor f_1 , f_2 , f_3 și f_4 cu axele de coordonate Ox și Oy și precizează coordonatele acestora.
 - c) Determină imaginile funcțiilor f_1 , f_2 , f_3 și f_4 .
 - d) Studiază monotonia fiecăreia dintre funcțiile f_1 , f_2 , f_3 , f_4 .
2. Utilizând reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, trasează în același sistem de coordonate xOy reprezentările grafice ale următoarelor funcții:
 - a) $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^3 + 1$;
 - b) $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^3 - 1$;
 - c) $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x) = (x + 1)^3$.
3. Studiază monotonia următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = x^{-2}$;	d) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = x^{-3} + x^3$;
b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^4$;	e) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, $f(x) = x^{-3} + 1$.
c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -4x^9$;	
4. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $x^3 = 27$;	c) $2x^{-3} + 1 = -1$;	e) $x^4 - 5 = 59$;
b) $x^3 = -8$;	d) $x^4 = 16$;	f) $3x^{-4} - 2 = 1$.
5. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $x^4 = 3x^3$;	b) $x^2 = x^6$;	c) $-4x^{-5} = x^{-3}$;	d) $9x^{-2} = x^{-4}$.
-------------------	------------------	--------------------------	-------------------------
6. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $x^5 \geq 8x^2$;	b) $x^4 < x^2$;	c) $2x^{-2} > x^{-3}$;	d) $x^{-1} \leq 4x^{-3}$.
----------------------	------------------	-------------------------	----------------------------



POT MAI MULT

Se consideră funcțiile

$$f, g, h, i, j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = x^3,$$

$$g(x) = (x - 3)^3,$$

$$h(x) = (x + 2)^3,$$

$$i(x) = x^3 + 2,$$

$$j(x) = x^3 - 2.$$

a) Reprezintă grafic, în același reper cartezian xOy , funcțiile f și g , f și h , f și i , f și j .

b) Explică modul în care se obțin reprezentările grafice ale funcțiilor g, h, i și j din reprezentarea grafică a funcției f .

7. Se consideră un pătrat cu latura de lungime x cm, $x \in \mathbb{R}, x > 0$.
 - a) Exprimă aria pătratului în funcție de x .
 - b) Scrie funcția f care exprimă aria unui pătrat în funcție de lungimea laturii sale.
 - c) Ce se întâmplă cu aria pătratului dacă latura acestuia se dublează?
 - d) Cum se modifică aria pătratului dacă latura acestuia devine de trei ori mai mică?
 - e) Reprezintă grafic funcția f .
 - f) Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axele de coordonate? Justifică răspunsul.
 - g) Funcția f este crescătoare sau descrescătoare?
8. Se consideră un cub cu muchia de lungime x cm, $x \in \mathbb{R}, x > 0$.
 - a) Exprimă volumul cubului în funcție de x .
 - b) Scrie funcția f care exprimă volumul unui cub în funcție de lungimea muchiei sale.
 - c) Ce se întâmplă cu volumul cubului dacă lungimea muchiei sale se dublează?
 - d) Ce se întâmplă cu volumul cubului dacă lungimea muchiei sale se înjumătățește?
 - e) Reprezintă grafic funcția f cu ajutorul unui instrument digital (*GeoGebra/Desmos*).
 - f) Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axele de coordonate? Justifică răspunsul.
 - g) Funcția f este crescătoare sau descrescătoare?
9. Intensitatea luminii produse de un bec într-un parc, în funcție de distanța (exprimată în metri) față de acesta, este exprimată prin relația $I = 120 \cdot d^{-2}$.
 - a) Scrie funcția f care exprimă intensitatea luminii produse de bec în funcție de distanța față de acesta.
 - b) Reprezintă grafic funcția f cu ajutorul unui instrument digital.
 - c) Calculează $f(2)$.
 - d) Determină intensitatea luminii pentru distanța de 0,4 km.
 - e) De câte ori scade intensitatea dacă distanța se dublează?
 - f) Pentru ce valori ale distanței intensitatea luminii este cel puțin 7,5 unități?
10. a) Determină raza unei sfere al cărei volum este egal cu 36π cm³.
 - b) Determină aria unei sfere al cărei volum este egal cu $\frac{32\pi}{3}$ cm³.
 - c) Determină volumul unei sfere a cărei arie este egală cu 36π cm².
11. Timpul aproximativ t (exprimat în secunde) de care au nevoie moleculele de cerneală pentru a difuza în apă pe o distanță de x centimetri este dat de formula $t = \frac{1}{2} \cdot 10^5 \cdot x^2$.
 - a) În cât timp va difuza cerneala pe o distanță de 10^{-4} cm?
 - b) Pe ce distanță difuzează cerneala în 5 secunde?

5. Funcția radical de ordin 2 și ordin 3

Îmi amintesc

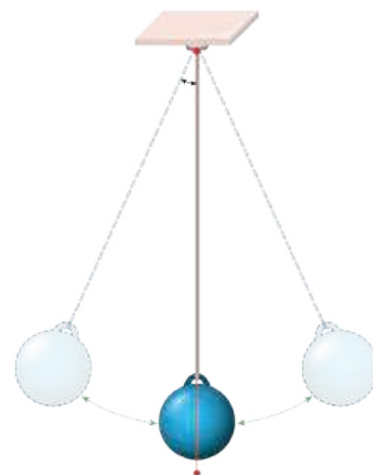


1. Transcrie în caiet și completează tabelul următor.

x	0	1	4	25	64	7^2	8^4	$(-10)^2$	$(-1,5)^6$	$\left(\frac{7}{3}\right)^2$
$\sqrt{x}$										

2. Determină lungimea laturii unui pătrat a cărui arie este egală cu:
a) 81 cm^2 ; b) 121 cm^2 ; c) 576 cm^2 ; d) $1\,000 \text{ cm}^2$; e) 2 cm^2 ; f) 15 cm^2 .
3. Timpul în care un pendul face mișcarea sa oscilatorie este dat de formula $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, unde L reprezintă lungimea pendulului (în metri), iar g este accelerația gravitațională, adică $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Determină durata unei oscilații a unui pendul care are lungimea egală cu 1 m (poți folosi calculatorul).
4. Volumul unui rezervor care are forma unui cub este egal cu 64 m^3 . Determină lungimea muchiei cubului.

PENDUL



Învăț

Funcția radical de ordin 2

Definiția 1. Funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ se numește funcția radical de ordin 2.

În figura 1 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția radical de ordin 2.

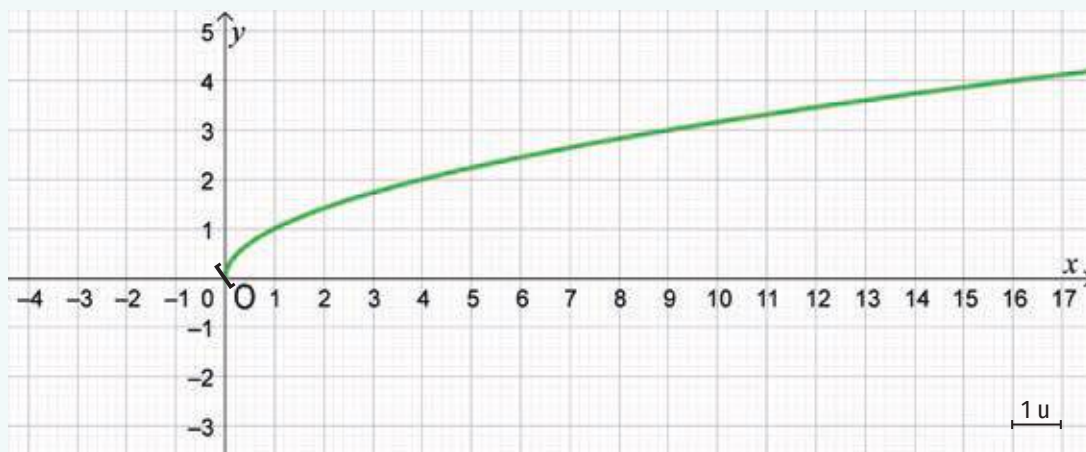


Figura 1

Lecturând reprezentarea grafică a funcției f din figura 1, deducem că:

- Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axele de coordonate Ox și Oy în punctul $O(0, 0)$.
- Funcția f este crescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.
- Punctul de extrem al funcției f este $x = 0$.
- Funcția f este concavă.

Funcția radical de ordin 3

Definiția 2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$ (se citește „radical de ordinul 3 din x ”) se numește funcția radical de ordinul 3.

Funcția radical de ordinul 3 asociază fiecărui număr real x numărul real y cu proprietatea $y^3 = x$.

EXEMPLE:

1. $\sqrt[3]{8} = 2$ deoarece $2^3 = 8$;

3. $\sqrt[3]{-27} = -3$ deoarece $(-3)^3 = -27$.

2. $\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{5}$ deoarece $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$;

În figura 2 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția radical de ordin 3.

Lecturând reprezentarea grafică din figura 2 deducem:

- $Im(f) = \mathbb{R}$;
- Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axele de coordonate Ox și Oy în punctul $O(0, 0)$.
- Funcția f este crescătoare.
- Funcția f este convexă pe intervalul $(-\infty, 0]$ și concavă pe intervalul $[0, +\infty)$.
- Reprezentarea grafică a funcției f este simetrică față de originea reperului cartezian xOy .

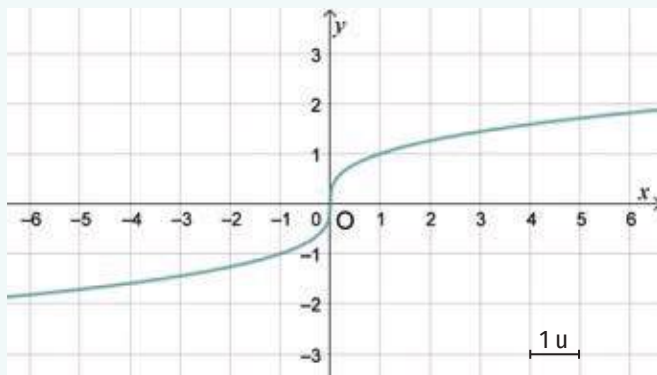


Figura 2

Exercițiu rezolvat



Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x} = 3 - 2x$.

Rezolvare:

Reprezentăm grafic funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 3 - 2x$ în același reper cartezian xOy , cu ajutorul unui instrument digital (GeoGebra sau Desmos) (figura 3). Ecuația $\sqrt[3]{x} = 3 - 2x$ este echivalentă cu ecuația $f(x) = g(x)$.

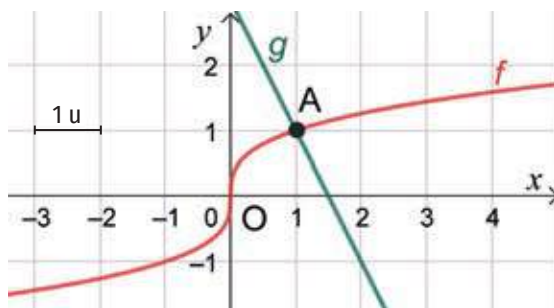


Figura 3

Reprezentările grafice ale celor două funcții se intersectează într-un singur punct (funcția f este strict crescătoare, iar funcția g este strict descrescătoare), care are coordonatele $(1, 1)$, de unde rezultă că ecuația $f(x) = g(x)$ are soluția unică $x = 1$. Așadar, soluția ecuației $\sqrt[3]{x} = 3 - 2x$ este $x = 1$.



Aplic

1. În figura 4 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția f .

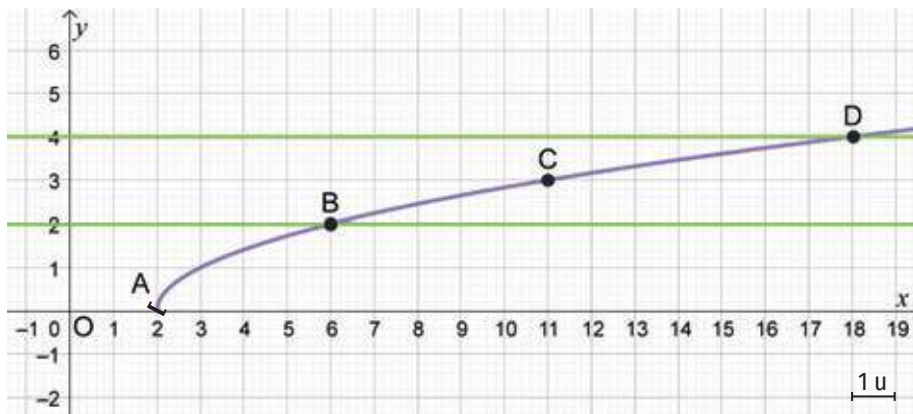


Figura 4

- Precizează domeniul de definiție al funcției f .
 - Precizează mulțimea valorilor funcției f .
 - Determină coordonatele punctelor A, B, C și D.
 - Precizează monotonia funcției f .
 - Încadrează $f(4)$ între două numere întregi consecutive.
 - Compară $f(6)$ și $f(11)$.
 - Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuația $f(x) = 4$.
 - Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuația $f(x) \leq 2$.
 - Determină valorile numărului real x pentru care $2 < f(x) < 4$.
2. Un zoolog studiază distanța medie zilnică parcursă de un animal sălbatic, în funcție de aria habitatului disponibil. În figura 5 este reprezentată grafic, în reperul cartezian xOy , funcția f care modelează această situație. Pe axa Ox este reprezentată aria habitatului, exprimată în km^2 , iar pe axa Oy este reprezentată distanța medie zilnică parcursă de animalul sălbatic, exprimată în km.

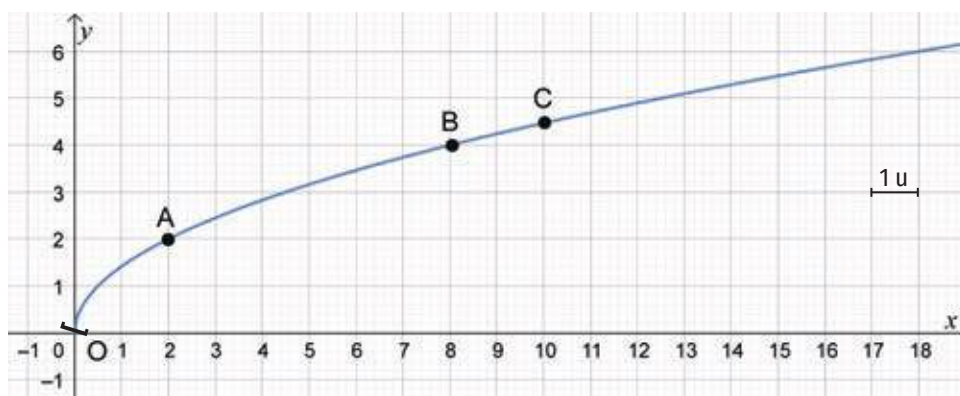


Figura 5

- Determină $f(2)$.
- Încadrează $f(6)$ între două numere întregi consecutive.
- Precizează abscisa punctului C.
- Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuația $f(x) = x$.

ȘTIAI CĂ...?

- Părintele notației moderne a radicalului ($\sqrt{\quad}$) este considerat matematicianul german **Christoff Rudolff** (1499 - 1545). Acesta a introdus simbolul radicalului pentru prima dată în tipar în cartea sa de algebră, *Arta calculului cu necunoscuta* (nu a fost tradusă în limba română), publicată în anul 1525. Semnul folosit de Rudolff era doar o bifă stilizată ($\surd$), fără bara orizontală de deasupra (numită vinculum), care se folosește în prezent.
- René Descartes** a fost cel care a adăugat deasupra linia orizontală în lucrarea sa *La Géométrie* (Geometria), publicată în 1637, unind astfel simbolul lui Rudolff cu o linie de acoperire, rezultând forma actuală.
- Deși simbolul este relativ nou, conceptul de rădăcină pătrată era cunoscut încă din anul 1800 î.H. de către babilonieni, aceștia folosind metode similare cu aproximările moderne.

POT MAI MULT

1. Se consideră

funcțiile

$$f, g, h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$p : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = \sqrt{x},$$

$$g(x) = f(x) - 2,$$

$$h(x) = -2f(x),$$

$$p(x) = f(x - 2).$$

a) Reprezintă grafic, în același reper cartezian xOy , funcțiile f și g , f și h , f și p .

b) Explică modul în care se obțin reprezentările grafice ale funcțiilor g , h și p din reprezentarea grafică a funcției f .

2. Se consideră

funcțiile

$$f, g, h, p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x},$$

$$g(x) = f(x) + 1,$$

$$h(x) = f(-x),$$

$$p(x) = f(x + 2) - 1.$$

a) Reprezintă grafic, în același reper cartezian xOy , funcțiile f și g , f și h , f și p .

b) Explică modul în care se obțin reprezentările grafice ale funcțiilor g , h și p din reprezentarea grafică a funcției f .

e) Determină mulțimea numerelor reale m pentru care $f(m) < 4$.

f) Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuația $f(x) > x + 1$.

g) Determină distanța medie zilnică parcursă de animal, dacă aria habitatului este egală cu 2 km^2 .

h) Determină aria habitatului necesară pentru ca animalul să parcurgă zilnic 4 km .

i) Pentru ce valori ale ariei habitatului distanța medie parcursă zilnic de animal depășește 2 km ?

j) Dacă aria habitatului se dublează, atunci se dublează și distanța parcursă? Justifică.

k) Dacă aria habitatului crește de la 2 km^2 la 8 km^2 , cu cât crește distanța medie zilnică parcursă de animal? Dar dacă aria crește de la 8 km^2 la 18 km^2 ? Ce observi?

3. Autoritățile analizează impactul pe care îl are construcția unei șosele asupra mediului. Funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = 20\sqrt{x}$ exprimă dependența dintre suprafața zonei afectate (exprimată în ha) și lungimea șoselei (exprimată în km).

a) Reprezintă grafic funcția f cu ajutorul unui instrument digital.

b) Punctul $A(4, 40)$ aparține reprezentării grafice a funcției f ?

c) Scrie coordonatele a trei puncte care aparțin reprezentării grafice a funcției f și interpretează semnificația practică a acestora.

d) Câte hectare are zona afectată de construirea unei șosele cu lungimea egală cu 16 km ?

e) Ce lungime are o șosea a cărei construire afectează o zonă cu suprafața egală cu 30 ha ?

f) Autoritățile impun ca zona afectată să nu depășească 100 ha . Care e lungimea maximă a șoselei?

4. Se consideră funcțiile $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$.

a) Calculează $f(1) - g(-3)$.

b) Reprezintă grafic funcțiile f și g în reperul cartezian xOy .

c) Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentările grafice ale funcțiilor f și g și axele de coordonate Ox și Oy .

d) Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentările grafice ale funcțiilor f și g .

e) Stabilește monotonia funcțiilor f și g .

f) Determină ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f a cărui abscisă este egală cu 9 .

g) Determină abscisa punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f a cărui ordonată este egală cu $\sqrt{5}$.

h) Compară $f(\sqrt{10}) - g(3)$.

i) Determină numărul de soluții ale ecuației $f(x) = g(x)$.

j) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = \sqrt{15}$.

k) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $g(x) > 2$.

5. În figura 6 sunt reprezentate grafic, în reperul cartezian xOy , graficele funcțiilor f , g și h .

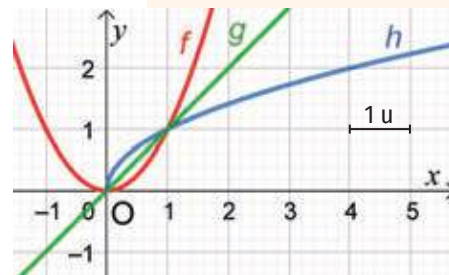


Figura 6

- Precizează natura fiecărei dependențe.
- Precizează monotonia funcțiilor f , g și h .
- Determină $f(1)$, $g(1)$ și $h(1)$. Ce observi?
- Scrie ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției h a cărei abscisă este egală cu 4.
- Scrie abscisa punctului de pe reprezentarea grafică a funcției g a cărei ordonată este egală cu 0.
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile $f(x) = 0$, $g(x) = 2$, $h(x) = 2$.
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile $f(x) \leq 0$, $g(x) \geq 2$ și $h(x) \leq 2$.
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) \leq g(x)$.
- Describe cum se modifică ritmul de creștere al funcției h pe măsură ce argumentul crește.

6. Fie funcțiile $f_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}$, unde D_i reprezintă domeniul maxim de definiție al funcției f_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, cu $f_1(x) = \sqrt{x+1}$, $f_2(x) = \sqrt{x-1}$, $f_3(x) = \sqrt{2x}$.

- Determină mulțimile D_i , $i \in \{1, 2, 3\}$.
- Folosind *GeoGebra* sau *Desmos*, reprezintă grafic funcțiile f_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, în același reper cartezian xOy .
- Precizează mulțimea valorilor pentru fiecare dintre cele trei funcții.
- Scrie coordonatele a cel puțin două puncte de pe reprezentarea grafică a fiecărei funcții f_i , $i \in \{1, 2, 3\}$.
- Scrie ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f_2 a cărei abscisă este egală cu 5.
- Scrie abscisa punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f_1 a cărei ordonată este egală cu 3.
- Există un punct comun reprezentărilor grafice ale funcțiilor f_i , $i \in \{1, 2, 3\}$?
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f_1(x) \leq f_3(x)$.

7. Se consideră funcțiile $f_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, $f_1(x) = \sqrt{2x+1}$, $f_2(x) = -\sqrt{2x+1}$, unde D_i reprezintă domeniul maxim de definiție al funcției f_i , $i \in \{1, 2\}$.

- Determină domeniul de definiție și mulțimea valorilor pentru fiecare dintre funcțiile f_1 și f_2 .
- Scrie coordonatele a cel puțin două puncte de pe reprezentarea grafică a fiecăreia dintre funcțiile f_1 și f_2 .
- Ce poți spune despre intersecțiile reprezentărilor grafice ale funcțiilor f_1 și f_2 cu axele de coordonate Ox și Oy ?
- Precizează monotonia funcțiilor f_1 și f_2 .

INDICAȚIE

Reprezintă grafic funcțiile în același reper cartezian, cu ajutorul unui instrument digital.

ȘTIAI CĂ...?

Radicalii nu se limitează la rădăcina pătrată ($\sqrt{}$).

Aceștia pot fi de ordinul 3 (rădăcină cubică $\sqrt[3]{}$), ordinul 4 ($\sqrt[4]{}$) și așa mai departe.

8. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$.

- Calculează $f(0) - f(1)$.
- Reprezintă grafic funcția f cu ajutorul unui instrument digital.
- Determină punctul care aparține reprezentării grafice a funcției f și are abscisa egală cu -1 .
- Determină punctul care aparține reprezentării grafice a funcției f și are ordonata egală cu 3 .
- Identifică punctele de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și axele de coordonate Ox și Oy și scrie coordonatele acestora.
- Precizează monotonia funcției f .
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = 2$.

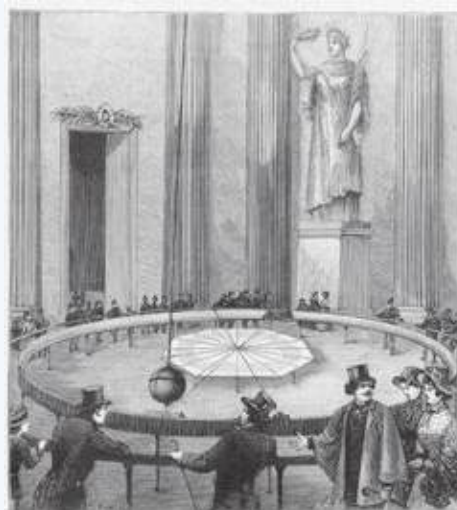
9. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -\sqrt[3]{2x+1}$.

- Reprezintă grafic, în același reper cartezian xOy , cele două funcții cu ajutorul unui instrument digital.
- Precizează mulțimea valorilor funcțiilor f și g .
- Precizează coordonatele a cel puțin două puncte care aparțin reprezentării grafice a funcției f .
- Precizează coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentările grafice ale funcțiilor f și g .
- Stabilește monotonia fiecăreia dintre funcțiile f și g .

Portofoliu

În 1851, fizicianul francez Léon Foucault a prezentat celebrul experiment al pendulului care îi poartă numele, demonstrând rotația Pământului în jurul propriei axe.

Consultă diverse resurse (enciclopedii, manuale, resurse digitale, inteligența artificială) și realizează un scurt portofoliu (1-2 pagini) despre pendulul lui Foucault.



- Describe pe scurt ce este pendulul lui Foucault și cum funcționează.
- Explică observațiile care se pot formula despre mișcarea pendulului.
- Menționează câteva locuri unde poate fi văzut un astfel de pendul.
- Adaugă o imagine relevantă și o scrie câteva curiozități pe care le-ai descoperit despre acest pendul.

6. Funcția exponențială (numărul irațional e)

Descopăr



Un grup de elevi efectuează un experiment în laboratorul de biologie. Ei trebuie să observe la microscop modul în care se înmulțește o bacterie.

Rezultatele măsurătorilor efectuate sunt redată în tabelul următor:

Timp (ore)	0	1	2	3	4	5	6
Număr bacterii	1	2	4	8	16	32	64

- Câte bacterii vor fi după șapte ore? Dar după zece ore?
- Folosind datele din tabel, determină funcția care modelează fenomenul prezentat, apoi reprezintă grafic această funcție folosind *Desmos* sau *GeoGebra*.



Învăț

Definiție. Fie $a > 0$, $a \neq 1$. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$, se numește funcție exponențială de bază a .

Proprietățile funcției exponențiale

Considerăm funcțiile $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ și $h: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $h(x) = 2^x$.

Reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$ are un aspect asemănător cu reprezentarea grafică a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ pentru $0 < a < 1$ (figura 1) și cu reprezentarea grafică a funcției $h: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $h(x) = 2^x$ pentru $a > 1$ (figura 2). Studiind reprezentările grafice din figurile 1 și 2, deducem următoarele proprietăți ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$:

- Domeniul de definiție al funcției f este $\mathbb{R}$, iar mulțimea valorilor funcției f este intervalul $(0, +\infty)$.
- Funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ pentru $0 < a < 1$ și strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ pentru $a > 1$.
- Reprezentarea grafică a funcției f nu intersectează axa Ox .
- Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Oy în punctul de coordonate $(0, 1)$.
- Pentru $0 < a < 1$, axa Ox (dreapta de ecuație $y = 0$) este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f .

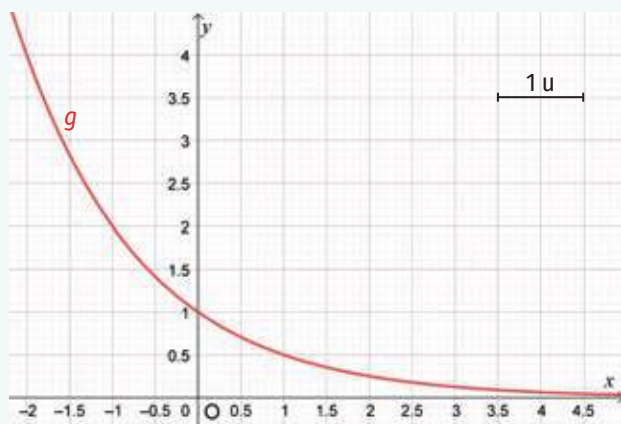


Figura 1

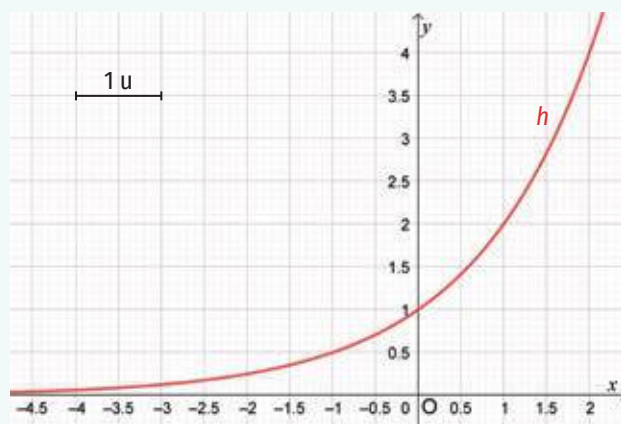


Figura 2

- Pentru $a > 1$, axa Ox (dreapta de ecuație $y = 0$) este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f .
- Funcția exponențială este convexă.
- Ecuația de forma $f(x) = m$, $m \in \mathbb{R}$, $m \leq 0$, nu are soluție.
- Ecuația de forma $f(x) = m$, $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$, are o soluție unică.

Funcția exponențială cu baza e

Funcția exponențială a apărut din nevoia de a modela diverse situații reale, cel mai interesant exemplu fiind cel al dobânzii compuse.

Formula de calcul a dobânzii compuse este $D(n) = S_0 \cdot (1 + p)^n$, unde S_0 reprezintă suma investită inițial, p este procentul dobânzii pe care îl acordă banca, iar n este frecvența de calcul a dobânzii pe perioada în care este investită suma.

În continuare, vom examina ce se întâmplă cu valoarea de 1 RON investit cu dobândă de 100% pe un an, capitalizată la diferite frecvențe.

În condițiile date, $S_0 = 1$, $p = 100\%$ pe un an, $p = 50\%$ pe jumătate de an, ..., $p = 8,3(3)\%$ pentru o lună și $D(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Frecvența dobânzii	$D(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	Valoarea dobânzii (cu șase zecimale exacte)
Anuală	$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1$	2 RON
Bianuală	$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$	2,25 RON
Trimestrială	$\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4$	2,441406 RON
Lunară	$\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12}$	2,613035 Ron
Zilnică	$\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365}$	2,714567 RON
O dată pe oră	$\left(1 + \frac{1}{8\,760}\right)^{8\,760}$	2,718127 RON
O dată pe minut	$\left(1 + \frac{1}{525\,600}\right)^{525\,600}$	2,718279 RON
O dată pe secundă	$\left(1 + \frac{1}{31\,536\,000}\right)^{31\,536\,000}$	2,718282 RON

Din acest tabel deducem: creșterea de la capitalizarea anuală a dobânzii la cea semestrială este mai mare decât creșterea de la o capitalizare lunară la cea zilnică. Acest lucru ne face să ne întrebăm dacă tiparul din tabel va continua. Observăm că valorile dobânzii se apropie de un număr pe măsură ce n crește. Acest număr este irațional, se numește **numărul lui Euler** și se notează cu **e** . În matematică, este folosit frecvent ca bază pentru multe modele exponențiale reale. Pentru a lucra cu baza **e** , folosim aproximația **$e \approx 2,718282$** .

Aplic

1. Reprezintă, în același reper cartezian, folosind *GeoGebra* sau *Desmos*, graficele funcțiilor $f, g, h, i, j: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{x+1}$, $h(x) = 2^x + 1$, $i(x) = 2^{x-1}$, $j(x) = 2^x - 1$. Ce observi?
2. Precizează monotonia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$.

a) $f(x) = 300 \cdot (1,2)^x$;	c) $f(x) = 220 \cdot (0,06)^x$;	e) $f(x) = -3 \cdot (0,2)^{2x}$;
b) $f(x) = 11 \cdot (0,99)^5$;	d) $f(x) = -(1,2)^{3x}$;	f) $f(x) = 3 \cdot (\sqrt{2})^{x+1}$.
3. Precizează care dintre următoarele situații pot fi modelate prin funcții exponențiale. Justifică pe scurt fiecare caz.
 - a) Creșterea medie anuală a populației unei haite de lupi este de 25 de exemplare.
 - b) O populație de bacterii scade de 8 ori la fiecare 24 de ore.
 - c) Valoarea unei colecții de monede a crescut cu 3,25% anual, în ultimii 20 de ani.
 - d) Pentru fiecare sesiune de antrenament, un antrenor personal percepe clienților cu 5 dolari mai puțin decât în sesiunea anterioară.
4. Într-o cultură de bacterii sunt inițial 500 de bacterii, dar numărul acestora se dublează la fiecare oră. 
 - a) Câte bacterii vor fi după patru ore?
 - b) Determină funcția care descrie această situație.
 - c) Câte bacterii vor fi după zece ore?
5. O aplicație digitală are inițial 200 de utilizatori, iar numărul lor crește cu 20% în fiecare lună.
 - a) Câți utilizatori vor fi după o lună? Dar după două luni?
 - b) Determină funcția care descrie această situație.
 - c) Câți utilizatori vor fi după șase luni? Dar după un an?
6. Populația unei țări era de aproape 1,25 de miliarde în anul 2013, iar rata anuală de creștere este de 1,2%.
 - a) Scrie funcția exponențială care modelează creșterea populației țării.
 - b) Care va fi populația țării în anul 2031? Dar în 2035?
7. O persoană depune la o bancă 100 000 de lei cu o dobândă nominală de 12% pe an, capitalizată continuu. Care va fi valoarea investiției peste 10 ani? Dar peste 20 de ani?
8. Valoarea unei mașini este de 21 000 €. Aceasta își pierde 12% din valoare în fiecare an.
 - a) Scrie funcția care reprezintă valoarea mașinii după t ani.
 - b) Reprezintă grafic funcția determinată la punctul a).
 - c) Estimează valoarea mașinii după 6 ani.
9. O persoană are de ales între două modalități de remunerare pentru o perioadă de 30 de zile:
 - Oferta A: Primește o sumă fixă de 1 000 de lei, achitată integral în prima zi.
 - Oferta B: Primește 1 leu în prima zi, iar în fiecare dintre zilele următoare suma primită se dublează față de cea din ziua precedentă.



Jacob Bernoulli



Leonhard Euler

ȘTIAI CĂ...?

Se consideră că numărul irațional e a fost calculat pentru prima oară de către matematicianul elvețian **Jacob Bernoulli**, în a doua jumătate a secolului al XVII-lea. Descoperirea a avut loc în timp ce acesta studia procesul de acumulare a dobânzilor compuse. Bernoulli a reușit să determine o valoare aproximativă a acestui număr cu o precizie de 10 zecimale:

$$e \simeq 2,7182818284...$$

Această constantă a fost denumită „ e ” de către matematicianul elvețian **Leonhard Euler** (1707–1783), care a investigat și a descoperit multe dintre proprietățile acesteia.

ȘTIAI CĂ...?

Dacă ai putea îndoi o foaie de hârtie de 42 de ori, grosimea ei ar ajunge până la Lună. Acesta este un exemplu clasic de creștere exponențială.

Ajută persoana să ia o decizie corectă, răspunzând la următoarele provocări:

- Determină oferta care ar fi mai avantajoasă dacă perioada de plată ar fi de doar două zile.
- Calculează suma totală acumulată prin oferta B după 10 zile și compar-o cu oferta A.
- Stabilește ce variantă ar trebui să aleagă persoana dacă perioada de plată ar fi de 30 de zile.

10. Se consideră funcțiile $f, g, h, i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{x+1}$, $g(x) = -2^x$, $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$, $i(x) = \sqrt{2^x}$.

- Determină mulțimea valorilor pentru fiecare dintre funcțiile f, g, h și i .
- Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre graficele funcțiilor f, g, h, i și axa Oy .
- Scrive ecuațiile asimptotelor orizontale la graficele funcțiilor f, g, h, i .
- Scrive ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f a cărei abscisă este egală cu 1.
- Scrive abscisa punctului de pe reprezentarea grafică a funcției g a cărei ordonată este egală cu -8.
- Precizează monotonia funcțiilor f, g, h și i .
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $g(x) = -i(x)$.
- Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) \leq h(x)$.

11. Folosind reprezentările grafice ale unor funcții exponențiale, compară următoarele puteri cu 1: $\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\sqrt{2^{-1}}$, 3^{-5} , $0,2^{-2}$, $\sqrt{0,25^3}$, $\sqrt{3^3}$, 0 , $(3)^2$, $\sqrt{225^{-1}}$.

12. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

- | | | |
|---------------------------|-------------------------|-------------------------------------|
| a) $2^x = 8$; | c) $3^{-x} = 27$; | e) $3 \cdot 4^{-x} = 3$; |
| b) $7^x = \frac{1}{49}$; | d) $5^x \cdot 2 = 50$; | f) $1 + 10^x = \frac{1001}{1000}$. |

13. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

- | | | |
|--|-----------------------------|-----------------------------|
| a) $3^{x+2} = 9$; | c) $5^x = 6 - x$; | e) $2^{1-x} = x$; |
| b) $3^x = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$; | d) $2^x + 2 = \sqrt{x+2}$; | f) $2^x - 4 = \sqrt{1-x}$. |

14. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele inecuații:

- | | | |
|-------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| a) $3^x \geq 27$; | c) $5^x < 0,2$; | e) $2^{3-2x} \geq \frac{1}{8}$; |
| b) $3^x \leq 4 - x^3$; | d) $2^x + 3^x < \sqrt{x-2}$; | f) $-2^x > \sqrt{4+x}$. |

Portofoliu:

Se consideră funcțiile $f, g, h, p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^x + 2$, $h(x) = -3^{x+1}$, $p(x) = -2 \cdot 3^x$.

- Reprezintă grafic, în același reper cartezian xOy , funcțiile f și g , f și h , f și p .
- Explică modul în care se obțin reprezentările grafice ale funcțiilor g, h și p din reprezentarea grafică a funcției f .

7. Funcția logaritmică (logaritmi, logaritm natural, logaritm zecimal)

Descopăr



Într-un laborator se studiază dezvoltarea unei culturi de bacterii. La început există o singură bacterie, dar se constată că numărul acestora se triplează în fiecare oră.

- Determină după câte ore cultura va conține 81 de bacterii.
- Determină după câte ore cultura va conține 729 de bacterii.
- Între ce intervale de timp se află momentul în care cultura ajunge la 1 000 de bacterii? Cum am putea determina cu precizie acest moment?



Învăț



Definiția 1. Fie $a > 0$, $a \neq 1$ și $x > 0$. Se numește **logaritm în baza a din x** numărul real y cu proprietatea $a^y = x$. Se notează $y = \log_a x$ (citim „logaritm în baza a din x ”).

OBSERVAȚIE.

$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$, unde $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

EXEMPLE:

- $2^4 = 16 \Leftrightarrow \log_2 16 = 4$;
- $2^0 = 1 \Leftrightarrow \log_2 1 = 0$;
- $2^1 = 2 \Leftrightarrow \log_2 2 = 1$;
- $5^3 = 125 \Leftrightarrow \log_5 125 = 3$;
- $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \Leftrightarrow \log_{\frac{5}{3}} \frac{25}{9} = 2$;
- $4^{-2} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \log_4 \frac{1}{16} = -2$.

OBSERVAȚII.

- Pentru orice număr real a , $a > 0$, $a \neq 1$, avem:

$$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a a^r = r \ (r \in \mathbb{Z}).$$

- Dacă baza unui logaritm este 10, atunci în loc de $\log_{10} x$ vom scrie **lg x** și vom citi „logaritm zecimal din x ”. Logaritmii în baza 10 se numesc **logaritmi zecimali**.

- Dacă baza unui logaritm este numărul irațional e , atunci în loc de $\log_e x$ vom scrie **ln x** și vom citi „logaritm natural din x ”. Logaritmii în baza e se numesc **logaritmi naturali**.

Definiția 2. Fie $a > 0$, $a \neq 1$. Funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, se numește **funcție logaritmică de bază a** .

Proprietățile funcției logaritmice

Reprezentarea grafică a funcției $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ are un aspect asemănător cu reprezentarea grafică a funcției $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ pentru $0 < a < 1$ (figura 1) și cu reprezentarea grafică a funcției $h: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $h(x) = \log_2 x$ pentru $a > 1$ (figura 2). Studiind reprezentările grafice din figurile 1 și 2 de la pagina următoare, deducem următoarele proprietăți ale funcției $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$:

- Funcția f este strict descrescătoare pentru $0 < a < 1$ și este strict crescătoare pentru $a > 1$.
- Reprezentarea grafică a funcției f nu intersectează axa Oy .
- Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Ox în punctul de coordonate $(1, 0)$.

- Axa Oy (dreapta de ecuație $x = 0$) este asimptotă verticală la graficul funcției f .
- Dacă $0 < a < 1$, atunci $f(x) > 0$, pentru orice $x \in (0, 1)$ și $f(x) < 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.
- Dacă $a > 1$, atunci $f(x) > 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$ și $f(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, 1)$.
- O ecuație de forma $f(x) = m$, unde $m \in \mathbb{R}$, are o soluție unică pentru orice număr real m .
- Pentru $a \in (0, 1)$ funcția f este convexă, iar pentru $a \in (1, +\infty)$ funcția f este concavă.

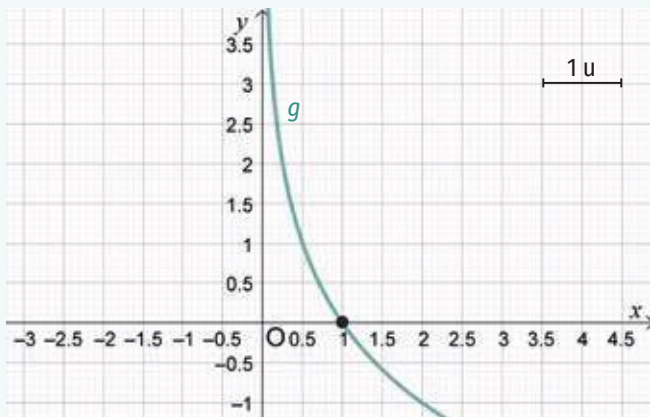


Figura 1

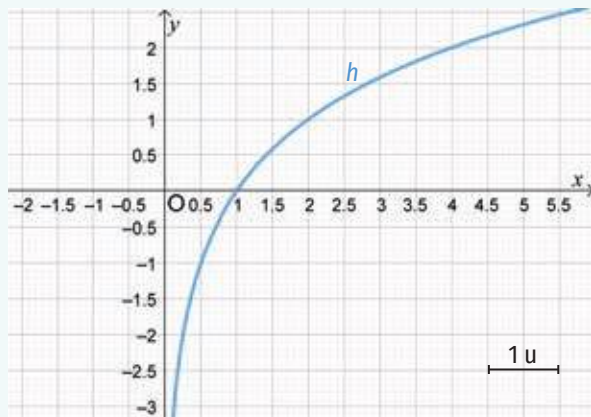


Figura 2

POT MAI MULT

Se consideră funcțiile

$$f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty),$$

$$p : \mathbb{R} \rightarrow (-1, +\infty),$$

$$f(x) = \lg x,$$

$$g(x) = f(x) - 5,$$

$$h(x) = -3f(x),$$

$$p(x) = f(x + 1).$$

a) Reprezintă grafic, în același reper cartezian xOy , funcțiile f și g , f și h , f și p .

b) Explică modul în care se obțin reprezentările grafice ale funcțiilor g , h și p din reprezentarea grafică a funcției f .

Aplic

- Determină domeniul maxim de definiție D al funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ și coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării graficului funcției f cu axele de coordonate, apoi precizează monotonia funcției f .
 - $f(x) = \log_2(x + 1)$;
 - $f(x) = \log_2 x + 1$;
 - $f(x) = \log_2(x - 1)$;
 - $f(x) = \log_2 x - 1$.
- Precizează dacă funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este crescătoare sau descrescătoare.
 - $f(x) = 300 \log_{1,2} x$;
 - $f(x) = 13 \log_{0,99} x$;
 - $f(x) = 220 \cdot \log_{0,5} x$;
 - $f(x) = -\log_{\log_3 27} x$;
 - $f(x) = -3 \log_2 x$;
 - $f(x) = 3 \log_{\sqrt{2}} x$.
- Se consideră funcțiile $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $h: C \rightarrow \mathbb{R}$, $i: D \rightarrow \mathbb{R}$, ($A, B, C, D \subset \mathbb{R}$), $f(x) = \log_3(x + 2)$, $g(x) = -\log_2 x$, $h(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x)$, $i(x) = \log_{\sqrt{3}} x$.
 - Determină domeniul maxim de definiție (A, B, C, D) și mulțimea de valori pentru fiecare dintre funcțiile f, g, h și i .
 - Precizează care este asimptota verticală la graficul fiecăreia dintre funcțiile f, g, h și i .
 - Determină coordonatele a câte două puncte care aparțin reprezentărilor grafice ale funcțiilor f, g, h și i .
 - Pentru fiecare dintre funcțiile f, g, h și i , precizează (dacă există) coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice cu axele de coordonate.
 - Precizează monotonia fiecăreia dintre funcțiile f, g, h și i .

4. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

- a) $\log_3 x = 3$; c) $\log_2 x = x + 3$; e) $\ln x = x$;
 b) $\log_3 x = -\lg x$; d) $\log_{\frac{1}{2}} x = \sqrt{x + \frac{1}{2}}$; f) $\log_2 x - 4 = \sqrt{2 - x}$.

5. Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele inecuații:

- a) $\log_3 x \geq 2$; c) $\log_5 x < x + 1$; e) $\lg(9x + 1) \geq x^2$;
 b) $3^x \leq \log_3 x$; d) $\log_3 x < \sqrt{x - 2}$; f) $-\log_2 x > \sqrt{4x + 3}$.

6. Știm că pH-ul unei soluții chimice este definit prin relația $\text{pH} = -\lg[H^+]$, unde $[H^+]$ reprezintă concentrația ionilor de hidrogen.

i) Calculează valoarea pH-ul unei soluții dacă:

- a) $[H^+] = 10^{-2}$; b) $[H^+] = 10^{-5}$.

ii) Două soluții au valorile pH-ului 2, respectiv 6. Determină de câte ori este mai mare concentrația ionilor de hidrogen într-o soluție față de cealaltă.

7. Nivelul de percepție a unui sunet se calculează cu formula $L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$, unde I reprezintă intensitatea sunetului, iar I_0 este intensitatea minimă perceptibilă. Determină nivelul de percepție a unui sunet, știind că intensitatea acestuia este de 1 000 de ori mai mare decât intensitatea minimă perceptibilă.

8. Valoarea de expunere EV a unei camere foto măsoară cantitatea de lumină care ajunge pe senzorul de imagine. Aceasta este dată de relația $EV = \log_2 \frac{f^2}{t}$, unde f indică deschiderea diafragmei, iar t este timpul de expunere, exprimat în secunde.

- a) Determină valoarea de expunere pentru $f = 8$ și $t = 2$.
 b) Determină f , știind că $EV = -2$ și $t = 16$.

9. Cantitatea de energie eliberată de un cutremur a fost de 500 de ori mai mare decât cantitatea de energie eliberată de un alt cutremur. Diferența dintre magnitudinile celor două cutremure, măsurate pe scara Richter, este notată cu x . Determină x știind că relația dintre raportul energiilor și diferența de magnitudine este modelată de ecuația $10^{1,5x} = 500$.

Portofoliu



Funcția care exprimă dependența dintre vârsta/vechimea unui obiect care are la bază o substanță organică și fracția de Carbon-14 rămasă în probă este $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -8267 \ln x$.

a) Într-o peșteră s-a descoperit un pergament. Testele au arătat că acesta conținea 75% din cantitatea inițială de Carbon-14. Determină vârsta pergamentului.

b) Un os fosilizat are vârsta de aproximativ 5730 de ani. Determină fracția de Carbon-14 rămasă în probă.

EXERSEAZĂ!

1. Transformă relațiile următoare în relații echivalente folosind logaritmi:

- a) $3^2 = 9$;
 b) $2^{-5} = \frac{1}{32}$;
 c) $10^{-1} = 0,1$;
 d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{25}{9}$.

2. Transformă următoarele relații în relații exponențiale echivalente:

- a) $\log_{\sqrt{6}} 6 = 2$;
 b) $\ln e = 1$;
 c) $\lg 0,01 = -2$;
 d) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$.

3. Compară următorii logaritmi cu 1:

- $\log_3 4, \log_4 3, \log_{\sqrt{2}} \frac{2}{3},$
 $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt{3}, \ln 3, \lg 9,$
 $\log_{2\sqrt{2}} 4, \log_3 e^2.$

Exerciții recapitulative

1. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x + 2$.
- a) Determină monotonia funcțiilor f și g .
 - b) Determină coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele de coordonate Ox și Oy .
 - c) Determină coordonatele punctelor de intersecție a reprezentării grafice a funcției g cu axele de coordonate Ox și Oy .
 - d) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) < 0$.
 - e) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $g(x) > 0$.
 - f) Determină coordonatele punctului de intersecție a reprezentărilor grafice ale funcțiilor f și g .
 - g) Determină mulțimea numerelor reale x , pentru care $f(x) \leq g(x)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 4x - 6$.
- a) Identifică punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy și scrie coordonatele acestuia.
 - b) Care este ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f care are abscisa egală cu -1 ?
 - c) Există puncte pe reprezentarea grafică a funcției f a căror ordonată este egală cu -3 ? Dacă da, precizează care sunt abscisele acestor puncte.
 - d) Care este valoarea numărului $f(4)$?
 - e) Care este punctul de extrem al funcției f ?
 - f) Care este mulțimea valorilor funcției f ?
 - g) Există puncte pe reprezentarea grafică a funcției f a căror ordonată este egală cu 1 ?
 - h) Există puncte pe reprezentarea grafică a funcției f a căror ordonată este egală cu -5 ? Dacă da, câte sunt?
 - i) Care este intervalul pe care funcția f este crescătoare?
 - j) Care este intervalul pe care funcția f este descrescătoare?
 - k) Compară numerele reale $f(-3)$ și $f(1)$.
 - l) Compară numerele reale $f(5)$ și $f(9)$.
 - m) Compară numerele reale $f(2)$ și $f(7)$.
 - n) Câte soluții are ecuația $f(x) = -1$?
 - o) Câte soluții are ecuația $f(x) = -7$?
 - p) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = -11$.
 - q) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) > -2$.
 - r) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) < -6$.
3. Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x-1} - 2$, unde D reprezintă domeniul maxim de definiție al funcției f .
- a) Determină mulțimea D .
 - b) Determină mulțimea valorilor funcției f .
 - c) Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Oy ?

- d) Identifică punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox și scrie coordonatele acestuia.
- e) Calculează $f(1) - 2f(2) + 3f(5)$.
- f) Există puncte pe reprezentarea grafică a funcției f a căror ordonată este egală cu -2 ?
- g) Determină abscisa punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f a cărei ordonată este egală cu 1 .
- h) Stabilește dacă funcția este crescătoare sau descrescătoare.
- i) Câte soluții are ecuația $f(x) = -1$?
- j) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = x - 3$.
- k) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) > 3$.
- l) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) > 2^{-x} - \frac{5}{4}$.

4. Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x - 1$, unde D reprezintă domeniul maxim de definiție al funcției f .

- a) Determină mulțimea D și mulțimea valorilor funcției f .
- b) Identifică punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele de coordonate și scrie coordonatele acestuia.
- c) Calculează $f(2) \cdot f(-2)$.
- d) Stabilește monotonia funcției f .
- e) Există asimptote la graficul funcției f ?
- f) Câte soluții are ecuația $f(x) = 5$?
- g) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = 3$.
- h) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{x}$.
- i) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) > 0$.

5. Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(x - 2)$, unde D reprezintă domeniul maxim de definiție al funcției f .

- a) Determină mulțimea D .
- b) Determină mulțimea valorilor funcției f .
- c) Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Oy ?
- d) Identifică punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox și scrie coordonatele acestuia.
- e) Calculează $2f(3) - f(6)$.
- f) Determină ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f a cărei abscisă este egală cu 10 .
- g) Există puncte pe reprezentarea grafică a funcției f a căror ordonată este egală cu -3 ?
- h) Determină abscisa punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f a cărei ordonată este egală cu 4 .
- i) Stabilește dacă funcția este crescătoare sau descrescătoare.
- j) Câte soluții are ecuația $f(x) = -1$?
- k) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = x - 3$.
- l) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) < 1$.
- m) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) > \log_2 x - 1$.

Timp de lucru: 45 de minute

Se acordă 10 puncte din oficiu.

În figura 1 sunt reprezentate grafic funcțiile f , g , h și i în reperul cartezian xOy .

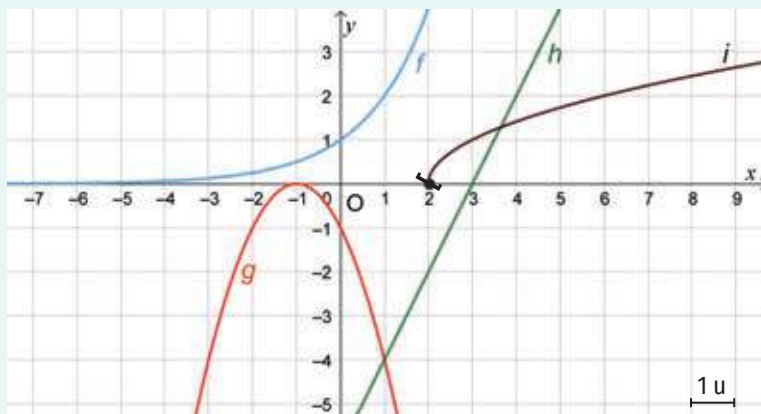


Figura 1

Subiectul I

70 de puncte

70 de puncte

Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

- (5 p.) 1. Dintre funcțiile f , g , h și i , cea care descrie o dependență pătratică este ____.
- (5 p.) 2. Domeniul de definiție al funcției i este ____.
- (5 p.) 3. Mulțimea valorilor funcției f este ____.
- (10 p.) 4. Rezultatul calculului $g(-1) + h(4)$ este egal cu ____.
- (5 p.) 5. Mulțimea soluțiilor ecuației $g(x) = -1$ este ____.
- (5 p.) 6. Ordonata punctului care aparține reprezentării grafice a funcției h și are abscisa egală cu 2 este ____.
- (5 p.) 7. Coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției g și axa absciselor sunt (____, ____).
- (5 p.) 8. Coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției g și axa ordonatelor sunt (____, ____).
- (10 p.) 9. Funcția g este crescătoare pe intervalul ____ și descrescătoare pe intervalul ____.
- (10 p.) 10. Dreapta de ecuație ____ este asimptotă ____ la graficul funcției ____.
- (5 p.) 11. Mulțimea soluțiilor inecuației $i(x) < 2$ este ____.

Subiectul al II-lea

20 de puncte

20 de puncte

Scrie rezolvările complete.

- (10 p.) 1. Determină funcția h .
- (10 p.) 2. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $h(x) = x$.

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din această unitate.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	5 foarte bine	4 bine	3 mediu	2 slab	1 foarte slab
Mi-a fost ușor să rezolv exercițiile.					
Am înțeles criteriile de rezolvare.					
Mi-am amintit conținuturile învățate.					

Elemente de trigonometrie și aplicații ale trigonometriei în geometrie

► 1. Cercul trigonometric: studiul funcțiilor sinus și cosinus pe intervalul $[0, 2\pi]$, studiul funcției tangentă pe intervalul

$[0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$; deducerea valorilor funcțiilor trigonometrice pentru valori particulare

$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

► 1.1. Cercul trigonometric

► 1.2. Studiul funcțiilor sinus și cosinus pe intervalul $[0, 2\pi]$; deducerea valorilor funcțiilor trigonometrice pentru valori particulare

$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

► 1.3. Studiul funcției tangentă pe intervalul $[0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$; deducerea valorilor funcției trigonometrice pentru valori particulare

$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \pi, 2\pi$

► 2. Formule trigonometrice de bază:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \sin(\pi - x) = \sin x,$

$\sin(\pi + x) = -\sin x, \sin(2\pi - x) = -\sin x,$

$\cos(\pi - x) = -\cos x, \cos(\pi + x) = -\cos x,$

$\cos(2\pi - x) = \cos x, \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x,$

$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$

► 3. Teorema cosinusului

► 4. Teorema sinusurilor

► 5. Rezolvarea triunghiurilor oarecare

► 6. Aria triunghiului; ariile unor suprafețe poligonale



1.1. Cercul trigonometric

Îmi amintesc 

Fie un cerc cu centrul în punctul O și raza egală cu 1 cm. Punctele A , B și C aparțin cercului astfel încât măsura unghiului AOB să fie egală cu 60° , măsura arcului $\widehat{BC}$ să fie egală cu 40° și unghiurile AOB și BOC să fie adiacente.

- Desenează figura geometrică care să illustreze datele problemei.
- Determină măsura arcului mic $\widehat{AB}$.
- Determină măsura unghiului BOC .
- Determină măsura arcului mic $\widehat{AC}$ și măsura unghiului AOC .
- Determină lungimea cercului și lungimea arcului mare $\widehat{AC}$.

Învăț

Știm că **unghiul este figura geometrică formată din două semidrepte care au aceeași origine**. Pentru măsurarea unghiurilor, se folosește ca unitate de măsură **gradul sexagesimal**.

Un grad sexagesimal (notat 1°) este măsura unui unghi la centru care cuprinde între laturile sale un arc de cerc a cărui măsură este egală cu a 360-a parte din măsura unui cerc.

Considerăm un cerc de centru O și două puncte A și B care aparțin cercului. Unghiul AOB este unghi la centru și măsura lui este egală cu măsura arcului mic $\widehat{AB}$ (figura 1).

În multe probleme practice, pentru măsurarea unui unghi se folosește o altă unitate de măsură, **radianul**, notat 1 rad. **Măsura de un radian este măsura unui unghi la centru care subîntinde un arc cu lungimea egală cu raza cercului** (figura 2).

Considerăm un cerc de centru O și rază de lungime R . Punctele A și B aparțin cercului $\mathcal{C}(O, R)$ astfel încât $\angle AOB = \alpha^\circ$ (figura 3). În acest caz, lungimea arcului $\widehat{AB}$ este $l = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi R$.

Într-adevăr, cum lungimea unui cerc de rază R este $2\pi R$ și lungimea cercului corespunde unui arc de 360° (măsura cercului), putem scrie:

$$\begin{array}{l} 360^\circ \dots\dots\dots 2\pi R \\ \alpha^\circ \dots\dots\dots x \end{array}$$

$$x = \frac{2\pi R \cdot \alpha^\circ}{360^\circ} \Leftrightarrow x = \frac{\pi R \cdot \alpha^\circ}{180^\circ} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi R$$

Din relația $l = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi R$ obținem $\frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ} = \frac{l}{R}$ și observăm că raportul $\frac{l}{R}$ depinde numai de măsura în grade a unghiului AOB .

Raportul $\frac{l}{R}$ (raportul dintre lungimea arcului $\widehat{AB}$ și lungimea razei cercului $\mathcal{C}(O, R)$) se numește măsura arcului $\widehat{AB}$ exprimată în radiani.

Se numește măsura în radiani a unghiului AOB măsura în radiani a arcului $\widehat{AB}$.

Dacă $R = 1$, atunci $l = \frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ}$, această relație permițând trecerea de la o unitate de măsură la alta.

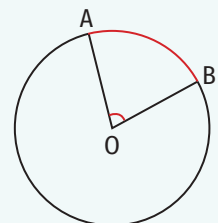


Figura 1

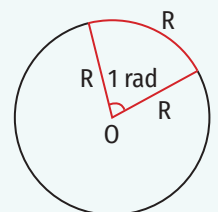


Figura 2

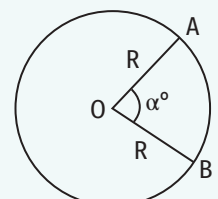


Figura 3

OBSERVAȚII.

1. La folosirea radianului ca unitate de măsură nu se adaugă, în scriere, niciun semn suplimentar, spre deosebire de cazul utilizării gradelor sexagesimale, unde folosim simbolul „°” în scrierea măsurilor unghiurilor.
2. Măsura unui cerc, exprimată în grade sexagesimale, este 360° , iar exprimată în radiani este 2π . Astfel, dacă un arc de cerc are măsura α° și a radiani, legătura dintre măsura în grade și măsura în radiani este dată de relația $a = \frac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}$.

EXEMPLE:

1. Măsura în radiani a unghiului drept este $\frac{\pi \cdot 90^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{2}$.
2. Măsura în grade sexagesimale a unghiului cu măsura egală cu $\frac{\pi}{3}$ este $\frac{\frac{\pi}{3} \cdot 180^\circ}{\pi} = 60^\circ$.

Cercul trigonometric

Considerăm în plan reperul cartezian xOy și un cerc cu centrul în punctul O și raza $R = 1$, pe care îl vom nota $\mathcal{C}$. Punctele de intersecție a cercului $\mathcal{C}$ cu axele de coordonate sunt $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $A'(-1, 0)$ și $B'(0, -1)$ (figura 4).

Un punct mobil, care pleacă din punctul A , se poate deplasa pe cercul $\mathcal{C}$ în două sensuri (figura 5):

- sensul contrar mișcării acelor de ceasornic (sensul de la A spre B), numit și sensul pozitiv;
- sensul mișcării acelor de ceasornic (sensul de la A spre B'), numit și sensul negativ.

OBSERVAȚIE.

Prin convenție, sensul pozitiv de deplasare pe cercul $\mathcal{C}$ se numește **sens trigonometric**.

Arcul parcurs în sens trigonometric se numește **arc orientat pozitiv**, iar arc parcurs în sensul acelor de ceasornic se numește **arc orientat negativ**.

Fie M un punct pe cercul trigonometric. Unghiul AOM se numește **unghi orientat** dacă se precizează sensul în care este parcurs arc $\widehat{AM}$.

Definiție. Cercul cu centrul în originea reperului cartezian xOy și raza 1, pe care am definit sensurile pozitiv și negativ, se numește **cerc trigonometric**.

Fie un cerc $\mathcal{C}(O, 1)$ și A, B două puncte pe acest cerc care nu sunt diametral opuse. Dacă măsura arcului mic $\widehat{AB}$ este α° (sau a radiani), atunci măsura arcului mare $\widehat{AB}$ este $360^\circ - \alpha^\circ$ (sau $2\pi - a$ radiani) (figura 6).

Prin definiție, unghiul la centru care subîntinde arc mare determinat de două puncte de pe cerc are măsura $360^\circ - \alpha^\circ$, unde α° reprezintă măsura unghiului la centru care subîntinde arc mic determinat de cele două puncte (figura 6).

Ținând cont de această definiție a unghiului la centru care subîntinde un arc mare, dacă α este un unghi din intervalul $[0, 2\pi]$, atunci putem spune că lui îi corespunde un punct M_α pe cercul trigonometric pentru care măsura unghiului AOM_α este α , unde A este punctul de coordonate $(1, 0)$.

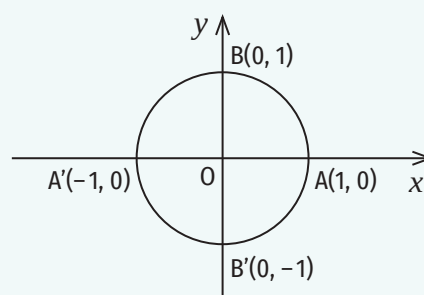


Figura 4

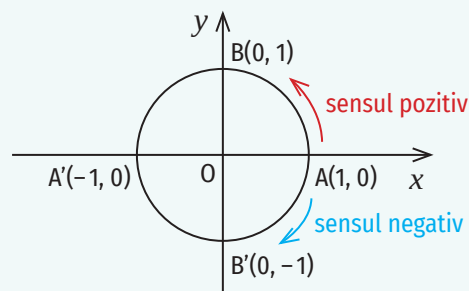


Figura 5

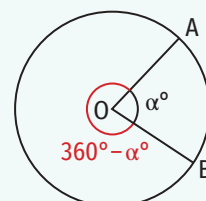


Figura 6

Cum lungimea cercului trigonometric este 2π , atunci $A = M_0$, $B = M_{\frac{\pi}{2}}$, $A' = M_{\pi}$, $B' = M_{\frac{3\pi}{2}}$ (figurile 7 și 8).

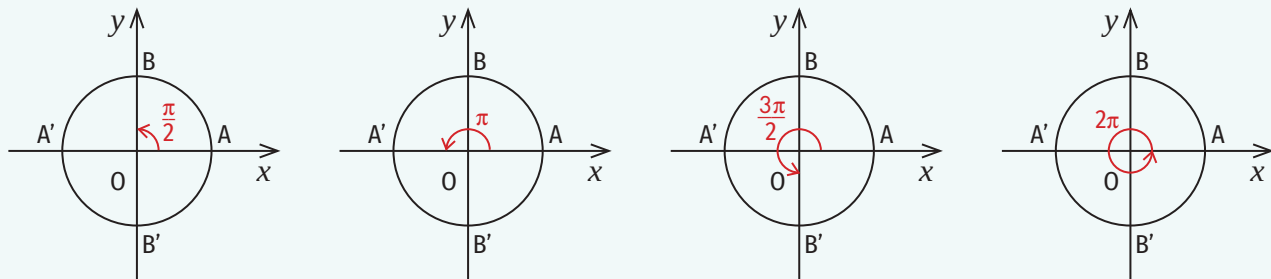


Figura 7

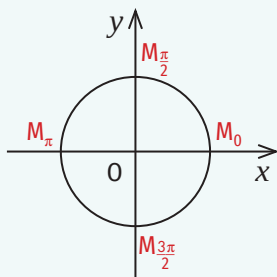


Figura 8

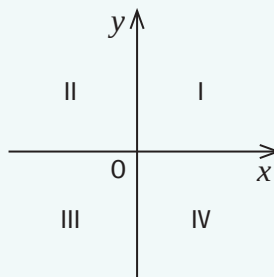


Figura 9

Știm că axele de coordonate împart planul în patru cadrane (figura 9).

Vom spune că unghiul AOM_{α} aparține cadranelui I, II, III sau IV, după cum punctul M_{α} aparține cadranelui I, II, III sau, respectiv, IV. Dacă punctul M_{α} se află în primul cadran, atunci $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ (figura 10). Analog,

- Dacă punctul M_{α} aparține cadranelui II, atunci $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ (figura 11);
- Dacă punctul M_{α} aparține cadranelui III, atunci $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ (figura 12);
- Dacă punctul M_{α} aparține cadranelui IV, atunci $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ (figura 13).

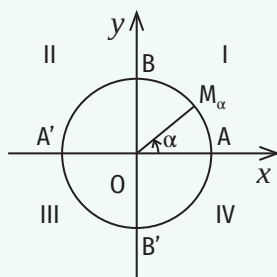


Figura 10

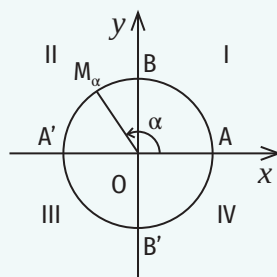


Figura 11

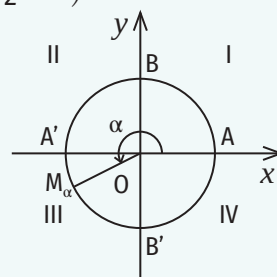


Figura 12

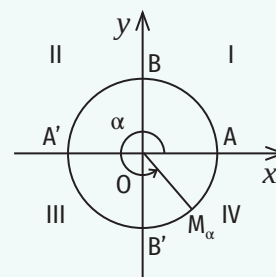


Figura 13

EXEMPLE:

1. Punctul de pe cercul trigonometric asociat unghiului cu măsura $\frac{\pi}{6}$ se află în cadranul I deoarece $\frac{\pi}{6} \in (0, \frac{\pi}{2})$ (figura 14).
2. Punctul de pe cercul trigonometric asociat unghiului cu măsura $\frac{2\pi}{3}$ se află în cadranul II deoarece $\frac{2\pi}{3} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ (figura 15).

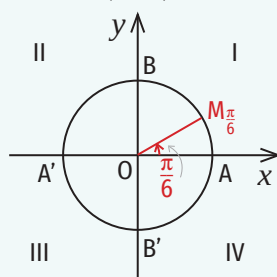


Figura 14

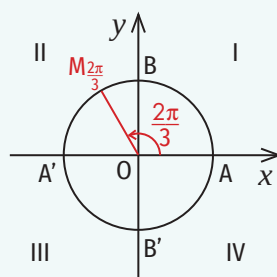


Figura 15

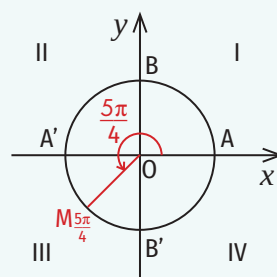


Figura 16

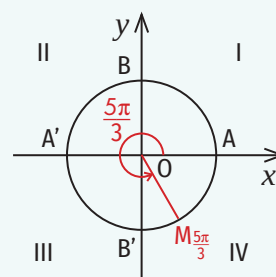


Figura 17

3. Punctul de pe cercul trigonometric asociat unghiului cu măsura $\frac{5\pi}{4}$ se află în cadranul III deoarece $\frac{5\pi}{4} \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ (figura 16).
4. Punctul de pe cercul trigonometric asociat unghiului cu măsura $\frac{5\pi}{3}$ se află în cadranul IV deoarece $\frac{5\pi}{3} \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ (figura 17).

Aplic

1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.

A. Un unghi are măsura egală cu 120° . Exprimată în radiani, măsura acestui unghi este egală cu:

a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{2\pi}{3}$; c) $\frac{5\pi}{6}$; d) $\frac{7\pi}{6}$.

B. Un unghi are măsura egală cu $\frac{\pi}{4}$. Exprimată în grade sexagesimale, măsura acestui unghi este egală cu:

a) 30° ; b) 45° ; c) 60° ; d) 90° .

C. Punctul corespunzător unghiului cu măsura egală cu 160° se află în cadranul:

a) I; b) II; c) III; d) IV.
2. Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a) Punctul corespunzător unghiului cu măsura $\frac{5\pi}{3}$ se află în cadranul ____.

b) Punctul corespunzător unghiului cu măsura ____ (exprimată în radiani) se află în cadranul III.
3. Determină măsura în radiani a unui unghi, știind că măsura sa în grade sexagesimale este egală cu:

a) 10° ; b) 15° ; c) 30° ; d) 45° ; e) 75° ; f) 135° ; g) 180° ; h) 240° ; i) 300° .
4. Determină măsura în grade sexagesimale a unui unghi, știind că măsura sa în radiani este egală cu:

a) $\frac{2\pi}{3}$; b) $\frac{3\pi}{2}$; c) $\frac{11\pi}{6}$; d) $\frac{4\pi}{3}$; e) $\frac{5\pi}{6}$; f) $\frac{\pi}{12}$; g) $\frac{5\pi}{36}$; h) $\frac{\pi}{8}$; i) $\frac{5\pi}{4}$; j) $\frac{7\pi}{6}$.
5. a) Scrie măsurile exprimate în grade sexagesimale a patru unghiuri aflate în:

a) cadranul I; b) cadranul II; c) cadranul III; d) cadranul IV.
6. Scrie măsurile exprimate în radiani a trei unghiuri aflate în:

a) cadranul I; b) cadranul II; c) cadranul III; d) cadranul IV.
7. Marchează, pe cercul trigonometric, punctele corespunzătoare unghiurilor cu măsurile: $0^\circ, 50^\circ, 90^\circ, 100^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 250^\circ, 300^\circ, 330^\circ$.
8. Identifică cadranele în care sunt situate punctele asociate unghiurilor cu măsurile $\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{9}, \frac{3\pi}{5}$ și marchează aceste puncte pe cercul trigonometric.

ȘTIAI CĂ...?

- Un grad sexagesimal reprezintă a 360-a parte dintr-un cerc sau a 90-a parte dintr-un unghi drept.
- Dacă se împarte cercul în 400 de părți egale se obține un grad centezimal, notat 1^g . Un grad centezimal are 100 de minute centezimale (100^c), iar un minut centezimal are 100 de secunde centezimale (100^{cc}).
 $1^g = 100^c = 10\,000^{cc}$

1.2. Studiul funcțiilor sinus și cosinus pe intervalul $[0, 2\pi]$; deducerea valorilor funcțiilor trigonometrice pentru valori particulare $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

Descopăr



Fie $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ și M punctul de pe cercul trigonometric corespunzător unghiului cu măsura α . Notăm cu M' proiecția punctului M pe axa Ox și cu M'' proiecția punctului M pe axa Oy .

- Demonstrează că patrulaterul $OM'MM''$ este dreptunghi.
- Demonstrează că $OM'' = \sin \alpha$ și $OM' = \cos \alpha$.
- Exprimă coordonatele punctului M în funcție de α .

Învăț

Considerăm $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ și M punctul de pe cercul trigonometric corespunzător unghiului cu măsura α . Notăm cu M' proiecția punctului M pe axa Ox și cu M'' proiecția punctului M pe axa Oy (figura 1).

Triunghiul $OM'M$ este dreptunghic în M' și $\sin \alpha = \frac{MM'}{OM}$, $\cos \alpha = \frac{OM'}{OM}$.

Cum $OM = 1$, obținem $\sin \alpha = MM'$ și $\cos \alpha = OM'$.

Patrulaterul $OM'MM''$ este dreptunghi, de unde rezultă $OM'' \equiv MM'$ și, de aici, $OM'' = \sin \alpha$.

Astfel, coordonatele punctului M sunt $(\cos \alpha, \sin \alpha)$.

Această relație permite generalizarea sinusului și cosinusului unui unghi cu măsura $t \in [0, 2\pi]$.

OBSERVAȚIE.

Poziția unui punct M de pe cercul trigonometric poate fi dată prin:

- coordonate metrice (măsura arcului orientat $\widehat{AM}$);
- coordonate unghiulare (măsura unghiului orientat $\angle AOM$);
- coordonate carteziane (x_M, y_M) .

Fie $t \in [0, 2\pi]$ și M punctul de pe cercul trigonometric corespunzător unghiului cu măsura t . Atunci punctul M va avea coordonatele $(\cos t, \sin t)$. Proiecțiile punctului M pe axa Ox aparțin segmentului $AA' \cup \{A, A'\}$, de unde rezultă $-1 \leq \cos t \leq 1$. Proiecțiile punctului M pe axa Oy aparțin segmentului $BB' \cup \{B, B'\}$, de unde rezultă $-1 \leq \sin t \leq 1$.

Definiție. Funcțiile $f: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(t) = \sin t$ și $g: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$, $g(t) = \cos t$, unde $\sin t$ și $\cos t$ sunt ordonata și, respectiv, abscisa punctului de pe cercul trigonometric care corespunde unghiului cu măsura t , reprezintă funcțiile trigonometrice sinus și cosinus definite pe intervalul $[0, 2\pi]$.

EXEMPLE:

1. Pentru a determina $\sin \frac{\pi}{6}$ și $\cos \frac{\pi}{6}$ reprezentăm pe cercul trigonometric punctul M corespunzător unghiului cu măsura $\frac{\pi}{6}$ (figura 2).

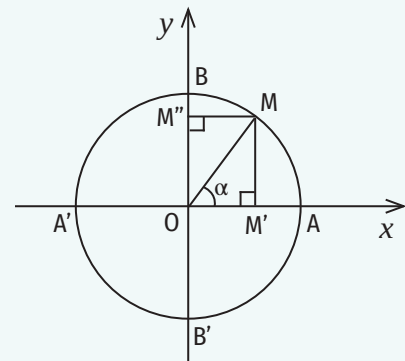


Figura 1

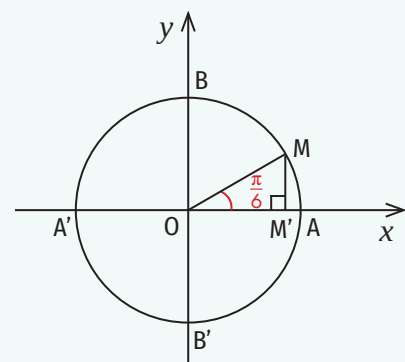


Figura 2

Punctul $M\left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right)$ se află în cadranul I deoarece $\frac{\pi}{6} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Notăm cu M' proiecția punctului M pe axa Ox . Triunghiul $OM'M$ este dreptunghic în M' și măsura unghiului $M'OM$ este $\frac{\pi}{6}$ ($\angle M'OM = 30^\circ$). Conform teoremei unghiului de 30° , $MM' = \frac{1}{2} OM$, adică $MM' = \frac{1}{2}$. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul $OM'M$ ($\angle OM'M = 90^\circ$):

$$M'O^2 + M'M^2 = OM^2 \Leftrightarrow M'O^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow M'O^2 + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow M'O^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow M'O^2 = \frac{3}{4}. \text{ Obținem } M'O = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

În triunghiul $OM'M$, cu $\angle M'OM = \frac{\pi}{6}$, $\angle M'MO = \frac{\pi}{3}$ și $\angle MM'O = \frac{\pi}{2}$ avem:

$$\sin(\angle M'OM) = \frac{MM'}{OM} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{1} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\angle M'OM) = \frac{OM'}{OM} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(\angle M'MO) = \frac{OM'}{OM} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\angle M'MO) = \frac{MM'}{OM} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

2. Pentru a determina $\sin\frac{\pi}{4}$ și $\cos\frac{\pi}{4}$ reprezentăm pe cercul trigonometric punctul M corespunzător unghiului cu măsura $\frac{\pi}{4}$ (figura 3). Acesta se află în cadranul I. Notăm cu M' proiecția punctului M pe axa Ox . Triunghiul $OM'M$ este dreptunghic isoscel cu $\angle OM'M = \frac{\pi}{2}$ și $\angle M'OM = \frac{\pi}{4}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic isoscel $OM'M$ cu $\angle OM'M = \frac{\pi}{2}$ și $\angle M'OM = \frac{\pi}{4}$ obținem $M'M = OM' = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Atunci:

$$\sin(\angle M'OM) = \frac{M'M}{OM} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1};$$

$$\cos(\angle M'OM) = \frac{OM'}{OM} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}.$$

Folosind coordonatele carteziene ale punctelor $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $A'(-1, 0)$ și $B'(0, -1)$ de pe cercul trigonometric și măsurile unghiurilor corespunzătoare, obținem:

- $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ (deoarece $A(\cos 0, \sin 0)$);
- $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ (deoarece $B'\left(\cos \frac{3\pi}{2}, \sin \frac{3\pi}{2}\right)$);
- $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ (deoarece $B\left(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right)$);
- $\sin 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$ (deoarece $A(\cos 2\pi, \sin 2\pi)$);
- $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$ (deoarece $A'(\cos \pi, \sin \pi)$);

Proprietate. Pentru orice $t \in [0, 2\pi]$ are loc egalitatea $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (numită **formula fundamentală a trigonometriei**). 

Fie $t \in [0, 2\pi]$ și M punctul de pe cercul trigonometric corespunzător unghiului cu măsura t . Atunci punctul M va avea coordonatele $(\cos t, \sin t)$.

- Dacă $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\cos t > 0$ și $\sin t > 0$.
- Dacă $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, atunci $\cos t < 0$ și $\sin t > 0$.
- Dacă $t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, atunci $\cos t < 0$ și $\sin t < 0$.
- Dacă $t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, atunci $\cos t > 0$ și $\sin t < 0$.

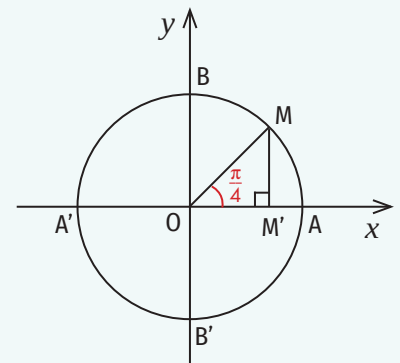


Figura 3

EXEMPLE:

1. $\sin \frac{3\pi}{4} > 0$, deoarece $\frac{3\pi}{4} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

3. $\sin 3 > 0$, deoarece $3 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

2. $\cos \frac{7\pi}{5} < 0$, deoarece $\frac{7\pi}{5} \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$.

4. $\cos 5 > 0$, deoarece $5 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

Proprietățile funcției $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = \sin t$

Reprezentarea grafică a funcției $f: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1], f(t) = \sin t$, este redată în figura 4.

Lecturând reprezentarea grafică a funcției f deducem:

- Funcția f este crescătoare pe intervalele $[0, \frac{\pi}{2}]$ și $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ și este descrescătoare pe intervalul $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.
- Valoarea maximă a funcției f este 1 și se atinge pentru $t = \frac{\pi}{2}$.
- Valoarea minimă a funcției f este -1 și se atinge pentru $t = \frac{3\pi}{2}$.
- Mulțimea valorilor funcției f este $[-1, 1]$.
- Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Ox în punctele de coordonate $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ și $(2\pi, 0)$.
- Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Oy în punctul de coordonate $(0, 0)$.
- $\sin x > 0$, pentru orice $x \in (0, \pi)$ și $\sin x < 0$, pentru orice $x \in (\pi, 2\pi)$.
- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pi, 2\pi\}$.

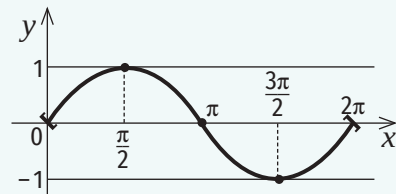


Figura 4

Proprietățile funcției $g: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1], g(t) = \cos t$

Reprezentarea grafică a funcției $g: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1], g(t) = \cos t$, este redată în figura 5.

Lecturând reprezentarea grafică a funcției g deducem:

- Funcția g este crescătoare pe intervalul $[\pi, 2\pi]$ și este descrescătoare pe intervalul $[0, \pi]$.
- Valoarea maximă a funcției g este 1 și se atinge pentru $t = 0$ și $t = 2\pi$.
- Valoarea minimă a funcției g este -1 și se atinge pentru $t = \pi$.
- Mulțimea valorilor funcției g este $[-1, 1]$.
- Reprezentarea grafică a funcției g intersectează axa Ox în punctele de coordonate $(\frac{\pi}{2}, 0)$ și $(\frac{3\pi}{2}, 0)$.
- Reprezentarea grafică a funcției g intersectează axa Oy în punctul de coordonate $(0, 1)$.
- $\cos x > 0$, pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ și $\cos x < 0$, pentru orice $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$.
- Reprezentarea grafică a funcției g este simetrică față de dreapta de ecuație $x = \pi$.

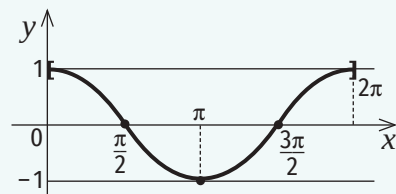


Figura 5

Exerciții rezolvate

1. Determină semnul produsului $\sin\sqrt{2} \cdot \cos\sqrt{7}$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} 2 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\sqrt{2} > 0 \\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < 7 < \pi^2 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \sqrt{7} < \pi \Rightarrow \sqrt{7} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \cos\sqrt{7} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin\sqrt{2} \cdot \cos\sqrt{7} < 0$$

2. Compară numerele reale:

a) $\sin 1$ și $\cos 2$; b) $\sin 2$ și $\sin 3$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} a) 1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin 1 > 0 \\ 2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \cos 2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin 1 > \cos 2$$

$$\left. \begin{array}{l} b) 2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ 3 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ \text{Funcția } f: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1], f(t) = \sin t \text{ e descrescătoare} \\ \text{pe intervalul } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \end{array} \right\} \Rightarrow \sin 2 > \sin 3$$

3. Determină $\sin x$, știind că $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ și $\cos x = \frac{1}{4}$.

Rezolvare:

Folosim formula fundamentală a trigonometriei: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, pentru orice $t \in [0, 2\pi]$. Cum $\cos x = \frac{1}{4}$, obținem $\sin^2 x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \sin^2 x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{1}{16} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{1}{16} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{15}{16} \\ x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \sin x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Aplic

1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.

A. Dintre numerele $\sin 0^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 60^\circ$, mai mare este:

a) $\sin 0^\circ$; b) $\sin 30^\circ$; c) $\sin 45^\circ$; d) $\sin 60^\circ$.

B. Dintre numerele $\sin \frac{6\pi}{5}$, $\cos \frac{13\pi}{7}$, $\sin \frac{7\pi}{8}$, $\cos \frac{\pi}{10}$ mai mic este:

a) $\sin \frac{6\pi}{5}$; b) $\cos \frac{13\pi}{7}$; c) $\sin \frac{7\pi}{8}$; d) $\cos \frac{\pi}{10}$.

C. Rezultatul calculului $\sin \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2}$ este egal cu:

a) -1; b) 0; c) $\frac{1}{2}$; d) 1.

2. Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a) Rezultatul calculului $\sin 1 \cdot \cos 3$ este ____ decât 0.

b) Rezultatul calculului $\sin \pi - \cos \pi$ este egal cu ____.

CONTEXTUALIZEZ

Funcțiile sinus și cosinus descriu mișcarea circulară uniformă idealizată și permit determinarea poziției unui punct aflat pe cerc în orice moment.

Să ne imaginăm un punct luminos fixat pe valva unei roți de bicicletă de rază R , în timp ce bicicleta este suspendată și roata se învâрте. Dacă originea sistemului de axe $O(0,0)$ este în centrul butucului roții, atunci poziția valvei la un moment dat este dată de relațiile:

$$x(t) = R \cos \omega t,$$

$y(t) = R \sin \omega t$, unde R reprezintă raza roții, ω reprezintă viteza unghiulară a roții, măsurată în radiani pe secundă, iar t reprezintă timpul.

Funcția cosinus indică poziția valvei pe direcția stânga-dreapta față de centrul roții. Ea arată cât de departe se află valva orizontal (stânga – dreapta) de centrul roții în timpul rotației. Funcția sinus indică poziția valvei pe direcția sus-jos față de centrul roții. Ea arată cât de sus sau cât de jos se află valva în timpul rotației.

Dacă analizăm poziția valvei față de sol, observăm că centrul roții se află la înălțimea R . În acest caz, modelul matematic devine $h(t) = R + R \sin \omega t$.

3. Calculează:

- a) $\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 180^\circ - \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ$;
 b) $\cos^2 45^\circ + 2\sin^2 30^\circ - \sin 90^\circ$;
 c) $\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ - \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ + \cos 60^\circ$;
 d) $\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ - 4\sqrt{3} \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ$;
 e) $\frac{\sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ}$; f) $\frac{\sin 60^\circ \cdot \cos 90^\circ}{\cos 25^\circ}$; g) $\frac{\sin 45^\circ \cdot \cos 0^\circ}{\sin 30^\circ}$.

4. Calculează:

- a) $\sin \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3}$; g) $4\sin^2 \frac{\pi}{6} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{3}$;
 b) $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{\pi}{4}$; h) $\sqrt{3} \cdot \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3}$;
 c) $(\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{3}) \cdot \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}}$; i) $\sqrt{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} - 2\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$;
 d) $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{2}$; j) $(\sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{6})(\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6})$;
 e) $\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{3} + \sin 0$; k) $(\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3})^2 + \cos \frac{\pi}{6}$;
 f) $\sin^2 \frac{\pi}{3} - \cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{6}$; l) $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6}$.

5. Arată că:

- a) $(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4})^2 = \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}}\right)^2$; c) $(\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3})(\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}) = \cos^2 \frac{\pi}{4}$.
 b) $(\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6})^2 = \cos^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3}$;

6. Determină semnul numărului real:

- a) $\sin \frac{\pi}{10}$; b) $\cos \frac{3\pi}{4}$; c) $\sin 3$; d) $\cos 1$; e) $\sin \frac{15\pi}{8}$.

7. Determină semnul numărului real a:

- a) $a = \sin \frac{3\pi}{8} \cdot \sin \frac{4\pi}{3}$; d) $a = \cos 1,8 \cdot \cos 5,5$; g) $a = \sin 4 + \cos 4$;
 b) $a = \cos \frac{2\pi}{5} \cdot \cos \frac{10\pi}{7}$; e) $a = \sin \frac{5\pi}{3} + \sin \frac{7\pi}{6}$; h) $a = \sin \frac{\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{4}$;
 c) $a = \sin \sqrt{8} \cdot \sin \sqrt{15}$; f) $a = \cos \frac{1}{2} + \cos \frac{21}{4}$; i) $a = \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{3\pi}{7}$.

8. Compară numerele reale:

- a) $\cos \frac{11\pi}{7}$ și $\sin \frac{7\pi}{5}$; b) $\sin \frac{17\pi}{9}$ și $\sin \frac{18\pi}{11}$; c) $\cos \frac{3\pi}{7}$ și $\cos \frac{4\pi}{9}$.

9. Determină $\sin x$, știind că:

- a) $\cos x = \frac{1}{3}$ și $x \in (0, \frac{\pi}{2})$; c) $\cos x = -\frac{4}{5}$ și $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$;
 b) $\cos x = -\frac{2}{3}$ și $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$; d) $\cos x = \frac{1}{5}$ și $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

10. Determină $\cos x$, știind că:

- a) $\sin x = \frac{3}{5}$ și $x \in (0, \frac{\pi}{2})$; c) $\sin x = -\frac{24}{25}$ și $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$;
 b) $\sin x = \frac{5}{13}$ și $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$; d) $\sin x = -\frac{1}{2}$ și $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

11. Fie $x \in [0, 2\pi]$. Calculează:

- a) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$; b) $(4\sin x + 3\cos x)^2 + (4\cos x - 3\sin x)^2$.

INDICAȚIE:

Se va folosi semnul/
monotonia funcțiilor
 $f, g : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$,
 $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$.

1.3. Studiul funcției tangentă pe intervalul $[0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$; deducerea valorilor funcției trigonometrice pentru valori particulare $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \pi, 2\pi$

Îmi amintesc



Fie ABC un triunghi dreptunghic în A.

- Exprimă $\sin B$, $\sin C$, $\cos B$, $\cos C$, $\operatorname{tg} B$ și $\operatorname{tg} C$ în funcție de lungimile laturilor triunghiului ABC.
- Exprimă $\operatorname{tg} B$ în funcție de $\sin B$ și $\cos B$.
- Exprimă $\operatorname{tg} C$ în funcție de $\sin C$ și $\cos C$.



Învăț



Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, cu $\angle ABC = t$ (figura 1).

Din clasele anterioare, știm că: $\sin t = \frac{AC}{BC}$, $\cos t = \frac{AB}{BC}$, $\operatorname{tg} t = \frac{AC}{AB}$.

$$\text{Astfel, } \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{AB} = \operatorname{tg} t.$$

OBSERVAȚIE.

Raportul $\frac{\sin t}{\cos t}$ există dacă $\cos t \neq 0$, adică dacă $t \neq \frac{\pi}{2}$ și $t \neq \frac{3\pi}{2}$.

Definiție. Funcția $h: [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(t) = \operatorname{tg} t$ ($\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$) reprezintă funcția trigonometrică tangentă definită pe $[0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, unde $\sin t$ și $\cos t$ sunt ordonata și, respectiv, abscisa punctului de pe cercul trigonometric care corespunde unghiului cu măsura t .

EXEMPLE:

$$1. \operatorname{tg} 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0;$$

$$3. \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1;$$

$$5. \operatorname{tg} \pi = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{-1} = 0;$$

$$2. \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$4. \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3};$$

$$6. \operatorname{tg} 2\pi = \frac{\sin 2\pi}{\cos 2\pi} = \frac{0}{1} = 0.$$

Pentru identificarea semnului funcției trigonometrice tangentă vom folosi relația $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$, pentru orice $t \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$. Astfel,

$$\bullet t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} t > 0;$$

$$\bullet t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} t > 0;$$

$$\bullet t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \operatorname{tg} t < 0;$$

$$\bullet t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \operatorname{tg} t < 0.$$

EXEMPLE:

$$1. \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} > 0, \text{ deoarece } \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$3. \operatorname{tg} 5 < 0, \text{ deoarece } 5 \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right);$$

$$2. \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} < 0, \text{ deoarece } \frac{3\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right);$$

$$4. \operatorname{tg} 4 > 0, \text{ deoarece } 4 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

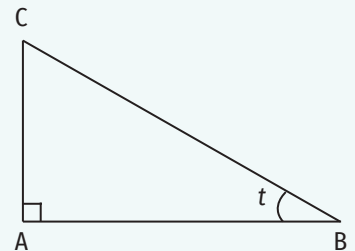


Figura 1

Proprietățile funcției $h : [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}, h(t) = \operatorname{tg} t$ 

Lecturând reprezentarea grafică a funcției h din figura 2 deducem:

- Funcția h este crescătoare pe fiecare dintre intervalele $\left[0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.
- Reprezentarea grafică a funcției h intersectează axa Ox în punctele de coordonate $(0, 0), (\pi, 0)$ și $(2\pi, 0)$.
- Reprezentarea grafică a funcției h intersectează axa Oy în punctul de coordonate $(0, 0)$.
- Dreptele de ecuații $x = \frac{\pi}{2}$ și $x = \frac{3\pi}{2}$ sunt asimptote verticale la graficul funcției h .
- $\operatorname{tg} x > 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ și $\operatorname{tg} x < 0$, pentru orice $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.
- $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pi, 2\pi\}$.

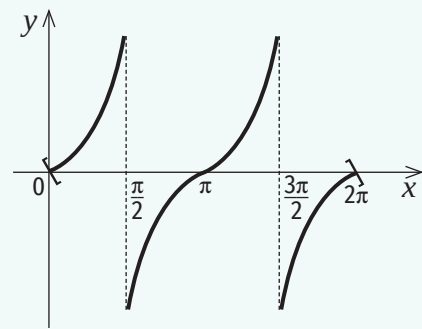


Figura 2

Exerciții rezolvate

1. Determină semnul produsului $\operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{7\pi}{5}$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \operatorname{tg} 2 < 0 \\ \frac{7\pi}{5} \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{7\pi}{5} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{7\pi}{5} < 0$$

2. Compară numerele reale:

a) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$ și $\operatorname{tg} \frac{15\pi}{8}$; b) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$ și $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \frac{\pi}{5} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{5} > 0 \\ \frac{15\pi}{8} \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{15\pi}{8} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{5} > \operatorname{tg} \frac{15\pi}{8}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } \frac{2\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ \frac{5\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} < \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$$

Funcția $h : [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}, h(t) = \operatorname{tg} t$ e crescătoare pe intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

3. Determină $\cos x$, știind că $\operatorname{tg} x = -2$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Rezolvare:

$$\operatorname{tg} x = -2 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -2 \Rightarrow \sin x = -2\cos x$$

Folosim formula fundamentală a trigonometriei: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, pentru orice $t \in [0, 2\pi]$. Cum $\sin x = -2\cos x$, obținem $(-2\cos x)^2 + \cos^2 x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} 4\cos^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 5\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5} \\ x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \cos x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$



Aplic

1. Calculează:

a) $\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$;

b) $\operatorname{tg}^2 45^\circ + \operatorname{tg}^2 60^\circ - \operatorname{tg} 0^\circ$;

c) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos 45^\circ - \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + \cos 60^\circ$;

d) $(\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ)(\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ)$;

e) $\frac{\operatorname{tg} 30^\circ}{\cos 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ}$;

f) $\frac{\operatorname{tg} 60^\circ \cdot \cos 90^\circ}{\operatorname{tg} 25^\circ}$;

g) $\frac{\sin 45^\circ \cdot \cos 0^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ}$;

h) $\frac{(\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ)^2}{\sin 30^\circ}$.

2. Calculează:

a) $3 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} - 4 \cos^2 \frac{\pi}{3}$;

b) $(\sin \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}) \cdot 6 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$;

c) $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} (\cos^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{3}) - \cos \frac{\pi}{2}$;

d) $\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$

e) $4(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3})^2 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$;

f) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} 0$.

3. Arată că:

a) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, pentru orice $x \in [0, 2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$;

b) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$, pentru orice $x \in (0, 2\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$.

4. Determină semnul numărului real:

a) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{9}$; b) $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{7}$; c) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$; d) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$; e) $\operatorname{tg} 2$; f) $\operatorname{tg} 5$; g) $\operatorname{tg} 6$.

5. Determină semnul numărului real a :

a) $a = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$;

d) $a = \operatorname{tg} 3 \cdot \operatorname{tg} \frac{3}{2}$;

g) $a = \operatorname{tg} 5 - \operatorname{tg} 4$;

b) $a = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{10\pi}{9}$;

e) $a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}$;

h) $a = \operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 1$;

c) $a = \operatorname{tg} \sqrt{8} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{15}$;

f) $a = \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{13\pi}{8}$;

i) $a = \operatorname{tg} \frac{21\pi}{11} - \operatorname{tg} \frac{11\pi}{7}$.

6. Compară numerele reale:

a) $\sin \frac{\pi}{8}$ și $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{8}$;

b) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$ și $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{7}$;

e) $\sin 4$ și $\operatorname{tg} 1$.

7. Determină $\operatorname{tg} x$, știind că:

a) $\cos x = \frac{1}{4}$ și $x \in (0, \frac{\pi}{2})$;

c) $\sin x = -\frac{1}{5}$ și $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$;

b) $\cos x = -\frac{1}{3}$ și $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$;

d) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

8. Determină $\cos x$, știind că:

a) $\operatorname{tg} x = 2$ și $x \in (0, \frac{\pi}{2})$;

c) $\operatorname{tg} x = -3$ și $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$;

b) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ și $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$;

d) $\operatorname{tg} x = \sqrt{5}$ și $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$.

9. Determină $\sin x$, știind că

a) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{6}$ și $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$;

c) $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$ și $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$;

b) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ și $x \in (0, \frac{\pi}{2})$;

d) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ și $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$.

EXERSEAZĂ!

1. Scrie litera

corespunzătoare
răspunsului corect
pentru fiecare dintre
enunțurile de mai jos.
Este corectă o singură
variantă de răspuns.

A. Dintre numerele
 $\operatorname{tg} 0^\circ$, $\operatorname{tg} 30^\circ$, $\operatorname{tg} 45^\circ$,
 $\operatorname{tg} 60^\circ$, mai mic este:

- a) $\operatorname{tg} 0^\circ$; b) $\operatorname{tg} 30^\circ$;
c) $\operatorname{tg} 45^\circ$; d) $\operatorname{tg} 60^\circ$.

B. Dintre numerele
 $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{8}$, $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{5}$, $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{7}$,
 $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{8}$, mai mare este:

- a) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{8}$;
b) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{5}$;
c) $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{7}$;
d) $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{8}$.

C. Rezultatul
calculului $\operatorname{tg} \pi + \operatorname{tg} 2\pi$
este egal cu:

- a) -1 ;
b) 0 ;
c) $\frac{1}{2}$;
d) 1 .

2. Completează
spațiile libere pentru
a obține propoziții
adevărate:

- a) Rezultatul
calculului $\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} 3$
este _____ decât 0 .
b) Rezultatul
calculului $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6}$
este egal cu _____.

2. Formule trigonometrice de bază: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
 $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\sin(2\pi - x) = -\sin x$,
 $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\cos(2\pi - x) = \cos x$,
 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$,
 $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$

Descoperă

Elevii vor fi împărțiți în trei grupe de lucru. Elevii din fiecare grupă vor marca pe cercul trigonometric punctele corespunzătoare unghiurilor cu măsura t și vor completa, folosind cercul trigonometric, un tabel ca cel de mai jos:

t				
$\sin t$				
$\cos t$				

Grupa 1: $t \in \{30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ\}$

Grupa 2: $t \in \{45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ\}$

Grupa 3: $t \in \{60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ\}$

Învăț



Fie $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $M(\cos t, \sin t)$ punctul de pe cercul trigonometric corespunzător unghiului cu măsura t . Punctul $N\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)$ este punctul de pe cercul trigonometric corespunzător unghiului cu măsura $\frac{\pi}{2} - t$ (figurile 1 și 2).

Punctele M' și N' sunt proiecțiile punctelor M și N pe axa Ox . Atunci $OM' = \cos t$, $MM' = \sin t$, $ON' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, $NN' = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$. Triunghiurile dreptunghice $MM'O$ și $NN'O$ sunt congruente ($OM \equiv ON$, $\angle MOM' \equiv \angle ONN'$), de unde rezultă $OM' \equiv NN'$, $MM' \equiv ON'$.

$$OM' \equiv NN' \Rightarrow \cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

$$MM' \equiv ON' \Rightarrow \sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

Așadar:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t \text{ și } \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t, \text{ pentru orice } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

OBSERVAȚIE.



$$\sin(90^\circ - x) = \cos x \text{ și } \cos(90^\circ - x) = \sin x, \text{ pentru orice } x \in (0, 90^\circ)$$

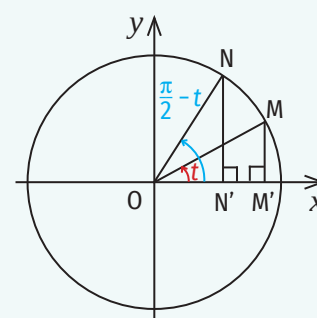


Figura 1

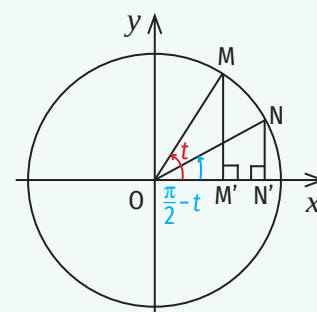


Figura 2

Folosind simetria cercului trigonometric față de axe de coordonate și față de originea reperului cartezian xOy , vom exprima funcțiile trigonometrice ale unghiurilor din cadranele II, III și IV în funcție de funcțiile trigonometrice ale unghiurilor din primul cadran. Formulele obținute le vom numi **formule de reducere la primul cadran**.

- Fie $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $M(\cos t, \sin t)$ punctul de pe cercul trigonometric corespunzător unghiului cu măsura t . Punctul N este simetricul punctului M față de axa Oy . Evident, punctul N aparține cercului trigonometric. Punctele M' și N' sunt proiecțiile punctelor M și N pe axa Ox (figura 3). Atunci $OM' = -\cos t$, $MM' = \sin t$.

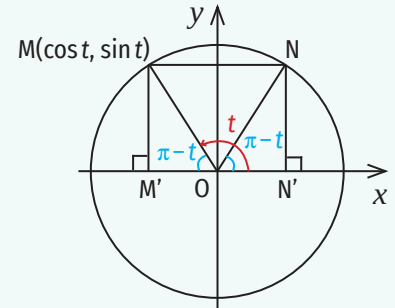


Figura 3

Triunghiurile dreptunghice OMM' și ONN' sunt congruente ($OM \equiv ON$, $OM' \equiv ON'$), de unde rezultă $\angle MOM' \equiv \angle NON'$. Cum $\angle MOM' = \pi - t$, obținem $\angle NON' = \pi - t$, deci coordonatele punctului N sunt $(\cos(\pi - t), \sin(\pi - t))$. Atunci $ON' = \cos(\pi - t)$, $NN' = \sin(\pi - t)$.

$$OM' \equiv ON' \Rightarrow -\cos t = \cos(\pi - t)$$

$$MM' \equiv NN' \Rightarrow \sin t = \sin(\pi - t)$$

$$\operatorname{tg}(\pi - t) = \frac{\sin(\pi - t)}{\cos(\pi - t)} = \frac{\sin t}{-\cos t} = -\operatorname{tg} t$$

Am obținut **formulele de reducere la primul cadran**:

$$\cos t = -\cos(\pi - t), \sin t = \sin(\pi - t), \operatorname{tg} t = -\operatorname{tg}(\pi - t), \text{ pentru orice } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

Folosind măsurile unghiurilor exprimate în grade sexagesimale, obținem:

$$\cos x = -\cos(180^\circ - x), \sin x = \sin(180^\circ - x), \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(180^\circ - x), \text{ pentru orice } x \in (90^\circ, 180^\circ)$$

EXEMPLE: 

$$1. \cos 120^\circ = -\cos(180^\circ - 120^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$3. \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} = -\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$2. \sin \frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

- Fie $t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ și $M(\cos t, \sin t)$ punctul de pe cercul trigonometric corespunzător unghiului cu măsura t . Punctul N este simetricul punctului M față de punctul O . Evident, punctul N aparține cercului trigonometric. Punctele M' și N' sunt proiecțiile punctelor M și N pe axa Ox (figura 4). Atunci $OM' = -\cos t$, $MM' = -\sin t$.

Triunghiurile dreptunghice OMM' și ONN' sunt congruente ($OM \equiv ON$, $\angle MOM' \equiv \angle NON'$), de unde rezultă $OM' \equiv ON'$ și $MM' \equiv NN'$. Cum $\angle MOM' = t - \pi$, obținem $\angle NON' = t - \pi$, deci coordonatele punctului N sunt $(\cos(t - \pi), \sin(t - \pi))$. Atunci $ON' = \cos(t - \pi)$, $NN' = \sin(t - \pi)$.

$$OM' \equiv ON' \Rightarrow -\cos t = \cos(t - \pi)$$

$$MM' \equiv NN' \Rightarrow -\sin t = \sin(t - \pi)$$

$$\operatorname{tg}(t - \pi) = \frac{\sin(t - \pi)}{\cos(t - \pi)} = \frac{-\sin t}{-\cos t} = \operatorname{tg} t$$

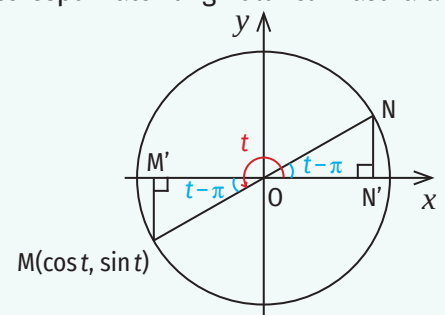


Figura 4

Am obținut **formulele de reducere la primul cadran**:

$$\cos t = -\cos(t - \pi), \sin t = -\sin(t - \pi), \operatorname{tg} t = \operatorname{tg}(t - \pi), \text{ pentru orice } t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Folosind măsurile unghiurilor exprimate în grade sexagesimale, obținem:

$$\cos x = -\cos(x - 180^\circ), \sin x = -\sin(x - 180^\circ), \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x - 180^\circ), \text{ pentru orice } x \in (180^\circ, 270^\circ)$$

EXEMPLE: 

1. $\sin 225^\circ = -\sin(225^\circ - 180^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

3. $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} = \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{6} - \pi\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

2. $\cos \frac{4\pi}{3} = -\cos\left(\frac{4\pi}{3} - \pi\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2};$

• Fie $t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ și $M(\cos t, \sin t)$ punctul de pe cercul trigonometric corespunzător unghiului cu măsura t . Punctul N este simetricul punctului M față de axa Ox . Evident, punctul N aparține cercului trigonometric. Punctul P este punctul de intersecție dintre axa Ox și dreapta MN (figura 5). Atunci $OP = \cos t$, $MP = -\sin t$.

În triunghiul isoscel OMN , segmentul OP este mediană și înălțime, deci semidreapta OP este bisectoarea unghiului MON , de unde rezultă $\angle MOP = \angle NOP = 2\pi - t$. Astfel, coordonatele punctului N sunt $(\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t))$ și $OP = \cos(2\pi - t)$, $NP = \sin(2\pi - t)$.

$$OP \equiv OP \Rightarrow \cos t = \cos(2\pi - t)$$

$$MP \equiv NP \Rightarrow -\sin t = \sin(2\pi - t)$$

Am obținut **formulele de reducere la primul cadran**:

$$\cos t = \cos(2\pi - t), \sin t = -\sin(2\pi - t).$$

Folosind măsurile unghiurilor exprimate în grade sexagesimale, obținem:

$$\cos x = \cos(360^\circ - x), \sin x = -\sin(360^\circ - x).$$

EXEMPLE:

1. $\sin 300^\circ = -\sin(360^\circ - 300^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

2. $\cos \frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{11\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

OBSERVAȚIE.

Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\pi - x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\pi + x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $2\pi - x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ și:

$$\sin(\pi - x) = \sin x;$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x;$$

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x;$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x;$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x;$$

$$\cos(2\pi - x) = \cos x.$$

$$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x;$$

$$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x;$$

$$\operatorname{tg}(2\pi - x) = -\operatorname{tg} x.$$

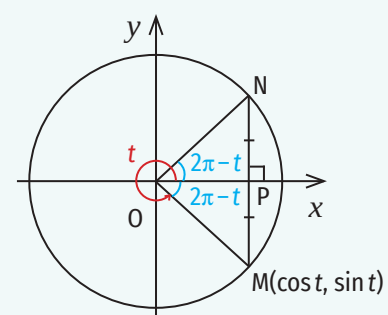


Figura 5

Exerciții rezolvate

1. Calculează:

a) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} - \sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{11\pi}{6}$; c) $\sin 170^\circ - \sin 10^\circ$; e) $\sin \frac{8\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7}$;
b) $\sin^2 \frac{3\pi}{7} + \cos^2 \frac{4\pi}{7}$; d) $\cos \frac{8\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5}$; f) $\cos \frac{\pi}{10} - \sin \frac{2\pi}{5}$.

Rezolvare:

a) $\frac{5\pi}{4} \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{4} - \pi\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$

$\frac{2\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{11\pi}{6} \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \cos \frac{11\pi}{6} = \cos \left(2\pi - \frac{11\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} - \sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{11\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$

b) $\frac{4\pi}{7} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \cos \frac{4\pi}{7} = -\cos \left(\pi - \frac{4\pi}{7}\right) = -\cos \frac{3\pi}{7}$

$\sin^2 \frac{3\pi}{7} + \cos^2 \frac{4\pi}{7} = \sin^2 \frac{3\pi}{7} + \left(-\cos \frac{3\pi}{7}\right)^2 = \sin^2 \frac{3\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7} = 1$

c) $170^\circ \in (90^\circ, 180^\circ) \Rightarrow \sin 170^\circ = \sin (180^\circ - 170^\circ) = \sin 10^\circ$

$\sin 170^\circ - \sin 10^\circ = \sin 10^\circ - \sin 10^\circ = 0$

d) $\frac{8\pi}{5} \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \cos \frac{8\pi}{5} = \cos \left(2\pi - \frac{8\pi}{5}\right) = \cos \frac{2\pi}{5}$

$\cos \frac{8\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = 0$

e) $\frac{8\pi}{7} \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin \frac{8\pi}{7} = -\sin \left(\frac{8\pi}{7} - \pi\right) = -\sin \frac{\pi}{7}$

$\sin \frac{8\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} = \left(-\sin \frac{\pi}{7}\right) + \sin \frac{\pi}{7} = 0$

f) $\cos \frac{\pi}{10} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = \sin \frac{2\pi}{5}$

$\cos \frac{\pi}{10} - \sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5} = 0.$

2. Compară $\sin 2$ cu $\cos 1$.

Rezolvare:

$2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \sin 2 = \sin (\pi - 2)$

$1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos 1 = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

Trebuie să comparăm $\sin (\pi - 2)$ cu $\sin \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

$\pi - 2 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi - 2 - \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{\pi}{2} - 1 > 0 \Rightarrow \pi - 2 > \frac{\pi}{2} - 1$

$\pi - 2, \frac{\pi}{2} - 1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\pi - 2 > \frac{\pi}{2} - 1$

Funcția $f: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1], f(t) = \sin t$ este crescătoare pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow \sin (\pi - 2) > \sin \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \Rightarrow \sin 2 > \cos 1$

PORTOFOLIU

Transcrie și completează tabelul următor.

t	sin t	cos t	tg t
0			
$\frac{\pi}{6}$			
$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{2}$			
$\frac{2\pi}{3}$			
$\frac{3\pi}{4}$			
$\frac{5\pi}{6}$			
π			
$\frac{7\pi}{6}$			
$\frac{5\pi}{4}$			
$\frac{4\pi}{3}$			
$\frac{3\pi}{2}$			
$\frac{5\pi}{3}$			
$\frac{7\pi}{4}$			
$\frac{11\pi}{6}$			
2π			

POT MAI MULT

1. Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

- a) $\sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{7\pi}{5} = \dots$;
 b) $\cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{2\pi}{3} = \dots$;
 c) $\cos \frac{3\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} = \dots$;
 d) $\cos^2 \frac{7\pi}{8} + \sin^2 \frac{15\pi}{8} = \dots$.

2. Compară:

- a) $\sin \frac{4\pi}{9}$ și $\cos \frac{\pi}{18}$;
 b) $\sin \frac{\pi}{7}$ și $\cos \frac{5\pi}{13}$;
 c) $\cos \frac{20\pi}{13}$ și $\sin \frac{\pi}{5}$;
 d) $\sin \frac{19\pi}{14}$ și $\cos \frac{5\pi}{8}$;
 e) $\sin 4$ și $\cos 3,5$;
 f) $\sin \sqrt{2}$ și $\cos 1$;
 g) $\sin \sqrt{19}$ și $\cos 4$;
 h) $\sin 3,2$ și $\cos 2,75$;
 i) $\sin 3$ și $\cos 5$.



Aplic

1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.

A. Numărul real $\sin \frac{7\pi}{6}$ este egal cu:

- a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. Numărul real $\cos \frac{5\pi}{3}$ este egal cu:

- a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. Numărul real $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$ este egal cu:

- a) $-\sqrt{3}$; b) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; d) $\sqrt{3}$.

2. Calculează:

- a) $\sin 135^\circ + \cos 45^\circ$; c) $\sin 120^\circ - \cos 150^\circ$; e) $\cos 330^\circ + \sin 240^\circ$;
 b) $\operatorname{tg} 135^\circ - \cos 30^\circ + \sin 150^\circ$; d) $\sin 330^\circ + \operatorname{tg} 225^\circ$; f) $\cos 210^\circ + \cos 300^\circ$.

3. Calculează:

- a) $\sqrt{3} \cdot \cos \frac{7\pi}{6} + 3 \sin \frac{5\pi}{6}$; e) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} - 2 \sin \frac{7\pi}{6}$; i) $\cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{7\pi}{4} \cdot \cos \frac{3\pi}{4}$;
 b) $\sin \frac{7\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4}$; f) $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} + 4 \cos^2 \frac{4\pi}{3}$; j) $\cos \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \frac{7\pi}{6} - \sin \frac{7\pi}{6} \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$;
 c) $\cos \frac{5\pi}{3} + \sin \frac{7\pi}{6}$; g) $\sin^2 \frac{11\pi}{6} + \cos^2 \frac{5\pi}{6}$; k) $\cos \frac{5\pi}{6} \cdot \sin \frac{4\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{6} \cdot \cos \frac{4\pi}{3}$;
 d) $\cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4}$; h) $\operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{3} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{6}$; l) $\cos \frac{5\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

4. Calculează:

- a) $\cos 0^\circ + \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 180^\circ$;
 b) $\sin 0^\circ + \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 90^\circ - \sin 91^\circ - \sin 92^\circ - \dots - \sin 180^\circ$;
 c) $\sin 0^\circ + \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 45^\circ - \cos 46^\circ - \cos 47^\circ - \dots - \cos 90^\circ$.

5. Calculează:

- a) $\cos^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{4\pi}{5}$; f) $\cos^2 \frac{11\pi}{7} + \sin^2 \frac{4\pi}{7}$; k) $\cos^2 \frac{13\pi}{11} + \sin^2 \frac{20\pi}{11}$;
 b) $\sin \frac{9\pi}{14} - \sin \frac{5\pi}{14}$; g) $\operatorname{tg} \frac{8\pi}{7} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$; l) $\cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{17\pi}{12}$;
 c) $\cos \frac{17\pi}{10} - \cos \frac{3\pi}{10}$; h) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{10} + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{10}$; m) $\sin \frac{6\pi}{11} + \sin \frac{16\pi}{11}$;
 d) $\sin \frac{21\pi}{11} + \sin \frac{\pi}{11}$; i) $\sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{13\pi}{8}$; n) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{5}$;
 e) $\cos \frac{8\pi}{15} + \cos \frac{7\pi}{15}$; j) $\cos \frac{8\pi}{5} + \cos \frac{7\pi}{5}$; o) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{18} + \operatorname{tg} \frac{25\pi}{18}$.

6. Calculează:

- a) $\sin 50^\circ - \cos 40^\circ$; c) $\sin 140^\circ + \cos 130^\circ$; e) $\cos 115^\circ - \sin 335^\circ$;
 b) $\cos 47^\circ - \sin 43^\circ$; d) $\cos^2 290^\circ + \sin^2 110^\circ$; f) $\sin 190^\circ - \cos 100^\circ$.

7. Calculează:

- a) $\sin \frac{3\pi}{20} + \cos \frac{13\pi}{20}$; c) $\sin \frac{4\pi}{11} - \cos \frac{3\pi}{22}$; e) $\sin \frac{17\pi}{18} - \cos \frac{4\pi}{9}$;
 b) $\cos \frac{\pi}{30} - \sin \frac{7\pi}{15}$; d) $\sin \frac{15\pi}{16} - \cos \frac{25\pi}{16}$; f) $\cos \frac{23\pi}{20} - \sin \frac{33\pi}{20}$.

Investigație: Codul termic al corpului uman

Vei lucra ca un biostatistician (adică specialist atât în biometrie, știința care presupune cercetarea organismelor și organelor prin măsurare, cât și în statistică, adică știința care se ocupă cu analiza și interpretarea datelor colectate) pentru a cartografia ritmul interior al organismului uman. Misiunea ta este să demonstrezi că temperatura corpului nu este un număr static, ci o „undă vie” care pulsează predictibil.

Vei colecta date termice corporale personale și le vei prelucra pentru a genera o funcție trigonometrică, menită să anticipeze fluctuațiile de energie ale corpului tău și momentul în care odihna devine o necesitate.

Viața noastră este guvernată de un ceas biologic de 24 de ore. Datorită acestui mecanism, înțelegem de ce temperatura corpului scade noaptea pentru a favoriza somnul și crește ziua pentru a susține activitatea. Mișcarea temperaturii este „lină” (continuă), nu bruscă. Funcțiile trigonometrice pot descrie cu precizie această armonie a echilibrului natural, unde fiecare creștere este urmată de o scădere simetrică.

1. Colectarea datelor

Alege o zi de weekend (pentru un ritm relaxat) și măsoară-ți temperatura de 4-5 ori în momente-cheie: imediat după trezire, la prânz, după-amiaza (când, de obicei, ar trebui să fie maximă) și înainte de culcare.

Identifică în setul de date cea mai mare valoare ($T_{\max}$), cea mai mică valoare ($T_{\min}$) și orele corespunzătoare.

2. Scrierea modelului matematic

$f: [0, 24] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = A \cos(B(t - C)) + D$, unde:

- A este amplitudinea – reprezintă intensitatea oscilației termice. Se obține prin formula $\frac{T_{\max} - T_{\min}}{2}$;
- D este linia de referință – reprezintă nivelul termic de bază, punctul în jurul căruia corpul „gravitează”. Se obține prin formula $\frac{T_{\max} + T_{\min}}{2}$;
- B este factorul temporal – deoarece corpul revine la aceeași stare la fiecare 24 de ore, folosim frecvența $B = \frac{2\pi}{24}$;
- C este ora la care temperatura este maximă;
- t este ora exactă la care dorești să afli temperatura corpului.

3. Proiecția digitală

- Accesează aplicația *Desmos* și introdu formula.
- Folosește butoanele [All] pentru a ajusta parametrii conform datelor tale.
- Configurarea vizualizării: Pentru o claritate optimă, setează axa Ox (timpul) între -1 și 24 și axa Oy (temperatura) între 35 și 38.

Atenție! Asigură-te că lucrezi în *Radians* (radiani).

4. Verificarea acurateții predicției

- Alege o oră la care nu ai făcut măsurători.
- Calculează valoarea temperaturii corpului folosind punctul corespunzător pe graficul din *Desmos*.
- Dacă valoarea „prezisă” matematic se apropie la câteva zecimi de grad de măsurătoarea reală pe care ai făcut-o, atunci ai descifrat cu succes formula propriului ritm circadian.
- Ce semnificație au abaterile majore de la modelul matematic?

3. Teorema cosinusului

Descopăr

1. Un alpinist dorește să determine distanța dintre două vârfuri muntoase, A și B. El se află într-un punct de observație C și știe că distanțele de la el la vârfurile A și B sunt egale cu 6 km și, respectiv, 10 km, iar măsura unghiului format de liniile sale de vizibilitate către cele două vârfuri ($\angle ACB$) este egală cu 60° . Determină distanța dintre cele două vârfuri muntoase A și B.
2. Fie ABC un triunghi cu laturile $AB = c$, $BC = a$ și $AC = b$. Punctul D este proiecția punctului A pe dreapta BC.
 - a) Arată că $AD = b \sin C$.
 - b) Determină lungimea segmentului AB în funcție de lungimile segmentelor AC și BC și $\cos C$.

Învăț

În clasele anterioare ați învățat cum puteți calcula lungimea unei laturi a unui triunghi dreptunghic în funcție de celelalte două laturi ale acestuia sau de funcțiile trigonometrice ale unghiurilor ascuțite ale triunghiului. În această lecție vom determina o relație între laturile unui triunghi oarecare, folosind și funcții trigonometrice ale unghiurilor triunghiului.

În continuare, pentru un triunghi ABC, vom considera notațiile consacrate $AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$.

- Fie ABC un triunghi ascuțitunghic (figura 1). Punctul D este proiecția punctului A pe dreapta BC.

În triunghiul dreptunghic ABD ($\angle ADB = 90^\circ$) avem:

$$\sin B = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \sin B = \frac{AD}{c} \Rightarrow AD = c \cdot \sin B;$$

$$\cos B = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \cos B = \frac{BD}{c} \Rightarrow BD = c \cdot \cos B.$$

Cum $BD = c \cdot \cos B$, rezultă că $DC = BC - BD = a - c \cdot \cos B$.

În triunghiul dreptunghic ADC ($\angle ADC = 90^\circ$), aplicăm teorema lui Pitagora și obținem:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow b^2 = (c \cdot \sin B)^2 + (a - c \cdot \cos B)^2 \Rightarrow b^2 = c^2 \cdot \sin^2 B + a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B + c^2 \cdot \cos^2 B \Rightarrow \\ \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 \cdot (\sin^2 B + \cos^2 B) - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B.$$

În mod asemănător deducem și celelalte relații pentru lungimile laturilor BC și AB.

- Fie ABC un triunghi obtuzunghic cu $\angle B > 90^\circ$ (figura 2).

Punctul D este proiecția punctului A pe dreapta BC.

În triunghiul dreptunghic ADB ($\angle ADB = 90^\circ$) avem:

$$\sin(\angle ABD) = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \sin(\pi - B) = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \sin B = \frac{AD}{c} \Rightarrow AD = c \cdot \sin B;$$

$$\cos(\angle ABD) = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \cos(\pi - B) = \frac{BD}{AB} \Rightarrow -\cos B = \frac{BD}{c} \Rightarrow BD = -c \cdot \cos B.$$

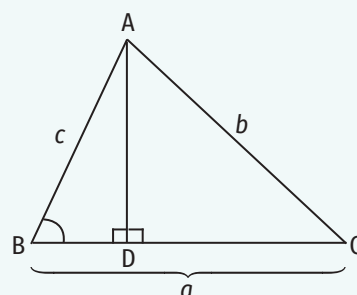


Figura 1

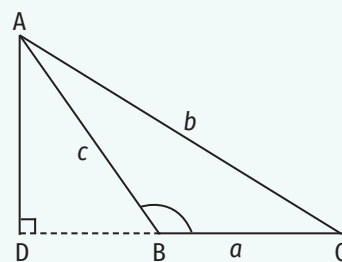


Figura 2

Cum $BD = -c \cdot \cos B$, rezultă că $DC = BD + BC = -c \cdot \cos B + a = a - c \cdot \cos B$.

În triunghiul dreptunghic ADC ($\angle ADC = 90^\circ$), aplicăm teorema lui Pitagora și obținem:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B.$$

Astfel, am obținut unul dintre cele mai importante rezultate din matematică, care stabilește o relație între lungimile laturilor unui triunghi și cosinusul unuia dintre unghiurile acestuia.

• Evident, dacă triunghiul ABC cu $AB = c$, $BC = a$ și $AC = b$, este dreptunghic în B, avem $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$.

Teorema cosinusului. În orice triunghi ABC cu $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, avem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

Consecință. În orice triunghi ABC, cu $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, avem:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

EXEMPLE:

1. Dacă ABC este un triunghi cu $AB = 5$ cm, $AC = 7$ cm și $\cos A = \frac{1}{7}$, atunci:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos A \Rightarrow BC^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{1}{7} \Rightarrow BC^2 = 49 + 25 - 10 \Rightarrow BC^2 = 64 \Rightarrow BC = 8 \text{ cm.}$$

2. Dacă ABC este un triunghi cu $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm și $BC = 7$ cm, atunci:

$$\cos A = \frac{6^2 + 4^2 - 7^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{1}{16}, \cos B = \frac{7^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{29}{56}, \cos C = \frac{7^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{23}{28}.$$

Exercițiu rezolvat

Punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv BC, ale pătratului ABCD. Calculează $\cos(\angle MDN)$.

Rezolvare:

În figura 3 este reprezentat pătratul ABCD cu $AB = a$.

Cum punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB și, respectiv, BC, avem

$$AM = CN = \frac{a}{2} \text{ și } MN \text{ este linie mijlocie în triunghiul BAC. Deci } MN = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul DCN ($\angle DCN = 90^\circ$) și obținem:

$$DN = \sqrt{DC^2 + NC^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul DAM ($\angle DAM = 90^\circ$) și obținem $DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Aplicăm consecința teoremei cosinusului în triunghiul MDN și obținem:

$$\cos(\angle MDN) = \frac{DM^2 + DN^2 - MN^2}{2 \cdot DM \cdot DN} = \frac{\frac{5a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} - \frac{2a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2a^2}{5a^2} = \frac{4}{5}.$$

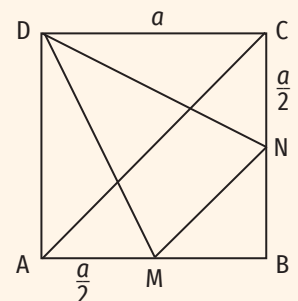


Figura 3

ȘTIAI CĂ...?

Teorema cosinusului este cunoscută și sub numele de **Teorema lui Pitagora generalizată**. Enunțul și demonstrația acestei teoreme au fost găsite în lucrarea *Elemente* a lui Euclid, material scris în anii 300 î.H.

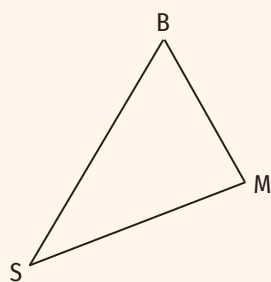
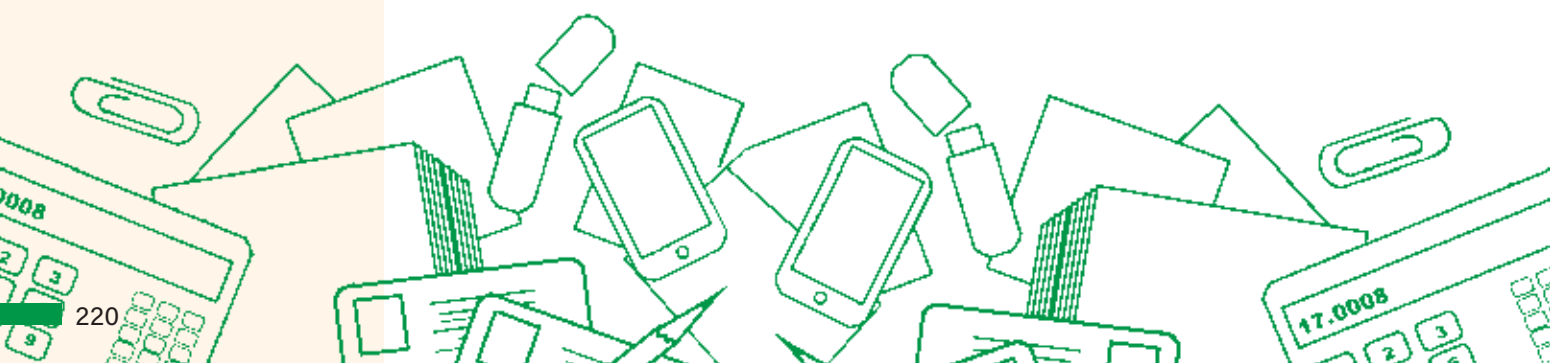


Figura 4

Aplic

- Se consideră triunghiul ABC cu $AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$.
 - Calculează c , $\cos A$ și $\cos B$, știind că $a = 10\sqrt{3}$, $b = 13$ și $C = \frac{\pi}{6}$.
 - Calculează b , $\cos A$ și $\cos C$, știind că $a = c = 12$ și $B = \frac{\pi}{3}$.
 - Calculează a , $\cos B$ și $\cos C$, știind că $b = 20\sqrt{2}$, $c = 30$ și $A = \frac{\pi}{4}$.
- Fie triunghiul ABC cu $AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$.
 - Determină a și măsurile unghiurilor B și C, știind că $A = \frac{2\pi}{3}$, $b = c = 28$.
 - Determină b , $\cos A$ și $\cos C$, știind că $B = \frac{3\pi}{4}$, $a = 4$, $c = 2\sqrt{2}$.
 - Determină c și măsurile unghiurilor A și B, știind că $C = \frac{5\pi}{6}$, $a = b = 14$.
 - Determină a , $\cos B$ și $\cos C$, știind că $A = \frac{5\pi}{6}$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 2$.
- Se consideră dreptunghiul ABCD cu $AB = 8$ cm și $BC = 7$ cm. Punctele M și P sunt mijloacele segmentelor AB și, respectiv, CD, iar punctele N și Q aparțin segmentelor BC și AD, astfel încât $AQ = NB = \frac{3}{7} BC$.
 - Arată că triunghiul NPQ este dreptunghic isoscel.
 - Determină $\cos(\angle QMN)$ și $\cos(\angle MNP)$.
 - Calculează perimetrul patrulaterului MNPQ.
- Se consideră triunghiul ABC cu $AB = a$, $AC = \frac{3a}{2}$ și $BC = \frac{a\sqrt{19}}{2}$, unde a este număr real pozitiv. Determină măsura unghiului A.
- Demonstrează că în orice triunghi ABC cu $AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$, avem:
 - $a \cos B + b \cos A = c$;
 - $bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$.
- Fie ABC un triunghi cu $AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$ astfel încât $c = 2a \cos B$. Demonstrează că triunghiul ABC este isoscel.
- Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm și $BC = 12$ cm. Demonstrează că triunghiul ABC este obtuzunghic.
- Pe o hartă a unui oraș, biblioteca (B), o școală (S) și un magazin (M) sunt unite două câte două prin străzi, ca în figura 4. Pe hartă, distanța dintre bibliotecă și școală este egală cu 8 cm ($BS = 8$ cm), distanța dintre bibliotecă și magazin este egală cu 5 cm ($BM = 5$ cm) și $\angle SBM = 60^\circ$. Scara hărții este 1:10 000. Determină distanța dintre școală și magazin în teren.



4. Teorema sinusurilor

Descopăr



1. Două stații de salvamar situate în punctele A și B pe malul mării se află la o distanță de 12 km una de cealaltă. Ambele recepționează un semnal de urgență de la o navă aflată în larg, în punctul C. Pentru a localiza nava, operatorii măsoară unghiurile față de linia dreaptă care unește cele două stații (AB): din stația A, se formează un unghi de 45° , iar din stația B se formează un unghi de 75° .

a) Determină distanțele de la stațiile de salvamar la navă.

b) Arată că $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$.

2. Fie ABC un triunghi cu laturile $AB = c$, $BC = a$ și $AC = b$. Punctul D este proiecția punctului A pe dreapta BC.

a) Arată că $AD = c \sin B$.

b) Arată că $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.



Învăț

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A (figura 1). Dacă R este lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, atunci $BC = 2R$.

În triunghiul ABC avem:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \sin B = \frac{AC}{2R} \Rightarrow \frac{AC}{\sin B} = 2R;$$

$$\sin C = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sin C = \frac{AB}{2R} \Rightarrow \frac{AB}{\sin C} = 2R.$$

Așadar, $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$.

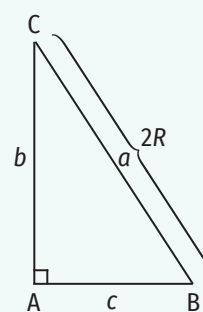


Figura 1

În cele ce urmează vom arăta că nu numai în triunghiul dreptunghic avem astfel de rapoarte constante, ci în orice triunghi, indiferent de natura sa.

Teorema sinusurilor. În orice triunghi ABC, cu $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, avem $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, unde R este lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.

Demonstrație:

Fie ABC un triunghi oarecare cu $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ și R lungimea razei cercului circumscris acestuia (figura 2).

Considerăm punctul M diametral opus punctului B, deci $\angle BCM = 90^\circ$.

În triunghiul dreptunghic BCM avem $\sin(\angle BMC) = \frac{BC}{BM} = \frac{a}{2R}$ (1). Unghiurile BAC și BMC sunt unghiuri înscrise în cerc și au măsura egală cu jumătate din măsura arcului BC, prin urmare sunt congruente. Astfel, relația (1) se poate scrie $\sin(\angle BAC) = \frac{a}{2R}$, de unde rezultă $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

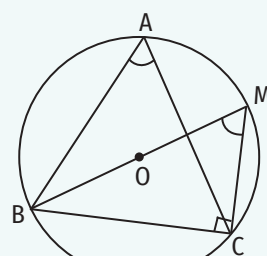


Figura 2

Construind diametrul CN, demonstrăm asemănător că $\frac{b}{\sin B} = 2R$, iar construind diametrul AP, obținem $\frac{c}{\sin C} = 2R$.

Așadar, am obținut $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

EXEMPLU:

Dacă ABC este un triunghi cu $AB = 18$ cm, $A = \frac{5\pi}{12}$ și $C = \frac{\pi}{4}$, atunci: $B = \pi - A - C = \frac{\pi}{3}$ și

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{b}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{18}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2R \Rightarrow \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{18}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R \Rightarrow \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 18\sqrt{2} = 2R.$$

Obținem $b = 9\sqrt{6}$ și $R = 9\sqrt{2}$.



Exerciții rezolvate



1. Fie ABC un triunghi cu $AB = c$, $BC = a$ și $AC = b$ astfel încât $a \sin A = b \sin B + c \sin C$. Demonstrează că triunghiul ABC este dreptunghic.

Rezolvare:

Aplicăm Teorema sinusurilor în triunghiul ABC:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

Înlocuind în relația $a \sin A = b \sin B + c \sin C$, obținem:

$$a \cdot \frac{a}{2R} = b \cdot \frac{b}{2R} + c \cdot \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{a^2}{2R} = \frac{b^2}{2R} + \frac{c^2}{2R} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Triunghiul ABC este dreptunghic în A.

2. Se consideră triunghiul ABC. Bisectoarea unghiului A intersectează dreapta BC în punctul D. Demonstrează că $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Rezolvare:

În figura 3 sunt reprezentate triunghiul ABC și semidreapta AD, bisectoarea unghiului A.

Semidreapta AD este bisectoarea unghiului A $\Rightarrow \angle BAD \equiv \angle CAD \Rightarrow \Rightarrow \sin(\angle BAD) = \sin(\angle CAD)$.

B, D și C sunt puncte coliniare. $\Rightarrow \angle ADB + \angle ADC = \pi \Rightarrow \angle ADC = \pi - \angle ADB \Rightarrow \Rightarrow \sin(\angle ADC) = \sin(\pi - \angle ADB) = \sin(\angle ADB)$

Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiurile ABD și ACD și obținem:

$$\frac{BD}{\sin(\angle BAD)} = \frac{AB}{\sin(\angle ADB)} \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{\sin(\angle BAD)}{\sin(\angle ADB)};$$

$$\frac{DC}{\sin(\angle CAD)} = \frac{AC}{\sin(\angle ADC)} \Rightarrow \frac{DC}{AC} = \frac{\sin(\angle CAD)}{\sin(\angle ADC)}.$$

Dar $\sin(\angle BAD) = \sin(\angle CAD)$ și $\sin(\angle ADC) = \sin(\angle ADB)$, deci $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$, de unde, folosind proporții derivate, obținem $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

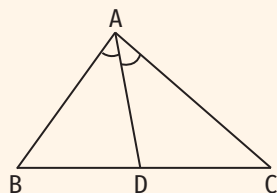


Figura 3

Aplic

- Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 18$ cm. Determină perimetrul triunghiului ABC în fiecare dintre cazurile de mai jos:

a) $A = \frac{\pi}{6}, B = \frac{\pi}{4};$	c) $B = \frac{\pi}{4}, C = \frac{\pi}{4};$	e) $A = \frac{\pi}{3}, C = \frac{\pi}{4};$
b) $A = \frac{\pi}{6}, C = \frac{\pi}{6};$	d) $A = \frac{\pi}{3}, B = \frac{\pi}{3};$	f) $B = \frac{\pi}{2}, C = \frac{\pi}{4}.$
- Fie triunghiul ABC cu $BC = 20$ cm, $B = \frac{\pi}{4}$ și $C = \frac{\pi}{3}$.
 - Determină perimetrul triunghiului ABC.
 - Determină raza cercului circumscris triunghiului ABC.
 - Calculează $\cos(\angle BOC)$, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.
- Se consideră paralelogramul ABCD cu $AB = 12$ cm, $AD = 10$ cm și $\angle BAD = 60^\circ$.
 - Determină lungimile diagonalelor paralelogramului ABCD.
 - Determină măsurile unghiurilor triunghiului BDC.
 - Determină lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.
- Fie trapezul ABCD cu $AB \parallel CD$, $AD = 10$ cm, $A = \frac{\pi}{4}$ și $B = \frac{\pi}{3}$. Semidreapta BD este bisectoarea unghiului ABC.
 - Determină lungimile segmentelor BD, BC și CD.
 - Calculează perimetrul trapezului ABCD.
- O echipă de ingineri vrea să construiască un pod peste un râu, între punctele A și C, situate pe maluri opuse. Aceștia fixează un punct B pe același mal cu punctul A astfel încât $AB = 150$ m. Măsurând cu un teodolit, inginerii determină: $\angle ABC = 60^\circ$ și $\angle ACB = 45^\circ$. Calculează lungimea aproximativă a viitorului pod.

Portofoliu

Înainte de apariția sistemelor GPS, marinarii foloseau geometria pentru a evita naufragiul. O metodă ingenioasă de a afla distanța până la un punct periculos de pe coastă (stânci, recifuri sau faruri), fără a face calcule matematice complicate pe mare, se numea „dublarea unghiului la prova”.

O navă comercială navighează în linie dreaptă de-a lungul unei coaste stâncoase. Din poziția A, căpitanul folosește un sextant și măsoară unghiul dintre direcția de deplasare a navei și direcția către un far F, obținând o valoare de 30° . Nava își continuă drumul în linie dreaptă și parcurge 2 km până în punctul B. Din acest punct, căpitanul măsoară din nou unghiul dintre direcția de mers și direcția către far și observă că acesta s-a dublat, devenind 60° .

- Realizează figura geometrică prin care se poate ilustra această situație.
- Arată că triunghiul ABF este isoscel și determină distanța (în km) de la navă la far în momentul în care nava se află în punctul B.
- Pentru a nu se apropia prea mult de stânci, căpitanul trebuie să calculeze distanța minimă de la far la dreapta care reprezintă traiectoria navei. Calculează această distanță (rotunjită la a doua zecimală).



5. Rezolvarea triunghiurilor oarecare

Descopăr



Două turnuri de comunicații sunt amplasate în punctele A și B, la o distanță de 10 km unul de celălalt. Operatorul din turnul A recepționează un semnal SOS de la telefonul unui turist care se află în punctul P, la o distanță de 8 km de turn. Sistemul radar indică faptul că măsura unghiului dintre direcția către turnul B și direcția către turist este egală cu 60° ($\angle PAB = 60^\circ$). Determină distanța dintre turist și turnul B, precum și măsurile celorlalte două unghiuri ale triunghiului APB.

Învăț

A rezolva un triunghi înseamnă a determina toate elementele sale (lungimile laturilor și măsurile unghiurilor), atunci când se cunosc trei dintre ele, dintre care cel puțin o latură.

OBSERVAȚIE.

Deoarece, în practică, măsurile unghiurilor nu sunt întotdeauna valori remarcabile (precum 30° , 45° , 60°), este necesar să apelăm la instrumente de calcul pentru a obține valorile funcțiilor trigonometrice. În acest scop, putem folosi aplicația *Calculator* de pe telefonul mobil, tabletă sau computer astfel: deschidem aplicația, selectăm modul științific, setăm unitatea de măsură pe *Deg* (pentru grade sexagesimale) sau *Rad* (pentru radiani), introducem funcția trigonometrică și apoi măsura unghiului. Pentru calculul măsurii unui unghi, atunci când se cunoaște valoarea unei funcții trigonometrice a acestuia, se activează opțiunea *Inv*, apoi se folosește una dintre funcțiile $\sin^{-1}/\cos^{-1}/\tan^{-1}$ urmată de valoarea corespunzătoare. După introducerea valorilor, rezultatul afișat va fi o fracție zecimală, pe care, de obicei, o rotunjim la două, trei sau patru zecimale, pentru a asigura precizia necesară în calculele ulterioare.

Rezolvarea triunghiului oarecare

Fie ABC un triunghi cu $AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$ (figura 1).

Distingem trei cazuri:

- **Se cunosc lungimile laturilor triunghiului ABC ($AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$) și se cer măsurile unghiurilor acestuia.**

În acest caz, folosim consecința teoremei cosinusului:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}.$$

EXEMPLU:

Fie ABC un triunghi cu $a = 5$, $b = 3$, $c = 7$. Atunci:

$$\cos A = \frac{3^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 7} \Rightarrow \cos A = \frac{11}{14} \Rightarrow A \approx 38^\circ;$$

$$\cos B = \frac{5^2 + 7^2 - 3^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} \Rightarrow \cos B = \frac{13}{14} \Rightarrow B \approx 22^\circ;$$

$$\cos C = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} \Rightarrow \cos C = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 120^\circ.$$

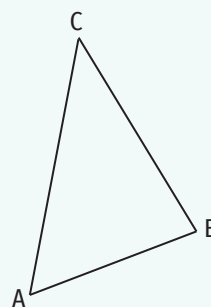


Figura 1

- Se cunosc lungimea unei laturi a triunghiului ABC și măsurile unghiurilor alăturate acesteia și se cer lungimile celorlalte două laturi și măsura celui de-al treilea unghi.

Dacă se cunosc $AB = c$ și măsurile unghiurilor A și B, atunci $C = 180^\circ - A - B$, iar pentru determinarea lungimilor laturilor AC și BC ale triunghiului ABC folosim teorema sinusurilor, de unde rezultă $a = \frac{c \sin A}{\sin C}$ și $b = \frac{c \sin B}{\sin C}$.

EXEMPLU:

Fie ABC un triunghi cu $c = 10$, $\angle A = 30^\circ$ și $\angle B = 100^\circ$. Atunci:

$$\angle C = 180^\circ - 30^\circ - 100^\circ = 50^\circ;$$

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} \Rightarrow a = \frac{10 \sin 30^\circ}{\sin 50^\circ} \approx 6,53;$$

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} \Rightarrow b = \frac{10 \sin 100^\circ}{\sin 50^\circ} \approx 12,86.$$

OBSERVAȚIE.

Cazul în care într-un triunghi se cunosc lungimea unei laturi și măsurile a două unghiuri, dintre care unul este cel opus laturii, se reduce la cazul precedent (se poate calcula măsura celui de-al doilea unghi alăturat laturii respective).

- Se cunosc lungimile a două laturi ale triunghiului ABC și unghiul cuprins între ele și se cer lungimea celei de-a treia laturi a triunghiului și măsurile celorlalte două unghiuri.

Dacă se cunosc $AB = c$, $AC = b$ și măsura unghiului A, atunci folosim teorema cosinusului pentru a determina lungimea laturii BC a triunghiului ($a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$) și consecința acesteia pentru a determina unghiurile B și C.

EXEMPLU:

Fie ABC un triunghi cu $b = 3$, $c = 8$ și $A = 60^\circ$. Atunci:

$$a^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow a^2 = 49 \Rightarrow a = 7;$$

$$\cos B = \frac{7^2 + 8^2 - 3^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} \Rightarrow \cos B = \frac{13}{14} \Rightarrow B \approx 22^\circ;$$

$$\cos C = \frac{7^2 + 3^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 3} \Rightarrow \cos C = -\frac{1}{7} \Rightarrow C \approx 98^\circ.$$

- Se cunosc lungimile a două laturi ale triunghiului ABC și unghiul opus uneia dintre ele și se cer lungimea celei de-a treia laturi a triunghiului și măsurile celorlalte două unghiuri.

Dacă se cunosc $AB = c$, $AC = b$ și măsura unghiului B, atunci folosim teorema sinusurilor pentru a determina unghiul C și obținem $\sin C = \frac{c \sin B}{b}$. În acest caz, există mai multe situații:

– Dacă $c \sin B > b$, problema nu are soluție.

– Dacă $c \sin B = b$, atunci $\sin C = 1$, deci $C = 90^\circ$, $A = 180^\circ - B - C$ și $a = \sqrt{b^2 - c^2}$.

– Dacă $c \sin B < b$, atunci ecuația $\sin C = \frac{c \sin B}{b}$ are două soluții: $C' < 90^\circ$ și $C'' > 90^\circ$, și $A = 180^\circ - B - C$, iar $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$.

EXEMPLU:

Fie ABC un triunghi cu $b = 5$, $c = 8$ și $B = 30^\circ$. Atunci, $\sin C = \frac{8 \sin 30^\circ}{5} = \frac{4}{5}$, de unde rezultă $C \approx 53^\circ$ sau $C \approx 127^\circ$.

Dacă $C \approx 53^\circ$, atunci $A = 97^\circ$ și $a = \frac{5 \sin 97^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 9,93$.

Dacă $C \approx 127^\circ$, atunci $A = 23^\circ$ și $a = \frac{5 \sin 23^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 3,9$.



POT MAI MULT

O echipă de constructori vrea să amenajeze o rampă de acces pentru o clădire situată pe un teren înclinat. Din motive de siguranță, normele tehnice impun ca unghiul pe care îl formează rampa cu planul orizontal să nu depășească 15° .

Platforma de acces a clădirii este situată la înălțimea de 1 m față de baza peretelui. Terenul înclinat formează un unghi de 60° cu peretele vertical al clădirii, iar distanța măsurată de-a lungul terenului, de la perete până la baza rampei, este de 3 m.

- Realizează figura geometrică.
- Calculează lungimea rampei de acces.
- Determină măsura unghiului format de rampă cu planul orizontal și verifică dacă rampa respectă standardele de siguranță.

Exercițiu rezolvat

Se consideră triunghiul isoscel MNP cu $\angle M = 120^\circ$ și $NP = 4\sqrt{3}$ cm. Rezolvă triunghiul MNP.

Rezolvare:

Triunghiul MNP este isoscel cu $\angle M = 120^\circ$. Atunci:

$\angle N = \angle P = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$ și segmentele MN și MP sunt congruente.

Aplicăm teorema cosinusului și obținem:

$$\begin{aligned} NP^2 &= MN^2 + MP^2 - 2 \cdot MN \cdot MP \cdot \cos M \Rightarrow (4\sqrt{3})^2 = MN^2 + MN^2 - 2 \cdot MN \cdot MN \cdot \cos 120^\circ \\ \Rightarrow 48 &= 2MN^2 - 2 \cdot MN^2 \cdot (-\cos 60^\circ) \Rightarrow 48 = 2MN^2 - 2 \cdot MN^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 48 = 3MN^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow MN^2 &= 16 \Rightarrow MN = 4. \end{aligned}$$

Așadar, $\angle N = \angle P = 30^\circ$ și $MN = MP = 4$ cm.

Aplic

- Rezolvă triunghiul ABC, știind că:

a) $a = 12, b = 13, c = 5$;	e) $a = 8\sqrt{2}, b = 6\sqrt{2}, A = 60^\circ$;
b) $a = 8, b = 9, c = 6$;	f) $b = 10, c = 6, A = 45^\circ$;
c) $a = 8, B = 50^\circ, C = 60^\circ$;	g) $a = 8, b = 6, A = 40^\circ$;
d) $b = 12, B = 45^\circ, C = 70^\circ$;	h) $b = 10, c = 7, B = 50^\circ$.
- Rezolvă triunghiul ABC, cu perimetrul egal cu 15 cm, știind că lungimile laturilor sale, exprimate în cm, sunt numere naturale consecutive.
- Rezolvă triunghiul isoscel ABC, știind că lungimile a două laturi ale sale sunt direct proporționale cu numerele 2 și 3, iar perimetrul său este egal cu 7,7 cm. Câte soluții are problema?
- Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 0,4$ dm, $BC = 0,6$ dm și $B = \frac{\pi}{3}$. Rezolvă triunghiurile ABC și AMC, unde M este mijlocul segmentului BC.
- Asupra unui corp acționează două forțe concurente $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ care formează un unghi cu măsura egală cu 60° și au intensitățile $F_1 = 30$ N și $F_2 = 40$ N. Determină intensitatea rezultantei celor două forțe și măsurile unghiurilor pe care rezultanta le formează cu fiecare dintre forțe.
- Un balon cu aer cald se deplasează orizontal la înălțimea constantă de 1 000 m. Un observator îl vede sub un unghi față de orizontală de 30° , iar după 4 minute sub un unghi de 45° . Determină viteza balonului. Analizează toate cazurile posibile.
- Un arcaș țintește centrul unui panou vertical aflat la o distanță de 34,38 metri. Din cauza vântului, traiectoria săgeții suferă o deviere unghiulară constantă de $5'$ față de direcția perpendiculară pe panou. La ce distanță de centrul țintei (exprimată în centimetri) va lovi săgeata?
- Un stâlp de electricitate este montat pe versantul unui deal care are o înclinație de 20° față de linia orizontalului. Într-un anumit moment al zilei, razele soarelui formează cu linia orizontalului un unghi cu măsura egală cu 50° , iar umbra stâlpului are lungimea egală cu 8 m. Determină înălțimea stâlpului. Analizează toate cazurile posibile.

9. Un turn de observație este construit pe coasta unui deal care are o înclinație de 10° față de planul orizontal. Un turist se află pe potecă, în josul pantei, la o distanță de 30 m de baza turnului. Din acel punct, turistul vede turnul sub un unghi de 45° . Ce înălțime are turnul?
10. O echipă de ingineri proiectează un pod suspendat peste un canion adânc și trebuie să determine distanța dintre două puncte de ancorare, A și B, situate pe versantul opus (punctele B și C sunt de aceeași parte a dreptei AD). Pentru măsurători, pe marginea accesibilă a canionului se stabilesc două stații C și D, aflate la o distanță de 100 de metri una de alta. Folosind un teodolit, se măsoară următoarele unghiuri: $\angle ACD = 40^\circ$, $\angle BCD = 70^\circ$, $\angle BDC = 35^\circ$ și $\angle ADC = 80^\circ$. Calculează distanța aproximativă dintre punctele de ancorare A și B.

EXERSEAZĂ!

Pentru a fi sigură, o scară de construcții lungă de 6 m trebuie sprijinită de un perete sub un unghi de siguranță de 60° față de sol. La ce înălțime pe perete va ajunge scara și la ce distanță de perete trebuie plasată baza ei?

Proiect în echipe: Cât de înaltă este clădirea?**Ce veți face?**

Veți lucra în echipe de câte trei elevi pentru a determina înălțimea aproximativă a unei clădiri din localitatea voastră. Pentru aceasta, veți utiliza telefoanele mobile ca instrumente topografice, descărcând una dintre aplicațiile Dioptra, Theodolite sau Clinometer.

**De ce veți elabora proiectul?**

Veți vedea modul în care conceptele teoretice de trigonometrie sunt utilizate în inginerie și topografie pentru a afla dimensiuni care nu pot fi măsurate direct cu o ruletă.

Cum veți face?

- Alegeți clădirea pentru care veți determina înălțimea și marcați pe sol două puncte A și B, la o distanță de câțiva metri unul de celălalt. Măsurați distanța dintre ele cu o ruletă și notați valoarea obținută.
- Stați în punctul A, deschideți aplicația și vizați punctul B, apoi rotiți telefonul (menținându-l la nivelul orizontului) către baza clădirii (punctul N). Notați măsura unghiului $\angle NAB$.
- Stați în punctul B, deschideți aplicația și vizați punctul A, apoi rotiți telefonul către baza clădirii (punctul N). Notați măsura unghiului $\angle NBA$.
- Stați în punctul B, îndreptați camera telefonului către vârful clădirii (punctul M). Notați măsura unghiului format $\angle MBN$.
- Măsurați înălțimea de la sol până la nivelul ochilor colegului care a ținut telefonul.
- Faceți o fotografie a clădirii și, folosind editorul foto, trasați liniile între punctele A, B, N și M.
- Desenați pe o coală schița și calculați lungimea segmentului MN.
- Determinați înălțimea clădirii.

Cum veți ști dacă ați reușit?

Veți prezenta în fața clasei fotografia editată cu punctele A, B, N, M clar marcate, capturile de ecran din aplicație care confirmă măsurătorile și rezolvarea matematică completă a problemei.

6. Aria triunghiului; ariile unor suprafețe poligonale

Descopăr

În figura 1 sunt reprezentate triunghiurile dreptunghice $O'O A$ și $O'A_n A_{n+1}$, $n \in \{1, 2, 3, \dots, 7\}$, cu catetele $OO' = OA_1 = 1$ (u.m.) și $O'A_n \equiv A_n A_{n+1}$.

- Determină perimetrul poligonului $OA_1 A_2 A_3 \dots A_8$.
- Calculează aria poligonului $OA_1 A_2 A_3 \dots A_8$.

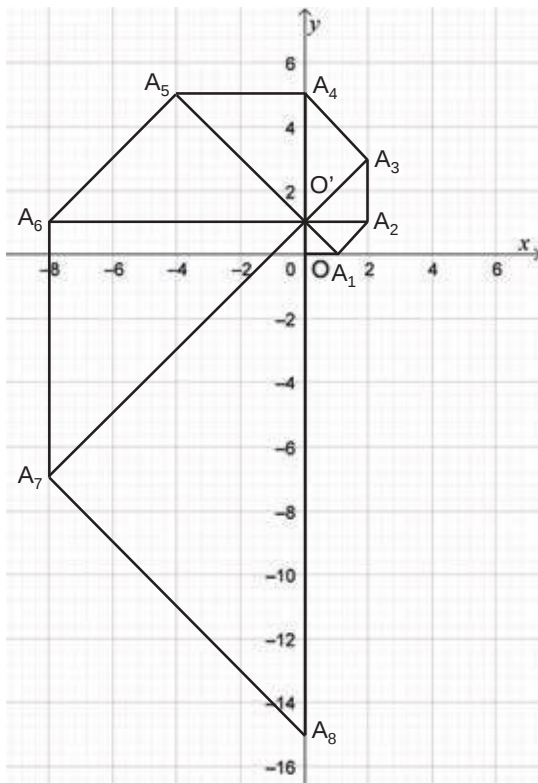


Figura 1

Învăț

Aria triunghiului

Ne reamintim din gimnaziu că aria unui triunghi este dată de formula $A = \frac{h \cdot l}{2}$, unde l reprezintă lungimea unei laturi a triunghiului, iar h este lungimea înălțimii corespunzătoare laturii respective.

În continuare, pentru triunghiul ABC vom folosi notațiile uzuale: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ și h_a , h_b și h_c pentru lungimile înălțimilor triunghiului corespunzătoare laturilor BC , AC și, respectiv, AB .

Astfel, vom avea o primă formulă pentru calculul ariei unui triunghi:

$$A_{ABC} = \frac{h_a \cdot a}{2} = \frac{h_b \cdot b}{2} = \frac{h_c \cdot c}{2}$$

Dacă ABC este un **triunghi echilateral** cu $AB = l$, atunci $A_{ABC} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$ și $h_a = h_b = h_c = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

Dacă ABC este un **triunghi dreptunghic** în A , atunci $A_{ABC} = \frac{h_a \cdot a}{2} = \frac{b \cdot c}{2}$, de unde obținem $h_a = \frac{b \cdot c}{a}$.

OBSERVAȚIE.

În orice triunghi, produsul dintre lungimea unei înălțimi și lungimea laturii corespunzătoare este constant.

Altfel spus, pentru orice triunghi ABC cu $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, h_a , h_b și h_c – lungimile înălțimilor triunghiului corespunzătoare laturilor BC , AC , respectiv AB , avem:

$$h_a \cdot a = h_b \cdot b = h_c \cdot c.$$

În continuare vom folosi teorema sinusurilor și teorema cosinusului pentru a obține și alte formule pentru calculul ariei unui triunghi.

În figura 2 este reprezentat triunghiul ascuțitunghic ABC. Punctul D este proiecția punctului A pe dreapta BD.

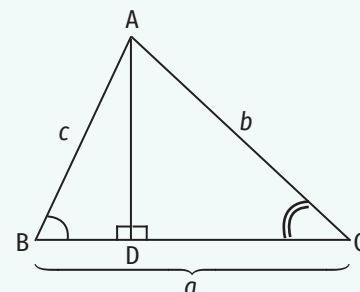


Figura 2

În triunghiul ABD dreptunghic în D, $\sin B = \frac{AD}{AB}$, de unde rezultă $AD = c \sin B$. (1)

În triunghiul ACD dreptunghic în D, $\sin C = \frac{AD}{AC}$, de unde rezultă $AD = b \sin C$. (2)

Segmentul AD este înălțime în triunghiul ABC și $A_{ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2}$. (3)

Din relațiile (1) și (3) obținem $A_{ABC} = \frac{ac \sin B}{2}$, iar din relațiile (2) și (3) obținem $A_{ABC} = \frac{ab \sin C}{2}$.

În mod analog, folosind o altă înălțime a triunghiului ABC, obținem $A_{ABC} = \frac{bc \sin A}{2}$.

În figura 3 este reprezentat triunghiul ABC cu $\angle A > 90^\circ$. Punctul D este proiecția punctului B pe dreapta AC. În triunghiul ADB, $\sin(\angle DAB) = \frac{BD}{AB}$, de unde rezultă $BD = AB \cdot \sin(\angle DAB)$. Cum unghiurile DAB și BAC sunt suplementare, $\sin(\angle DAB) = \sin(\angle BAC)$, deci $BD = AB \cdot \sin(\angle BAC)$ și $A_{ABC} = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{AB \cdot \sin(\angle BAC) \cdot AC}{2} = \frac{bc \cdot \sin A}{2}$.

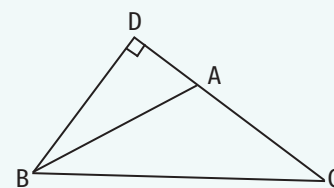


Figura 3

Notând aria triunghiului ABC cu S, obținem $S = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{ac \sin B}{2}$. (4)

Din teorema sinusurilor avem $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, de unde rezultă $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$, $b = \frac{c \sin B}{\sin C}$, $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$. (5)

Din relațiile (4) și (5) obținem $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}$.

Din teorema sinusurilor avem $\frac{a}{\sin A} = 2R$, de unde rezultă $R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{abc}{2bc \sin A} = \frac{abc}{4 \cdot \frac{bc \sin A}{2}} = \frac{abc}{4S}$.

Am obținut astfel o nouă formulă pentru calculul ariei unui triunghi: $S = \frac{abc}{4R}$.

Cum $S = \frac{bc \sin A}{2}$ și $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, obținem $b = 2R \sin B$ și $c = 2R \sin C$ și

$S = \frac{2R \sin B \cdot 2R \sin C \cdot \sin A}{2}$, ceea ce conduce la o altă formulă pentru aria unui triunghi:

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

În continuare vom nota cu p semiperimetrul triunghiului ABC, deci $p = \frac{a + b + c}{2}$.

O altă formulă pentru calculul ariei unui triunghi, numită **Formula lui Heron**, este:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (6)$$

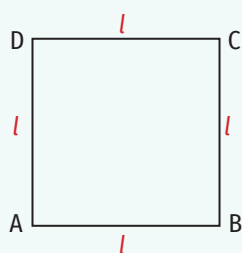
Ariile unor suprafețe poligonale

Dacă o suprafață poligonală se descompune în suprafețe triunghiulare disjuncte, atunci suma ariilor acestor suprafețe triunghiulare reprezintă aria suprafeței poligonale.

De exemplu, $A_{A_1A_2\dots A_n} = A_{A_1A_2A_3} + A_{A_1A_3A_4} + \dots + A_{A_1A_{n-1}A_n}$ (figura 4).

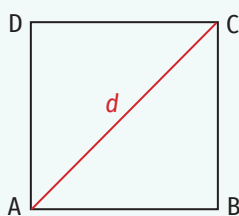
În gimnaziu ați învățat următoarele formule pentru calculul ariilor unor poligoane particulare:

- Aria pătratului cu latura l este l^2 (figura 5).



$$A_{ABCD} = l^2$$

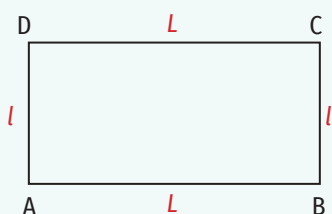
Figura 5



$$A_{ABCD} = \frac{d^2}{2}$$

Figura 6

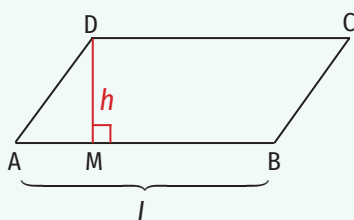
- Aria unui pătrat este egală cu semiprodusul lungimilor diagonalelor sale (figura 6).
- Aria dreptunghiului cu laturile L și l este $L \cdot l$ (figura 7).



$$A_{ABCD} = L \cdot l$$

Figura 7

- Aria unui paralelogram este produsul dintre lungimea unei laturi și înălțimea corespunzătoare acesteia (figura 8).



$$A_{ABCD} = h \cdot l$$

Figura 8

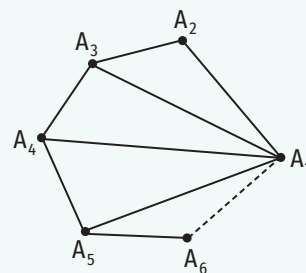
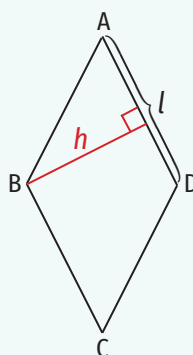


Figura 4

Folosind formula 4 și proprietățile paralelogramului, ABCD putem spune că:

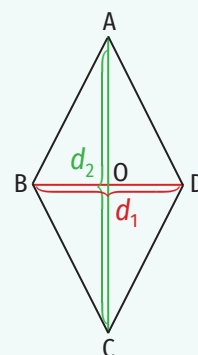
$$A_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin A = AB \cdot BC \cdot \sin B.$$

- Aria unui romb este produsul dintre lungimea unei laturi și înălțimea corespunzătoare acesteia (figura 9).
- Aria unui romb este egală cu semiprodusul lungimilor diagonalelor sale (figura 10).



$$A_{ABCD} = l \cdot h$$

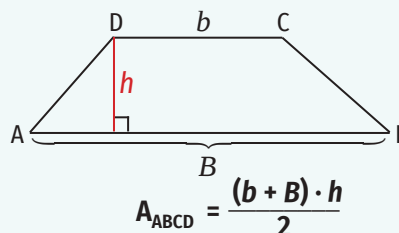
Figura 9



$$A_{ABCD} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Figura 10

- Aria unui trapez este produsul dintre semisuma lungimilor bazelor și înălțimea acestuia (figura 11).



$$A_{ABCD} = \frac{(b + B) \cdot h}{2}$$

Figura 11

- Aria unui hexagon regulat se calculează folosind formula $A = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$ (figura 12).

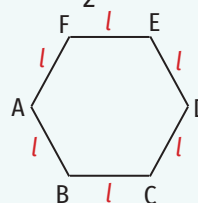


Figura 12

$$A_{ABCDEF} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

Exercițiu rezolvat

Determină aria unui triunghi, știind că lungimile laturilor acestuia sunt direct proporționale cu numerele 2, 3, și, respectiv 4, iar perimetrul său este egal cu 18 cm.

Rezolvare:

Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului. Atunci:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k &\Rightarrow a = 2k, b = 3k, c = 4k \\ a + b + c &= 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2k + 3k + 4k = 18 \Rightarrow k = 2.$$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = 2 \Rightarrow a = 4, b = 6, c = 8$$

Pentru calculul ariei triunghiului ABC, folosim formula lui Heron:

$$A = \sqrt{9 \cdot (9 - 4) \cdot (9 - 6) \cdot (9 - 8)} = 3\sqrt{15} \text{ cm}^2.$$

Aplic

- Determină aria unui triunghi echilateral a cărui latură are lungimea egală cu:
 - 4 cm;
 - $\frac{1}{4}$ cm;
 - 0,6 cm;
 - 2, (2) cm;
 - $6\sqrt{3}$ cm.
- Determină aria și perimetrul unui triunghi ABC, dreptunghic în A, știind că:
 - AB = 2 cm și $\cos B = \frac{1}{3}$;
 - AB = 3 cm și $\cos C = \frac{1}{4}$;
 - AB = 4 cm și BC = 2,5 AB.
- Se consideră triunghiul echilateral ABC cu AB = 8 cm. În exteriorul triunghiului se construiesc triunghiul isoscel MBC, dreptunghic în M, și pătratul ACDE. Determină aria patrulaterului ABMC și aria triunghiului AME.
- Se consideră rombul ABCD cu $A = \frac{\pi}{3}$ și BD = 2,5 cm. Punctul M aparține dreptei CD astfel încât triunghiul AMD este dreptunghic în M.
 - Calculează lungimea laturii rombului ABCD.
 - Determină perimetrul și aria rombului ABCD.
 - Determină ariile patrulaterelor ABDM și ABCM.
 - Rezolvă triunghiul AMB.
- Se consideră triunghiul ABC cu AB = 6 cm și $\angle A = 120^\circ$. Bisectoarea unghiului BAC intersectează dreapta BC în punctul M și AM = 4 cm. Rezolvă triunghiul ABM și calculează aria sa.
- Fie ABCDEF un poligon astfel încât triunghiurile ABC și DEF sunt echilaterale și raportul lungimilor laturilor acestora este egal cu 0,5. Perimetrul triunghiului DEF este egal cu 24 cm, iar ACDF este trapez cu bazele AC și DF și cu înălțimea egală cu $5\sqrt{3}$ cm.
 - Determină lungimile laturilor triunghiurilor ABC și DEF.
 - Determină aria poligonului ABCDEF și aria patrulaterului ABCD.
- Fie ABCD un patrulater convex cu $AC \perp BD$. Demonstrează că $A_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}$.

POT MAI MULT

Fie ABC un triunghi.

Calculează aria triunghiului ABC cu și fără elemente de trigonometrie, știind că:

a) AB = 6 cm, BC = 8 cm și $\angle B = 30^\circ$;

b) AC = 10 cm, AB = 8 cm și $\angle A = 45^\circ$;

c) BC = 8 cm, AC = 5 cm și $\angle A = 120^\circ$;

d) AB = 10 cm, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$;

e) AB = 7 cm, BC = 8 cm, AC = 9 cm.

EXERSEAZĂ!

i) Determină lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, știind că:

- a) $\angle A = 90^\circ$, $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm;
- b) $AB = 13$ cm, $BC = 14$ cm, $AC = 15$ cm;
- c) $BC = 12$ cm, $\angle A = 60^\circ$.
- d) $AB = 5$ cm, $AC = 7$ cm, $\angle A = 60^\circ$.

ii) Utilizează *GeoGebra* pentru a verifica rezultatele obținute prin calcul la punctul i). Pentru fiecare subpunct:

- construiește triunghiul ABC.
- selectează instrumentul *Cerc prin trei puncte* (sau *Circumcircle*) și dă click pe cele trei vârfuri ale triunghiului pentru a genera cercul circumscris acestuia.
- folosește instrumentul *Distanță* selectând centrul cercului și unul dintre vârfuri (sau verifică ecuația cercului în bara algebrică din stânga) pentru a afla lungimea razei.
- compară valoarea afișată de aplicație cu rezultatul obținut de tine prin calcul matematic.

8. O persoană dorește să paveze o zonă de relaxare care are forma unui patrulater convex ABCD. În urma măsurărilor au reieșit următoarele dimensiuni: $AB = 10$ m, $BC = 17$ m, $CD = 13$ m, $AD = 20$ m și $AC = 21$ m.
- a) Calculează aria suprafeței zonei de relaxare.
 - b) Câți metri pătrați de pavele trebuie să cumpere persoana, dacă pentru tăieri și finisaje se recomandă să se achiziționeze cu 10% mai mulți m^2 de pavele decât aria suprafeței pe care acestea se montează?
 - c) Care este costul total al materialului achiziționat dacă prețul pavajului este de 120 RON/ m^2 ?
9. Un topograf trebuie să determine aria unui teren care are forma unui patrulater convex ABCD. În urma măsurărilor au reieșit următoarele dimensiuni: $AB = 30$ m, $BC = 40$ m, $CD = 39$ m, $AD = 17$ m și $\angle B = 90^\circ$. Care e aria terenului?
10. Pe un acoperiș orizontal al unei clădiri se pun 6 panouri solare, montate înclinate, ca în figura 13. Un panou are forma unui trapez isoscel ABCD, cu bazele $AB = 200$ cm și $CD = 100$ cm. Baza CD este situată pe suprafața acoperișului, iar marginea superioară a panoului (AB) este susținută de doi stâlpi verticali, AM și BN (punctele M și N sunt situate pe suprafața acoperișului), cu lungimea egală cu 50 cm. Distanța măsurată pe suprafața acoperișului de la piciorul fiecărui stâlp până la colțul inferior corespunzător al panoului este egală cu 120 cm ($MD = CN = 120$ cm).

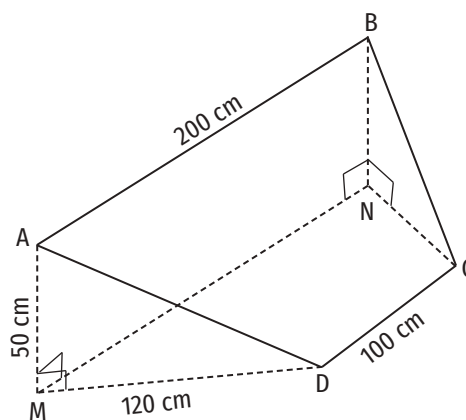


Figura 13

- a) Panoul se izolează pe fiecare latură cu o bandă specială. Determină lungimea benzii necesară izolării celor 6 panouri, știind că se pierde 2% din lungime la montaj.
- b) Determină aria suprafeței unui panou.
- c) Dacă puterea maximă produsă de un panou este de 220 W/ m^2 , calculează puterea totală maximă care poate fi produsă de cele 6 panouri.

Exerciții recapitulative

- Determină măsura în radiani a unui unghi, știind că măsura sa în grade sexagesimale este egală cu:
a) 35° ; b) 76° ; c) 218° ; d) 270° ; e) 320° .
- Determină măsura în grade sexagesimale a unui unghi, știind că măsura sa în radiani este egală cu:
a) $\frac{3\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{18}$; c) $\frac{9\pi}{5}$; d) $\frac{7\pi}{6}$; e) $\frac{3\pi}{2}$.
- Precizează cadranele în care sunt situate punctele asociate unghiurilor cu măsurile:
a) $\frac{\pi}{10}$; b) $\frac{2\pi}{7}$; c) $\frac{5\pi}{3}$; d) $\frac{13\pi}{7}$; e) $\frac{23\pi}{15}$; f) $\frac{10\pi}{7}$; g) $\frac{7\pi}{5}$.
- Calculează:
a) $\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 90^\circ - \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$; c) $\frac{(\operatorname{tg} 120^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ)^2}{\cos 180^\circ \cdot \sin 270^\circ}$;
b) $\sin 120^\circ \cdot \cos 135^\circ - \cos 150^\circ \cdot \cos 315^\circ + \sin 180^\circ$; d) $\frac{-2\sin 240^\circ}{\cos 300^\circ \cdot \operatorname{tg} 240^\circ}$.
- Calculează:
a) $\left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{4\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}}$; c) $\sin \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{7\pi}{4}$; e) $4\left(\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{2\pi}{3}\right)^2 + \cos^2 \frac{4\pi}{3}$;
b) $\sqrt{3} \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + 3\sin \frac{2\pi}{3}\right)$; d) $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} - 2\cos \frac{11\pi}{6}$; f) $\cos \frac{7\pi}{6} \cdot \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{4} \cdot \cos \frac{7\pi}{4}$.
- Determină semnul fiecărui număr real: $\sin \frac{2\pi}{5}$; $\cos \frac{13\pi}{8}$; $\operatorname{tg} \frac{14\pi}{9}$; $\sin 3$; $\cos \sqrt{17}$; $\operatorname{tg} \frac{9}{2}$.
- Determină semnul numărului real a :
a) $a = \cos \frac{3\pi}{5} \cdot \operatorname{tg} \frac{10\pi}{7}$; b) $a = \frac{\cos 2 \cdot \cos \frac{13}{3}}{\cos \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{9}{2} \cdot \cos \frac{11}{2}}$; c) $a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{9} - \operatorname{tg} \frac{2\pi}{15}$.
- Calculează:
a) $\sin^2 \frac{3\pi}{10} + \cos^2 \frac{7\pi}{10}$; b) $\operatorname{tg} \frac{10\pi}{7} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{7}$; c) $\sin \frac{7\pi}{18} - \cos \frac{\pi}{9}$.
- Compară numerele reale:
a) $\sin \frac{3\pi}{7}$ și $\cos \frac{6\pi}{13}$; b) $\cos \frac{16\pi}{9}$ și $\sin \frac{11\pi}{8}$; c) $\sin 3$ și $\cos 5$; d) $\sin \sqrt{11}$ și $\cos 2$.
- Determină $\sin x$, știind că:
a) $\cos x = \frac{1}{5}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; c) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{5}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$;
b) $\cos x = \frac{2}{3}$ și $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$; d) $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$ și $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.
- Determină $\operatorname{tg} x$, știind că: a) $\sin x = \frac{1}{8}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$; b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{5}$ și $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.
- Fie triunghiul ABC care are $BC = 2\sqrt{3}$ cm, $B = \frac{\pi}{4}$ și $C = \frac{\pi}{3}$. Punctele M, N și P sunt mijloacele segmentelor AB, AC, respectiv BC.
a) Determină aria triunghiului ABC.
b) Rezolvă triunghiul ABC.
c) Calculează $\sin(\sphericalangle MNP)$ și $\cos(\sphericalangle NMP)$.
- Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 26$ cm, $BC = 28$ cm și $AC = 30$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului BC.
a) Calculează $\cos(\sphericalangle ABC)$ și $\sin(\sphericalangle ACB)$.
b) Calculează aria triunghiului ABC.
c) Determină lungimea înălțimii corespunzătoare laturii BC.

Timp de lucru: 45 de minute

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I

30 de puncte

30 de puncte	1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.
(10 p.)	A. Un unghi are măsura egală cu 150° . Exprimată în radiani, măsura acestui unghi este egală cu:
	a) $\frac{5\pi}{6}$; b) $\frac{3\pi}{4}$; c) $\frac{5\pi}{3}$; d) $\frac{7\pi}{6}$.
(10 p.)	B. Punctul corespunzător unghiului cu măsura $\frac{5\pi}{7}$ se află în cadranul:
	a) I; b) II; c) III; d) IV.
(10 p.)	C. Rezultatul calculului $\cos \frac{4\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{6}$ este egal cu:
	a) -1; b) $-\frac{1}{2}$; c) 0; d) 1.

Subiectul al II-lea

60 de puncte

Scrie rezolvările complete.

10 puncte	1. Determină semnul numărului real $a = \sin \frac{5\pi}{8} + \cos \frac{9\pi}{5} + \operatorname{tg} \frac{9\pi}{7}$.
10 puncte	2. Compară numerele reale $\sin 1,3$ și $\cos 5,4$.
10 puncte	3. Determină $\operatorname{tg} x$, știind că $\sin x = \frac{4}{5}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.
30 de puncte	4. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 15$ cm, $BC = 14$ cm și $AC = 13$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului BC.
(10 p.)	a) Calculează $\cos(\angle BAC)$ și $\sin(\angle ABC)$.
(10 p.)	b) Calculează aria triunghiului ABC.
(10 p.)	c) Determină lungimea medianei AM.

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din această unitate.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	5 foarte bine	4 bine	3 mediu	2 slab	1 foarte slab
Mi-a fost ușor să rezolv exercițiile.					
Am înțeles criteriile de rezolvare.					
Mi-am amintit conținuturile învățate.					

1. Se consideră numerele reale $a = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$ și $b = \frac{17}{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.
 - a) Arată că $[a] = [b]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .
 - b) Compară numerele reale a și b .
 - c) Determină $\{a\} + \{b\}$.
 - d) Scrie aproximările prin lipsă și prin adaos cu eroare mai mică decât 10^{-2} ale numărului real a .
2. Se consideră predicatul $p(x)$: „ $x^2 - 4 \leq 0$ ”, $x \in \mathbb{R}$.
 - a) Precizează dacă propoziția $p(1)$ este adevărată.
 - b) Determină mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$.
 - c) Scrie propozițiile $\neg p(2)$, $p(-2) \wedge p(3)$, $p(4) \vee p(0)$, $p(-2) \rightarrow p(5)$, $p(6) \leftrightarrow p(7)$.
 - d) Scrie negațiile propozițiilor $(\forall x) p(x)$ și $(\exists x) p(x)$.
3. Restul împărțirii polinomului $f = X^4 - 2X^3 + X^2 + 2X - 2$ la polinomul $g = X^3 + 1$ este $c \in \mathbb{R}[X]$. Determină numărul natural n pentru care $\frac{1}{c(1)} + \frac{1}{c(2)} + \dots + \frac{1}{c(n)} = \frac{2025}{2026}$.
4. Restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ la $X^2 - 1$ este $2X + 2025$. Demonstrează că suma coeficienților de rang par ai polinomului f este pătratul unui număr natural.
5. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $a_5 = -8$ și $a_9 = 0$.
 - a) Determină rația progresiei aritmetice $(a_n)_n$ și termenii a_1 , a_4 și a_{2027} .
 - b) Verifică dacă numărul 204 este termen al progresiei aritmetice $(a_n)_n$.
 - c) Calculează suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$.
6. Fie progresia geometrică cu termeni pozitivi $(b_n)_n$ cu $b_3 = 6$ și $b_5 = 54$.
 - a) Determină rația progresiei geometrice $(b_n)_n$ și termenii b_2 , b_4 și b_6 .
 - b) Verifică dacă numărul real $2 \cdot 3^{10}$ este termen al progresiei geometrice $(b_n)_n$.
 - c) Calculează suma primilor 10 termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_n$.
7. Se consideră numerele reale $a = x - 3$, $b = x + 1$, $c = 4x - 2$, unde x este număr real.
 - a) Determină numărul real x pentru care a , b și c sunt în progresie aritmetică.
 - b) Determină numărul real x pentru care a , b și c sunt în progresie geometrică.
8. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 2)$, $B(1, 5)$ și $C(2, 0)$.
 - a) Demonstrează că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.
 - b) Scrie ecuația medianei din A a triunghiului ABC.
 - c) Determină coordonatele simetricului punctului A față de punctul C.
 - d) Scrie ecuația dreptei care conține punctul B și este paralelă cu dreapta AC.
 - e) Scrie ecuațiile dreptelor suport ale laturilor patrulaterului ABCD, unde D este simetricul punctului B față de mijlocul segmentului AC.
 - f) Scrie ecuația cercului cu centrul în punctul A și raza AB.
9. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
 - a) Reprezintă grafic funcția f în reperul cartezian xOy .
 - b) Identifică punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele de coordonate Ox și Oy și scrie coordonatele acestora.
 - c) Care este ordonata punctului de pe reprezentarea grafică a funcției f care are abscisa egală cu -1 ?
 - d) Verifică dacă punctul $A(-2, 7)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .

- e) Determină valorile numărului real a pentru care punctul $B(a, -1)$ aparține reprezentării grafice a funcției f .
- f) Determină coordonatele vârfului parabolei și precizează dacă acesta este un punct de minim sau de maxim.
- g) Calculează $f(4) - 2f(1)$.
- h) Compară $f(\sqrt{7})$ cu $f(3)$.
- i) Precizează monotonia funcției f .
- j) Care este mulțimea valorilor funcției f ?
- k) Determină coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentările grafice ale funcțiilor f și g , unde $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -2x + 6$.
- l) Determină valorile numărului real a pentru care $f(a) = 3$.
- m) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) + 1 = \sqrt{x - 2}$.
- n) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) \leq \log_2\left(\frac{15}{4}x - 7\right)$.

10. Determină $\cos x$, știind că:

- a) $\sin x = \frac{4}{5}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$; c) $\operatorname{tg} x = 1$ și $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$;
 b) $\sin x = -\frac{1}{2}$ și $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$; d) $\operatorname{tg} x = -2$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$;

11. Determină semnul numărului real a .

- a) $a = \cos \frac{7\pi}{5}$; b) $a = \sin \frac{2\pi}{7}$; c) $a = \operatorname{tg} \frac{19\pi}{10}$; d) $a = \cos 2$; e) $a = \sin 1$; f) $a = \operatorname{tg} 5$.

12. Compară numerele reale a și b :

- a) $\sin 1$ și $\cos 2$; b) $\sin 5$ și $\cos 5$ c) $\sin 2$ și $\cos 1$.

13. Calculează:

- a) $\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ - \sqrt{3} \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ$; e) $\operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{3} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{6}$;
 b) $\sin 120^\circ \cdot \cos 135^\circ - \cos 120^\circ \cdot \sin 150^\circ$; f) $\sin \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{7\pi}{6}$;
 c) $\left(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sin \frac{3\pi}{4}}\right)^2$; g) $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} \left(\cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{6}\right) - \cos \frac{\pi}{2}$;
 d) $\left(3\sin \frac{\pi}{5} - 2\cos \frac{\pi}{5}\right)^2 + \left(3\cos \frac{\pi}{5} + 2\sin \frac{\pi}{5}\right)^2$; h) $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} - \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{8}}$.

14. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 10$ cm, $BC = 8$ cm și $AC = 12$ cm. Pe paralela prin punctul C la dreapta AB se consideră un punct D astfel încât $CD = 15$ cm și punctele A și D sunt situate în semiplane diferite delimitate de dreapta BC.

- a) Calculează $\cos A$ și $\sin C$.
 b) Calculează raza cercului circumscris triunghiului ABC.
 c) Calculează aria patrulaterului ABDC.
 d) Calculează $\sin D$.

Timp de lucru: 45 de minute

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I

30 de puncte

30 de puncte	1. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.
(10 p.)	A. Se consideră predicatul $p(x)$: „ $2x - 4 > 3x$ ”, $x \in \mathbb{R}$. Dintre propozițiile $\neg p(5)$, $p(2) \wedge p(-6)$, $p(3) \vee p(-10)$, $p(-2) \rightarrow p(5)$, cea falsă este: a) $\neg p(5)$; c) $p(3) \vee p(-10)$; b) $p(2) \wedge p(-6)$; d) $p(-2) \rightarrow p(5)$.
(10 p.)	B. Rezultatul calculului $\cos 150^\circ \cdot \sin 120^\circ$ este egal cu: a) $-\frac{3}{4}$; b) 0; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{3}{4}$.
(10 p.)	C. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-5, 1)$, $B(-7, 2)$ și $C(-1, -3)$. Distanța de la punctul B la mijlocul segmentului AC este egală cu: a) 5; b) 9; c) 16; d) 25.

Subiectul al II-lea

60 de puncte

Scrie rezolvările complete.

20 de puncte	1. O sală de spectacole are 16 de rânduri de scaune. Pe fiecare rând, începând cu al doilea, sunt cu două locuri mai multe decât pe rândul anterior. Pe rândul 15 sunt 49 de locuri.
(10 p.)	a) Câte locuri are sala?
(10 p.)	b) Pentru un spectacol, un bilet costă 60 de lei. Ce sumă a fost încasată, știind că s-au vândut toate biletele?
20 de puncte	2. În figura 1 este reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x$.
(5 p.)	a) Scrie coordonatele punctelor de intersecție dintre graficul funcției f și axele de coordonate.
(5 p.)	b) Precizează mulțimea valorilor funcției f .
(5 p.)	c) Determină soluțiile ecuației $f(x) + 1 = 2$.
(5 p.)	d) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) < 8$.
10 puncte	3. Câtul împărțirii polinomului $f = X^3 - 2X^2 + 4X - 3$ la polinomul $g = X - 2$ este polinomul $c \in \mathbb{R}[X]$. Calculează $c(-1)$.
10 puncte	4. Determină $\operatorname{tg} x$, știind că $\sin x = \frac{3}{5}$ și $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

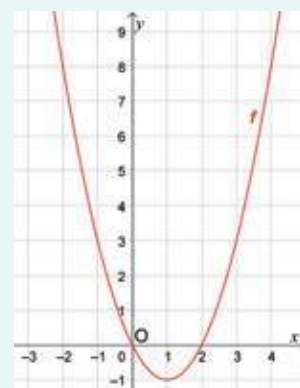


Figura 1

Unitatea 1. Lecția 1. 6. a) 0; b) 6; c) 7; d) 5. 18. a) -7; b) 6. 19. 13. 20. 41. 21. $10\sqrt{2}$. 22. 14. **Lecția 2.** 18. a) 9; b) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + 9 \cdot 19 + 10 = 625$; c) 4 950. 19. $a = 4$. 20. $a = 7$. 26. a) 7,25; b) 7; c) 9 sau 10; d) nu; e) 8 și 8 sau 9 și 9 sau 10 și 10.

Unitatea 2. Lecția 1.1. 1. a) F; b) nu este propoziție; c) F; d) A; m) predicat, $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; n) A; o) F; p) F; q) nu este propoziție.

2. a) A; b) A; c) F; d) A; e) F. 4. a) F; b) F; c) A. 5. a) $\{0\}$; b) $\{2, 3\}$; h) $\left\{-\frac{1}{12}\right\}$; i) $\left[-\frac{2}{3}, 2\right]$; j) $(-\infty, 4]$; l) $\{(2, 1)\}$.

Lecția 1.2. 1.a) Temperatura aerului nu este pozitivă; b) Nu îmi place matematica. 2. a) A; b) A; c) A; d) F; e) A; f) A. 5. $(-7, 9]$. 6. a) $[4, +\infty)$; b) $\mathbb{R}$; c) $[3, 4]$; d) $[3, +\infty)$; e) $[3, 4]$. 9. $(11, +\infty)$; $\mathbb{R}$; $(4, 11]$. 11. a) $p(x)$: „ x e număr par”, $x \in \mathbb{N}$, $q(x)$: „ x este divizibil cu 2”, $x \in \mathbb{N}$; $p(x) \leftrightarrow q(x)$. **Lecția 1.3.** 1. a) A; b) A; c) F; d) F; e) A. 2. a) A; b) F; c) F; d) F; e) A; f) A.

3. a) A; b) F; c) F; d) F; e) A; f) A; g) A. 6. a) F; b) A. **Lecția 1.4.** 1. a) p : „Elevul a învățat.”; q : „Elevul a rezolvat exercițiile.”; $\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$: „Elevul nu a învățat sau nu a rezolvat exercițiile.”. 2. c) Există un număr real x astfel încât $x > 1$ și $x^2 \leq 1$. **Lecția 2.1.** 2. Presupunem că n este par, deci există un număr natural k astfel încât $n = 2k$. Prin urmare $n^2 = 4k^2$, care nu este impar. **Lecția 2.2.** 4. a) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{n}{3n+1}$. **Recapitulare.** 1. a) F; b) A;

c) F; d) F. 2. a) $\{2\}$; b) $\emptyset$. 5. a) A; b) F; c) A; d) F. 7. a) $(\exists x)\left(\frac{x}{x+1}\right)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; c) $(\exists x)(x \text{ nu este par și } x \text{ nu este impar})$, $x \in \mathbb{N}$. 10. a) 55; b) 784; c) n^2 .

Unitatea 3. Lecția 1.2. a) $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 1$; b) $m = \pm\sqrt{2}$, $n = 1$, $p = -2$; c) $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = \pm 1$, $d \in \{0, 1\}$; d) $m = \pm 2$, $n = 1$, $p = \pm\sqrt{2}$, $q = -2$. 3. a) -9; b) $\frac{1}{2}$; c) -20; d) $7\sqrt{2} - 4$; e) $4(3 - 2\sqrt{2})$. 5. $m \in \{-2, 0, 2\}$. 9. $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$. 14. $m = 2$, $n = 3$, $p = 1$. 15. $a = 3$, $b = 12$, $c = 36$. 16. a) $a_0 = 2$; b) $2^{15} + 2$; 17. a) 510 050; b) $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_{198} = 199$, $a_{199} = 100$. 19. $a = -4$, $b = 4$. **Lecția 2.5.** -17. 6. 3. 7. $m = 24$, $n = -80$, $p = -64$. 9. $n = -5$, $p = -1$. 10. $a = -7$, $b = 6$. 11. X , $4X^2 - 7X + 10$. 12. c) $4X + 4$. 13. $(2^{2026} + 2)X - (2^{2023} + 3)$. **Lecția 3.** 18. -5, -3, -2, 0. 19. -11, -7, -3, 1. 20. -16, -11, -4, -1. 14. 21. a) 2; b) 5; c) $3X^2 + 5X + 2$. 22. a) $n + 1$; c) $\frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + 1$; e) -5 050. 23. a) 25. 24. a) $V = 2\pi R^2(6 - R)$; b) $f = -2\pi R^3 + 12\pi R^2$; d) $V_{\max} = 64\pi \text{ dm}^3$, pentru $R = 4 \text{ dm}$. 25. a) $V(x) = (x + 2)(x + 1)(10 - x)$; b) $f = -X^3 + 7X^2 + 28X + 20$. **Recapitulare 1.** A. c); B. c); C. a); D. a); E. b); F. a). 5. 11. 9. $13X + 19$. 10. $m = 24$, $n = 28$, $p = -10$. 11. a) 2, $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; b) $\pm 1, \pm \sqrt{3}$; c) $\pm 1, 2, 3$; d) $\pm 1, -\frac{2}{3}$; e) $-1, 2 \pm \sqrt{2}$, f) $1, 1 \pm \sqrt{5}$. 12. $4X - 2$.

Unitatea 4. Lecția 1. 7. a) $a_1 = -1$, $r = 4$; b) $a_1 = -19$, $r = 2$; c) $a_1 = -2$, $r = 5$; d) $a_1 = 7$, $r = -2$; e) $a_1 = 5$, $r = 2$; f) $a_1 = 12$, $r = -2$; g) $a_1 = -2$, $r = 3$. 9. a) -4; b) -2; c) $\frac{7}{3}$; d) $x \in \{-1, 2\}$; e) 1; f) $x \in \left\{2, -\frac{5}{2}\right\}$. 10. a) 676; b) 1 092; c) 133; d) 1 712; e) 1 364; f) 1 717. 11. a) 69; b) 18; c) 21; d) 34. 12. 1 200 lei. 13. 5,2%. 14. a) 82 160 lei; b) 15 luni. 15. a) 576 locuri; b) 96 120 lei; c) 24 minute. 16. $a_1 = 2$; 17. $a_1 = 1$. 18. $a_1 = 3$, $r = 2$. **Lecția 2.** 1. a) $\frac{9}{2}$; b) $-\frac{2}{3}$; c) -4; d) 2; e) 6; f) 5; g) 3. 2. A. d); B. b); C. b); D. c); E. c). 5. a) 1; b) 8; c) 3; d) $x \in \left\{-\frac{3}{4}, 2\right\}$. 6. a) $x = 1$; b) $x = 3$; c) $x \in \left\{-\frac{3}{4}, 2\right\}$; d) $x \in \{-2, 0, 2\}$; e) $x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$; f) 1. 7. 21. 11. a) $b_1 = 2$, $q = 3$; b) $b_1 = 1$, $q = -2$; c) $b_1 = 6$, $q = 2$ sau $b_1 = \frac{486}{5}$, $q = -\frac{2}{3}$; d) $b_1 = 1$, $q = 2$ sau $b_1 = -3$, $q = -2$; e) $b_1 = 1$, $q = -2$. 15. $n = 4$. 16. 4 060 401. 17. Da. 18. 146 932,81 €. 19. 4,29%. 20. 2,56 g. 21. 12 288 €. **Recapitulare.** 1. 31. 2. $\approx 29 387$. 3. a) $a_2 = 11$; $a_4 = 23$; $a_{25} = 149$; b) da, $a_{89} = 533$; c) 1925. 4. a) $b_2 = -10$; $b_3 = 20$; $b_5 = 80$; b) -1 705. 7. $a_n = 3n - 7$. 8. $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$. 9. 3. 10. 10. 12. a) 61; b) $\frac{49}{2}$. 13. $a = 2$, $b = 5$, $c = 8$ sau $a = 8$, $b = 5$, $c = 2$. 14. 189. 16. a) $a_1 = -10$, $r = \frac{28}{3}$; b) $a_1 = 9$, $r = -4$; c) $a_1 = 2$, $r = \frac{1}{2}$. 17. a) $b_1 = 2$, $q = 3$; b) $b_1 = -1$, $q = 1$ sau $b_1 = -1$, $q = -2$; c) $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$. 18. 825. 19. 503. 20. 7.

Unitatea 5. Lecția 1. 1. a) $(-1, 2)$; b) $(-3, -1)$; c) $(-2, -5)$. 2. a) $2\sqrt{5}$; b) $6\sqrt{2}$; c) 5. 5. a) $2(3 + \sqrt{5})$; b) $1 + \sqrt{10} + \sqrt{17}$. 7. a) $(-5, 11)$; b) $(-2, 11)$; c) $(1, -14)$. 8. b) $E(2, -2)$; c) segmentele AC și BD au același mijloc; d) $(4, 0)$; e) $(0, 5)$; f) dreptunghic isoscel; g) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$; h) $A(-2, 2)$. 9. a) $\sqrt{26}$; b) $\left(\frac{7}{2}, 2\right)$; c) $(6, 4)$; d) $F(-2, 5)$; f) $\left(-\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right)$; g) $\frac{5}{2}$; h) 6; i) 4. 11. a) $4\sqrt{2}$; b) $(5, 4)$; c) $(3, 0)$; d) $(0, 2)$; e) $x = \frac{11}{5}$; f) $(-3, 0)$ sau $(5, 0)$; g) $(1, 8)$; h) $(7, -2)$. 12. a) $A(-4, 2)$, $B(2, 5)$, $C(5, -1)$, $D(0, 4)$, $E(2, 0)$; b) $200\sqrt{5} \text{ m}$. c) triunghiuri dreptunghice isoscele; d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; e) 52 tone; f) 80 tone. 13. a) $C_1(-3, 0)$, $C_2(3, -4)$, $C_3(7, 2)$, $C_4(3, 6)$; b) $F_1(0, -2)$, $F_2(5, -1)$, $F_3(5, 4)$, $F_4(0, 3)$; c) $10\sqrt{13} \text{ m}$, $10\sqrt{13} \text{ m}$, $20\sqrt{2} \text{ m}$, $30\sqrt{2} \text{ m}$; d) $\angle(C_1C_2, C_2C_3) = 90^\circ$; e) $F(2, 1)$; f) F_1 . **Lecția 2.** 9. a) $m_{AB} = m_{CD}$, $m_{AD} \neq m_{BC}$, $AD = BC = 3\sqrt{5}$. 10. a) $AB \parallel CD \parallel O_x$, $AD \parallel O_y$; b) $m_{AB} = m_{CD}$, $m_{AB} \cdot m_{AD} = -1$. 11. a) $m_{AB} = m_{CD}$, $m_{AD} = m_{BC}$, $m_{AB} \neq m_{BC}$. 12. a) $m_{AB} = m_{CD}$, $m_{AD} = m_{BC}$, $m_{AB} \cdot m_{AD} = -1$. 13. a) $m_{AB} = m_{CD}$, $m_{AD} = m_{BC}$, $m_{AB} \cdot m_{AD} = -1$, $m_{AC} \cdot m_{BD} = -1$. **Lecția 3.** 6. a) -7; b) $\frac{4}{3}$. 14. a) $\frac{13}{6}$; b) -1. 15. a) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $(0, -1)$; b) $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$, $(0, 1)$; c) $\left(-\frac{7}{5}, 0\right)$, $(0, 7)$. 17. a) $m = -4$, $n = 8$; b) $m = -3$, $n = 3$.

Lecția 4. 6. a) $m = \frac{1}{2}$; **b)** $m = \frac{1}{2}$; **c)** $m = \frac{3}{2}$; **d)** $m = 6$. **9. a)** $(-4, -3)$; **b)** $(1, 0)$; **c)** $(-2, 1)$; **d)** $(2, -3)$. **10. a)** $3x - y + 10 = 0$; **b)** $2x - y - 2 = 0$; **c)** $3x + 4y - 8 = 0$. **11. a)** $7x + y + 4 = 0$; **b)** $2x - 3y - 12 = 0$. **12. a)** $m \in \{-1, 4\}$; **b)** $m = -2$. **13.** $2x - y - 13 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$. **16. a)** $3x - y + 7 = 0$; **b)** $x + 7y + 5 = 0$. **19.** $(2, 4)$. **20. a)** $x + 2y - 13 = 0$; **c)** $20\sqrt{5}$ m. **Lecția 5. 7. a)** $3\sqrt{2}$; **b)** $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$. **9. a)** $x^2 + y^2 = 5$; **c)** $x^2 + (y + 4)^2 = 16$; **d)** $x^2 + y^2 = \frac{16}{5}$. **10. a)** $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 49$; **b)** $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 4$; **c)** $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = \frac{4}{5}$; **e)** $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = \frac{121}{13}$. **15. a)** $3x - 4y + 25 = 0$; **b)** $x + 3y - 5 = 0$. **Recapitulare. 1. a)** $A \in d$, $B \notin d$; **b)** $(-9, 10)$; **c)** $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$; **d)** 9; **e)** $(6, 0)$, $(0, 4)$; **g)** $-\frac{2}{3}$; **h)** $2x + 3y - 4 = 0$; **i)** $3x - 2y - 16 = 0$. **2. a)** $-\frac{1}{3}$; **b)** AB: $x + 3y + 7 = 0$, AC: $2x - 3y - 13 = 0$; BC: $x - 6y - 38 = 0$; **c)** $x + 2y + 4 = 0$; **d)** $x = 2$, $y = -5$; $x - 3y - 17 = 0$. **4. a)** $d_1 \cap d_2 = \{A(7, -2)\}$; **b)** $d_1 = d_2$; **c)** $d_1 \parallel d_2$; **d)** $d_1 \cap d_2 = \left\{A\left(-\frac{7}{12}, \frac{13}{24}\right)\right\}$. **5. a)** $(-28, 19)$. **6.** $m_{AB} = m_{CD}$, $m_{AB} \neq m_{AC}$. **7.** $m_{AB} \cdot m_{AC} = -1$, $AB = AC = 2\sqrt{5}$. **8. a)** Segmentele AC și BD au același mijloc, iar punctele A, B și C nu sunt coliniare; **b)** $m_{AB} \cdot m_{AD} = -1$, $AB = AD = 2\sqrt{13}$. **9.** Segmentele AC și BD au același mijloc, punctele A, B, C nu sunt coliniare și $AC = BD = 5$. $P_{ABCD} = 6\sqrt{5}$. **10.** Segmentele AC și BD au același mijloc, punctele A, B, C nu sunt coliniare, $m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$ și $m_{AC} \cdot m_{BD} = -1$.

Unitatea 6. Lecția 1. 1. A. c); **B.** b); **C.** b); **D.** d). **2. a)** $f(x) = -3x + 6$; $g(x) = 4x - 5$; $h(x) = 2$; $i(x) = -\frac{1}{2}x$; **b)** $\left(\frac{11}{7}, \frac{9}{7}\right)$; **c)** $\left(\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}\right)$; **d)** -4. **4. b)** $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4}x + 20$. **5. b)** 4 lei; **c)** 3 lei; **d)** $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 4$; **e)** 46 lei. **8. a)** 5 ore; **b)** ora 10; **c)** 33°C ; **d)** $f: [10, 15] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 27$. **e)** 29°C ; **f)** ora 12. **Lecția 2. 2. a)** 4; 4; **b)** $(3, 0)$; $(0, 9)$; **c)** 4; **d)** 2; 4; **e)** 4; **f)** 0; 6; **g)** $x = 3$; **h)** $[0, +\infty)$; **i)** nu; **j)** $[3, +\infty)$; **k)** $f(-1) > f(2)$; **l)** $f(1) < f(7)$; **n)** $\{3\}$. **4. b)** 2 soluții, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$; **c)** $O(0, 0)$; **d)** 3; **e)** -1 și 5; **f)** da, $A(3, 3)$, $O(0, 0)$; **g)** -5; **h)** $a = 2$; **i)** $x = 2$; **j)** $(-\infty, 4]$; **k)** nu; **l)** f e crescătoare pe intervalul $(-\infty, 2]$ și descrescătoare pe intervalul $[2, +\infty)$; **m)** A; **n)** 2 soluții; **o)** $x \in (-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$; **p)** $(0, 4)$. **Lecția 3. 9. a)** $(0, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$; **b)** 2; **c)** -2 și 1; **d)** f e crescătoare pe intervalele $(-\infty, -1]$ și $[1, +\infty)$ și descrescătoare pe intervalul $[-1, 1]$; **e)** $\mathbb{R}$; **f)** $x \in \{-1, 2\}$; **g)** $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$; **h)** $x \in (-\infty, -2)$; **i)** nu există asimptote; **j)** $x \in (-2, 0) \cup (2, \infty)$. **10. a)** $(-2, 0)$; **b)** $x \in \{-5, 2\}$; **c)** $x \in (-6, -2) \cup (1, +\infty)$; **d)** $y = 0$ e ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ și $+\infty$ la graficul funcției f , $x = -6$ și $x = 1$ sunt ecuațiile asimptotelor verticale la graficul funcției f . **Lecția 6. 5. a)** 240; 288; **b)** $200 \cdot 1,2^x$; **c)** ≈ 597 ; $\approx 1\,783$. **10. c)** $y = 0$; **d)** 9; **e)** 3; **f)** f și i sunt crescătoare, g și h sunt descrescătoare; **g)** 0; **h)** $(-\infty, 0]$. **Lecția 7. 1. a)** $(-1, +\infty)$; **d)** $(0, +\infty)$. **4. a)** 27; **b)** 1; **c)** ecuația nu are soluție; **d)** $\frac{1}{2}$; **e)** ecuația nu are soluție; **f)** ecuația nu are soluție. **5. a)** $[9, +\infty)$; **b)** inecuația nu are soluție; **c)** $(0, +\infty)$; **d)** $(3, +\infty)$; **e)** $[0, 1]$; **f)** $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

Unitatea 7. Lecția 1.2. 4. a) $\frac{1}{2}$; **b)** 0; **c)** 1; **d)** 0; **e)** $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$; **f)** $\frac{3}{4}$; **g)** 1; **h)** 1; **i)** 1; **j)** $-\frac{1}{2}$; **k)** 1; **l)** $\frac{1}{2}$. **7. a)** $a < 0$; **b)** $a < 0$; **c)** $a < 0$; **d)** $a < 0$; **e)** $a < 0$; **f)** $a > 0$; **g)** $a < 0$; **h)** $a < 0$; **i)** $a > 0$. **8. a)** $\cos \frac{11\pi}{7} > \sin \frac{7\pi}{5}$; **b)** $\sin \frac{17\pi}{9} > \sin \frac{18\pi}{11}$; **c)** $\cos \frac{3\pi}{7} > \cos \frac{4\pi}{9}$. **9. a)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; **b)** $\frac{\sqrt{5}}{3}$; **c)** $-\frac{3}{5}$; **d)** $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$. **10. a)** $\frac{4}{5}$; **b)** $-\frac{12}{13}$; **c)** $-\frac{7}{25}$; **d)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **11. a)** 2; **b)** 25. **Lecția 1.3. 1. a)** 2; **b)** 4; **c)** 0; **d)** 2; **e)** $\frac{\sqrt{6}}{3}$; **f)** 0; **g)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$; **h)** $\frac{8}{3}$. **2. a)** 1; **b)** $\sqrt{3} + 9$; **c)** $\frac{9}{4}$; **d)** 1. **6. a)** $\sin \frac{\pi}{8} > \tan \frac{5\pi}{8}$; **b)** $\tan \frac{\pi}{5} < \tan \frac{3\pi}{7}$; **c)** $\sin 4 < \tan 1$. **7. a)** $\sqrt{15}$; **b)** $-2\sqrt{2}$; **c)** $\frac{\sqrt{6}}{12}$; **d)** $-\sqrt{3}$. **8. a)** $\frac{\sqrt{5}}{5}$; **b)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; **c)** $\frac{\sqrt{10}}{10}$; **d)** $-\frac{\sqrt{6}}{6}$. **9. a)** $\frac{\sqrt{42}}{7}$; **b)** $\frac{\sqrt{6}}{6}$; **c)** $-\frac{3}{5}$; **d)** $-\frac{1}{2}$. **Lecția 2. 2. a)** $\sqrt{2}$; **b)** $\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$; **c)** $\sqrt{3}$; **d)** $\frac{1}{2}$; **e)** 0; **f)** $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$. **3. a)** 0; **b)** 0; **c)** 0; **d)** $-\sqrt{2}$; **e)** 2; **f)** 4; **g)** 1; **h)** $\frac{10}{3}$; **i)** 0; **j)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **k)** 1; **l)** 0. **4. a)** 0; **b)** 1; **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5. a)** 1; **b)** 0. **6. a)** 0; **d)** 1. **7. a)** 0. **Lecția 3. 1. a)** $c = \sqrt{79}$, $\cos A = -\frac{2\sqrt{79}}{79}$, $\cos B = \frac{7\sqrt{237}}{158}$. **2. a)** $B = C = \frac{\pi}{6}$, $a = 28\sqrt{3}$; **b)** $b = 2\sqrt{10}$, $\cos A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos C = \frac{3\sqrt{10}}{10}$. **4.** 120° . **7.** $\cos A < 0$. **Lecția 4. 2. c)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3. a)** $BD = 2\sqrt{31}$ cm, $AC = 2\sqrt{91}$ cm; **c)** $\frac{2\sqrt{273}}{3}$. **4. a)** $BD = 10\sqrt{2}$ cm, $BC = CD = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ cm; **b)** $5\left(\frac{7\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2} + 2\right)$ cm. **5.** $75\sqrt{6}$ m. **Lecția 5. 1. a)** $\angle B = 90^\circ$, $\angle A \approx 23^\circ$, $\angle C \approx 67^\circ$; **c)** $b \approx 6,52$ cm, $c \approx 7,37$ cm; **d)** $\angle A = 65^\circ$, $a \approx 15,38$ cm, $c \approx 15,95$ cm. **9.** ≈ 37 m. **10.** ≈ 69 m. **Lecția 6. 3.** $A_{ABMC} = 16(\sqrt{3} + 1)$ cm², $A_{AME} = 8(\sqrt{3} + 3)$ cm². **5.** $BM = 2\sqrt{7}$ cm, $\angle B \approx 41^\circ$, $\angle M \approx 79^\circ$. **8. a)** 210 m²; **b)** 231 m²; **c)** 27 720 RON. **Recapitulare. 1. a)** $\frac{7\pi}{36}$; **b)** $\frac{19\pi}{45}$; **c)** $\frac{109\pi}{90}$; **d)** $\frac{3\pi}{2}$; **e)** $\frac{16\pi}{9}$. **2. a)** 135° ; **b)** 10° ; **c)** 324° ; **d)** 210° ; **e)** 270° . **4. a)** $\frac{3}{4}$; **b)** 0; **c)** $\frac{16}{3}$; **d)** 2. **5. a)** $2\sqrt{2}$; **b)** 3; **c)** $-\sqrt{2}$; **d)** 0; **e)** $\frac{5}{4}$; **f)** $-\frac{5}{4}$. **9. a)** $\sin \frac{3\pi}{7} > \cos \frac{6\pi}{13}$; **b)** $\cos \frac{16\pi}{9} > \sin \frac{11\pi}{8}$; **c)** $\sin 3 < \cos 5$; **f)** $\sin \sqrt{11} > \cos 2$. **10. a)** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$; **b)** $-\frac{\sqrt{5}}{3}$; **c)** $\frac{\sqrt{30}}{6}$; **d)** $-\frac{4}{5}$. **11. a)** $-\frac{\sqrt{7}}{21}$; **b)** $-\frac{\sqrt{66}}{22}$. **12. a)** $\approx 3,8$ cm²; **b)** $\angle A = 75^\circ$, $b \approx 2,5$ cm, $c \approx 3,1$ cm. **13. a)** $\cos(\angle ABC) = \frac{5}{13}$, $\sin(\angle ACB) = \frac{4}{5}$; **b)** 336 cm²; **c)** 24 cm.

**SUGESTII DE FIȘE PENTRU OBSERVAREA SISTEMATICĂ A ACTIVITĂȚII
ȘI A COMPORTAMENTULUI ELEVILOR**

FIȘĂ DE OBSERVARE A ACTIVITĂȚII INDIVIDUALE

Indicator	Frecvent	Rar	Deloc
Folosește corect termenii specifici disciplinei.			
Este implicat în îndeplinirea sarcinilor de lucru.			
Exprimare socială și emoțională adecvată.			
Are o atitudine adecvată față de ceilalți colegi.			

FIȘĂ DE OBSERVARE A ACTIVITĂȚII GRUPULUI

Indicator	Frecvent	Rar	Deloc
Fiecare membru al grupului este implicat în rezolvarea sarcinii.			
Elevii formulează idei clare și ușor de înțeles de către ceilalți.			
Toate ideile propuse sunt luate în considerare.			
Elevii se sprijină și se încurajează pentru a fi productivi și creativi.			
Rezultatul activității de grup este relevant și prezentat într-o manieră care facilitează înțelegerea.			
Elevii urmăresc cu atenție prezentările celorlalte grupuri.			
Elevii acordă feedback colegilor.			

ETAPELE REALIZĂRII UNUI PROIECT

1. Stabilește câteva obiective și împarte sarcinile în pași mai mici.
2. Caută pe internet sau în diverse publicații informațiile de care ai nevoie. Folosește doar surse de încredere.
3. Îndeplinește, în ordine, obiectivele stabilite. Vei realiza astfel o prezentare. Fii creativ! Poți include imagini sau ilustrații.
4. Prezintă proiectul în fața clasei.

ETAPELE REALIZĂRII UNUI PORTOFOLIU

1. Stabilește o temă și alege un titlu adecvat pentru fișa de portofoliu.
2. Realizează un plan. Împarte sarcinile în pași mai mici.
3. Caută pe internet sau în diverse publicații informațiile de care ai nevoie.
4. Folosind aceste informații, realizează o prezentare.
5. Prezintă fișa în fața clasei.
6. Păstrează toate fișele create de tine într-un dosar.

ETAPELE REALIZĂRII UNEI INVESTIGAȚII

1. Adună informațiile de care ai nevoie. Poți folosi internetul sau poți studia cărți la bibliotecă.
2. Prelucreză informațiile și realizează prezentarea. Realizează o diagramă sau un tabel în care să notezi informațiile găsite.
3. Prezintă în fața clasei rezultatele investigației.

MATEMATICĂ

Trunchi comun și curriculum de specialitate (TC+CS), filiera teoretică,
profilul real, specializarea științe ale naturii – clasa a IX-a

UNITATEA 1 – Mulțimea numerelor reale

UNITATEA 2 – Elemente de logică matematică

UNITATEA 3 – Polinoame cu coeficienți reali

UNITATEA 4 – Progresii aritmetice și progresii geometrice

UNITATEA 5 – Geometrie analitică

**UNITATEA 6 – Funcții: observarea unor proprietăți ale funcțiilor
utilizând lecturi grafice**

**UNITATEA 7 – Elemente de trigonometrie și aplicații ale
trigonometriei în geometrie**

ISBN 978-630-347-296-6



6 421763 016628

MN68



Booklet